

POISSON の理論的確執と一貫性
THEORETICAL DISCORD AND CONSISTENCY BY POISSON

京都大学・数理解析研究所 長期研究員 増田 茂
SHIGERU MASUDA
RESEARCH INSTITUTE FOR MATHEMATICAL SCIENCES,
KYOTO UNIVERSITY

ABSTRACT.

1. Since 1811, Poisson issued many papers on the definite integral, containing transcendental, and remarked on the necessity of careful handling to the diversion from real to imaginary, especially, to Fourier explicitly, in the rivalry of each other, both compete in the heat and heat diffusing equations.

2. On the other hand, Poisson feels incompatibility with Euler and Laplace's 'passage', on which Laplace had issued a paper in 1809, entitled : On the 'reciprocal' passage of results between real and imaginary, after presenting the sequential papers on the occurring of 'one-way' passage in 1782-3.

To these passages, Poisson proposes the direct, double integral in 1811,13,15 and 20.

In the last pages of a paper of fluid dynamics in 1831, Poisson remembers to put again the restriction, saying that the provings of eternity of time in the exact differential become necessarily defective, for it includes the series of transcendental. (§ 1, 2, 3, 5, 6)

3. As a contemporary, Fourier is made a victim by Poisson. To Fourier's main work : *The analytical theory of heat* in 1822, and to the relating papers, Poisson points the diversion applying the what-Poisson-called-it 'algebraic' theorem of De Gua or the method of cascades by Roll, to transcendental equation. Moreover, about their disputes, Darboux, the editor of *Œuvres de Fourier*, evaluates on the correctness of Poisson's reasonings in 1888. Dirichlet also mentions about Fourier's method as a sort of *singularity of passage* from the finite to the infinite. (§ 1, 3, 4, 7)

1. INTRODUCTION

1, 2, 3, 4, 5 Fourier's works are summerized by Dirichlet, a disciple of Fourier, as follows :

- a sort of *singularity of passage* from the finite to the infinite
- to offer a new example of the *prolificity* of the analytic process

The first is our topics which Fourier and Poisson point this problem in life and the other is, in other words, the sowing seeds to be solved from then on. Dirichlet says in the following contents, Fourier (1768-1830) couldn't solve in life the question in relation to the mathematical theory of heat, in *Solution d'une question relative a le théorie mathématiques de la chaleur* (The solution of a question relative to the mathematical theory of heat) [4] :

La question qui va nous occuper et qui a pour objet de déterminer le états successifs d'une barre primitivement échauffée d'une manière quelconque et dont les deux extrémités sont entretenues à des températures données en fonction de temps, a déjà été résolue par M. Fourier dans un Mémoire inséré dans le Vol. VIII de la collection de l'Académie Royale des Sciences de Paris. *La méthode dont cet illustre géomètre a fait usage dans cette recherche est une espèce singulière de passage du fini a l'infini, et offre un nouvel exemple de la fécondité de ce procédé analytique qui avait déjà conduit l'auteur à tant de résultats remarquables dans son grand ouvrage sur la théorie de la chaleur.*

Date: 2013/01/15.

¹We have showed the detail of the another heated collision between Poisson and Navier in [17].

²Basically, we treat the exponential / trigonometric / logarithmic / π / et al. / functions as the transcendental functions.

³Translation from Latin/French/German into English/Japanese mine. We state our assertion with English only.

⁴We use the underline to specify the meaning of 'root' in our problems, and the italic words to emphasize our assertion. and use the symbols § : chapter, ¶ : article of the original.

⁵To establish a time line of these contributor, we list for easy reference the year of their birth and death: Daniel Bernoulli(1700-82), Euler(1707-83), d'Alembert(1717-83), Lagrange(1736-1813), Laplace(1749-1827), Fourier(1768-1830), Gauss(1777-1855), Poisson(1781-1840), Navier(1785-1836), Cauchy(1789-1857), Dirichlet(1805-59), Stokes(1819-1903), Riemann(1826-66).

J'ai traité la même question par une analyse dont la marche differe beaucoup de celle de Fourier et qui donne lieu à l'emploi de quelques *artifices de calcul*, qui paraissent pouvoir être utiles dans d'autres recherches. [4, p.161] (Italics mine.)

