

渦糸の局所誘導運動に現れる 2 つの非線形シュレディンガー方程式 Two Nonlinear Schrödinger Equations in a Locally Induced Motion of a Vortex Filament

東大院理 梅木 誠 (Makoto Umeki)

Department of Physics, Graduate School of Science
University of Tokyo

1 はじめに

局所誘導による渦糸の運動は、Hasimoto 変換 (Hasimoto 1972)[1] により非線形シュレディンガー方程式と等価であることが知られている。Hasimoto 変換は、局所誘導の運動方程式を、振幅を曲線の曲率、位相を捩 (れい) 率の積分とする複素変数に対する非線形シュレディンガー方程式に変換する関係式である。この変数で与えられる一般の関数形から渦糸の形を導き出すには、セレフレネの関係式を実際に積分して、接線ベクトルの弧長依存性を調べ、さらにもう一度積分して 3 次元空間での形状を求める必要がある。Hirota(1982)[3] では、非線形シュレディンガー方程式 (の双線形方程式) ではなく、3 次元接線ベクトルを表示する複素関数に対する双線形方程式を用いてソリトン解を求めている。局所誘導渦糸のホモクリニック解を導いた Umeki(2010)[4] では、その複素関数に対する偏微分方程式があらわに示されている。しかし、この解を用いても接線ベクトルを弧長変数に対して一度積分する作業が残っている。最近、Van Gorder(2012)[6, 7] は Shivamoggi and Heijst(2010)[9] の結果を改良して、空間の座標の一つを独立変数、残りの 2 つの座標を複素数の従属変数とする、正確な偏微分方程式を示した。この方程式の解析解を使えば、上で述べた積分の作業が不要となる。従来の変数を intrinsic (本質的な)、実空間での変数を extrinsic (付帯的な) と呼んでいる。但し、空間座標の一つで残りの 2 つの座標を表すために、渦糸の形の直線からのずれが小さいもの (ソリトンなど) を念頭に置いている。(そうでない、変形の大きい渦糸などでは、関数が多価になってしまう。) 本論文ではこの方程式の導出を再考し、他の等価な方程式との関連を考える。実空間表現を円筒座標で適用すれば、変形した渦輪 (Kambe and Takao 1971) [2] の非定常な局所誘導運動の記述も可能である。なお、この講究録原稿を記すに当たり、文献 [5] を参考にした。

2 デカルト座標での局所誘導理論

渦糸の運動を実空間座標で表す方法では、渦糸の位置 (x, y, z) のうちの x, y を残りの z (と時間 t) の関数として表す。渦糸の形は、以下ようになる。

$$\mathbf{x} = x(t, z)\mathbf{e}_x + y(t, z)\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z. \quad (1)$$

接ベクトルは位置 \mathbf{x} を弧長パラメータ s で微分したものである。以下の関係式が成り立つ。

$$\mathbf{t} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s} = (x_z \mathbf{e}_x + y_z \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z) z_s. \quad (2)$$

ここで、 $z_s > 0$ を仮定する。下添え字は偏微分を表す。(基底単位ベクトル e_j の成分を表す場合は例外である。)

線素 $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ の関係より、

$$\frac{\partial z}{\partial s} \equiv \partial_s z = z_s = (x_z^2 + y_z^2 + 1)^{-1/2} \quad (3)$$

が成り立つ。ここで $\partial_s = \partial/\partial s$ である。

渦糸の法線ベクトルは、曲率 κ と接ベクトル t で表される。 z を使えば、その関係式は、

$$\kappa \mathbf{n} = \frac{\partial t}{\partial s} = \frac{\partial t}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial z^2} \left(\frac{\partial z}{\partial s} \right)^2 + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s} \right) \frac{\partial z}{\partial s} \quad (4)$$

となる。

(1-3) を使い、(4) の右辺は

$$\kappa \mathbf{n} = (x_{zz} \mathbf{e}_x + y_{zz} \mathbf{e}_y) z_s^2 - (x_z \mathbf{e}_x + y_z \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z) z_s^4 (x_z x_{zz} + y_z y_{zz}) = z_s^4 \mathbf{J} \quad (5)$$

となる。ここで、

$$\mathbf{J} = \mathbf{e}_x (x_{zz} + y_z^2 x_{zz} - x_z y_z y_{zz}) + \mathbf{e}_y (y_{zz} + x_z^2 y_{zz} - y_z x_z x_{zz}) - \mathbf{e}_z (x_z x_{zz} + y_z y_{zz}) \quad (6)$$

が成り立つ。計算を進めると、局所誘導速度は以下で与えられる。

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{t} \times \kappa \mathbf{n} = (x_z \mathbf{e}_x + y_z \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z) z_s \times z_s^4 \mathbf{J} \\ &= z_s^3 [-y_{zz} \mathbf{e}_x + x_{zz} \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z (x_z y_{zz} - y_z x_{zz})]. \end{aligned} \quad (7)$$

他方、速度 \mathbf{v} は位置 \mathbf{x} の時間微分であり、次で表される。

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = x_t \mathbf{e}_x + y_t \mathbf{e}_y. \quad (8)$$

(7) と (8) の \mathbf{e}_x と \mathbf{e}_y の係数を比較して、 x と y の発展方程式を得る。

$$x_t = -y_{zz} (x_z^2 + y_z^2 + 1)^{-3/2}, \quad y_t = x_{zz} (x_z^2 + y_z^2 + 1)^{-3/2}. \quad (9)$$

複素表現 $\Phi = x + iy$ を使えば、

$$i\Phi_t + (1 + |\Phi_z|^2)^{-3/2} \Phi_{zz} = 0 \quad (10)$$

となる。この式は Van Gorder (2012)[6, 7] に与えられている。Dmitriyev (2005)[8] では (10) の項 $(1 + |\Phi_z|^2)^{-3/2}$ が 1 になっている。Shivamoggi and Heijst (2010)[9] は別の 3 次シュレディンガー方程式を与えている。それは、(10) の $(1 + |\Phi_z|^2)^{-3/2}$ が $1 - (3/2)|\Phi_z|^2$ に展開されると得られる式である。

3 弧長表現と実空間表現の関係

渦糸の局所誘導運動を表す従来の方法では、弧長 s を独立変数に取る。フィラメントの接ベクトル t は s と t の関数である。渦糸の局所誘導運動は

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \mathbf{t} \times \mathbf{t}_s \quad (11)$$

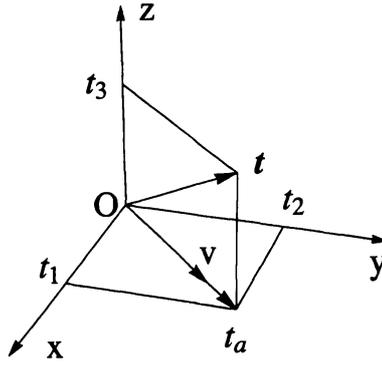


図 1: $t = (t_1, t_2, t_3)$ 、 $t_a = t_1 + it_2$ 、及び v の幾何学的関係

で与えられる。ここで、 t は渦糸の強さで規格化された時間である。(11) を s で微分して、以下を得る。

$$\frac{\partial t}{\partial t} = t \times t_{ss}. \quad (12)$$

3次元単位ベクトル t を表すために、複素変数 v を導入する。接ベクトルの3成分 $t = (t_1, t_2, t_3)$ と v の関係は

$$t_a = t_1 + it_2 = 2v/(1 + |v|^2), \quad (13)$$

$$t_3 = (1 - |v|^2)/(1 + |v|^2) \quad (14)$$

である。 t_a と v が複素 (x, y) 平面にあり、 t_a は v を同じ直線上で長さ $[(1 - t_3)/(1 + t_3)]^{1/2}$ に延ばされている。図1が単位ベクトル t と v の幾何学的関係を示す。

(12) と t_a, t_3 の定義を使い、 t_a と t_3 の発展は

$$\dot{t}_a = i(t_{ass}t_3 - t_a t_{3ss}), \quad (15)$$

$$\dot{t}_3 = (i/2)(t_{ass}^* t_a - t_a^* t_{ass}), \quad (16)$$

で表される。ここで、ドットは時間微分を表す。(13) と (14) を、(15) と (16) に代入して、 v の発展方程式が得られる (Umeki 2010)[4]。

$$iv_t + v_{ss} - 2v^* v_s^2 / (1 + |v|^2) = 0. \quad (17)$$

この節では、(10) が (17) に直接変形できることを示す。まず、 $z_s = t_3$ より、次式を得る。

$$z_s = (1 + |\Phi_z|^2)^{-1/2} = (1 + |v|^2)^{-1} (1 - |v|^2). \quad (18)$$

z_s が符号を変えないと仮定する。よって、 $|v| < 1$ の場合を考える。 Φ_z は v で以下のように与えられる。

$$\Phi_z = (x + iy)_z = (x + iy)_s (z_s)^{-1} = t_a (z_s)^{-1} = 2v(1 - |v|^2)^{-1}. \quad (19)$$

さらに $|\Phi_z|^2$ は $|v|^2$ で次のように表される。

$$|\Phi_z|^2 = 4|v|^2(1 - |v|^2)^{-2}. \quad (20)$$

関係式 $1 + |\Phi_z|^2 = (1 + |v|^2)^2(1 - |v|^2)^{-2}$ も有用である。

次に (19) の z 微分を考える。 Φ_{zz} は

$$\Phi_{zz} = \partial_z[2v(1 - |v|^2)^{-1}] = (z_s)^{-1}\partial_s[2v(1 - |v|^2)^{-1}] = 2(1 + |v|^2)(1 - |v|^2)^{-3}(v_s + v^2v_s^*) \quad (21)$$

となる。

三番目に、(10) の z 微分を取る。計算の後、第 2 項は

$$\begin{aligned} \partial_z[(1 + |\Phi_z|^2)^{-3/2}\Phi_{zz}] &= (z_s)^{-1}\partial_s[(1 + |\Phi_z|^2)^{-3/2}\Phi_{zz}] \\ &= -4(1 + |v|^2)^{-2}(1 - |v|^2)^{-1}(v_s^2v^* + v^3v_s^{*2}) + 2(1 + |v|^2)^{-1}(1 - |v|^2)^{-1}(v_{ss} + v^2v_{ss}^*) \end{aligned} \quad (22)$$

となる。最初の項に対して、 Φ の t 微分と z 微分が非可換であることに注意する必要がある。

$$\partial_z\Phi_t = (z_s)^{-1}\partial_s\Phi_t = (z_s)^{-1}\partial_t\Phi_s = (z_s)^{-1}\partial_t(z_s\Phi_z) = \partial_t\Phi_z + (z_s)^{-1}\Phi_z\partial_t z_s. \quad (23)$$

(18) と (19) を用いて、(23) は次式に帰着される。

$$\partial_z\Phi_t = 2(1 - |v|^2)^{-1}(1 + |v|^2)^{-1}(v_t - v^2v_t^*). \quad (24)$$

(22) と (24) を (10) の z 微分に代入して、

$$i(v_t - v^2v_t^*) + v_{ss} + v^2v_{ss}^* - 2(1 + |v|^2)^{-1}(v_s^2v^* + v^3v_s^{*2}) = 0 \quad (25)$$

を得る。

最後に (25) とその複素共役に v^2 をかけたものの差を取り、(17) を得る。

4 2つの方程式の比較

Umeki (2010) で与えられた式 (17) と Van Gorder (2012) の式 (10) を比べる。(17) は非線形シュレディンガー方程式 [1] と類似の性質があり、例えば双線形方程式からソリトン解やホモクリニック解を得ることができる [4]。それに対して、(10) にはそのような性質は知られていない。

他方、局所誘導に従う渦糸の形を、一般の初期条件で求めるという意味では、(10) は優れている。講演時に示したように、この方法は円筒座標系にも拡張できる。変形渦輪の非定常運動 [2] の数値解析も可能である。但し、変形が大きくなると、 z 座標の一価性の仮定が破れる。

(10) に対する、すぐに書ける厳密解は、直線 $\Phi = \text{const.}$ と (半径 a , ピッチ $2\pi/k$ の) 螺旋 $\Phi = ae^{i(kz - \omega t)}$ である。後者の分散関係は $\omega = (1 + a^2)^{-3/2}k^2$ である。

Hasimoto (1972) の 1 ソリトン解について、Umeki (2013) [5] で再考した。これも、(10) の解析解として見るならば、陰関数を用いて、弧長 s を導入する必要がある。

5 結論

渦糸の局所誘導理論に対して、従来は、弧長を空間変数に取った方程式を考慮していた。それに対して最近示された、実空間座標の一つを独立変数にして残りの二つの座標に対する発展方程式が、Umeki(2010) の式と等価である事を、解析的な直接変形で示した。

渦糸の局所誘導運動を表す、二つの等価な方程式の長所と短所を論じた。扱う問題に応じて、実空間で表す方程式もかなり有用である。

参考文献

- [1] Hasimoto, H., "A soliton on a vortex filament", *J. Fluid Mech.* **51** (1972) pp. 477-485.
- [2] Kambe, T. and Takao, T., "Motion of distorted vortex rings", *J. Phys. Soc. Jpn.* **31** (1971) pp. 591-599.
- [3] Hirota, R., "Bilinearization of soliton equations", *J. Phys. Soc. Jpn.* **51**, (1982) pp. 323-331.
- [4] Umeki, M., "A locally induced homoclinic motion of a vortex filament", *Theor. Comput. Fluid Dyn.* **24** (2010) pp. 383-38.
- [5] Umeki, M., "A real-space representation for a locally induced motion of a vortex filament", *Theor. Appl. Mech. Jpn.* **61** (2013) pp. 195-200.
- [6] Van Gorder, R. A., "Motion of a vortex filament in the local induction approximation: a perturbative approach", *Theor. Comput. Fluid Dyn.* **26** (2012) pp. 161-171.
- [7] Van Gorder, R. A., "Integrable stationary solution for the fully nonlinear local induction equation describing the motion of a vortex filament", *Theor. Comput. Fluid Dyn.* **26** (2012) pp. 591-594.
- [8] Dmitriyev, V. P., "Herical waves on a vortex filament", *Am. J. Phys.* **73** (2005) pp. 563-565.
- [9] Shivamoggi, B. K. and van Heijst, G. J. F., "Motion of a vortex filament in the local induction approximation: Reformulation of the Da Rios-Betchov equations in the extrinsic filament coordinate space", *Phys. Lett. A.* **374** (2010) pp. 1742-1744.