Riemann studies the history of research on Fourier series up to then (*Geschichte der Frage über die Darstellbarkeit einer willkürlich gegebenen Function durch eine trigonometrische Reihe*, [39, pp.4-17].) We cite one paragraph of his interesting description from the view of mathematical history as follows :

● Fourier が熱に関する最初の論文 (21, Dec., 1807) を提出した時、ある全く任意の(グラフによる具象的な) 既知関数を三角関数の級数展開で表現させようとするものであり、最初は流石の白髪 Lagrange (当時 7 1 歳) もこの論文にかなり当惑したが、きっぱりと拒否した。● その論文は今もフランス国立文書館に収納されているという。(注 2。Dirichlet 博士の口頭報告による) ● それのため、Poisson は全体を注意深く熟読し、即座に、Lagrange の振動する弦に関する論文の一節に、ある任意の関数の記述のために三角関数の級数展開を使用している箇所があるが、そこでこの記述方法を発見したに違いないと異議申し立てた。● Fourier と Poisson の知られた対抗関係を如実に物語るこの申立ての誤りを論駁するため急いで方向転換して、Lagrange の論文にもう一度立ち返りたい ; そうすれば何一つ明らかになっていないアカデミーの中の、こうした出来事に行き着ける。 [39, p.10]

$$y = 2 \int Y \sin X \pi dX \sin x \pi + 2 \int Y \sin 2X \pi dX \sin 2x \pi + \dots + 2 \int Y \sin nX \pi dX \sin nx \pi, \quad (1)$$

● 事実、Poisson により引用された一節は (1) である事が分かる。従って、 $x = X$ とすれば、 $y = Y$ となり、 Y は横軸 X に対応する縦軸である。● この形式は確かにフーリエ級数とは全く違う ; 一見して、ある取り違えの可能性が充分にある ; しかし、それは単なる外見でしかない。何故なら Lagrange が積分記法 $\int dX$ を使っている事が (誤解される原因) だ。今日なら $\Sigma \Delta X$ の記法を使っていたら。● 彼の論文を通読すると、彼がある全く任意の関数がある無限個の sine による級数展開で任意に記述しようとしたとは信じるにはほど遠い事がわかる。 [39, pp.10-11]

Poisson mentions the universality as follows :

いつまでも得られそうにない普遍的方式の代わりに、私はこれまで取って来た最良の事は偏微分方程式を導出した力学や物理学の性質により個別に積分しようと努めた事であったと思う。これが本論文で私の言いたい目的である。 [22, p.123]

Poisson attacks the definite integral by Euler and Laplace, and Fourier's analytical theory of heat, and manages to construct universal truth in the paradigms.

One of the paradigms is made by Euler and Laplace. The formulae (3) deduced by Euler, are the target of criticism by Poisson. Laplace succeeds to Euler and states the passage from real to imaginary or reciprocal passage between two, which we mention in below.

The other is Fourier's application of the method of De Gua or cascades. The diversion from (??) to (18) is Fourier's essential tool to distinguish the root of the transcendental equations for heat theory. Dirichlet calls these passages a sort of *singularity of passage* from the finite to the infinite. cf. Chapter 1. We think that Poisson's strategy is to destruct both paradigms and make his own paradigm to establish the universal truth between mathematics and physics. We would like to show it from this point of view in our paper.

2. POISSON'S PROPOSITIONS ON THE PASSAGE FROM REAL TO IMAGINARY

Euler states the definite integral in *Supplement V to Leonhardi Euleri Opera Omnia Ser.I, XI, Sectio Prima, Caput VIII*, [5] in 1781, as follows :

4) On the definite integral of the interval of variable limit from $x = 0$ to $x = \infty$.

§124. In the following forms, the interval from $x = 0$ to $x = \infty$, the most simple case is on the circle, $\int \frac{\partial x}{(1+x)^n}$, whose value is $\frac{\pi}{2}$, where, assuming the diameter = 1, then the length of circumference is π .

Next, by the method, which is known as only one absolutely,

$$\int \frac{x^{m-1} \partial x}{(1+x)^n} \left[\begin{matrix} x=0 \\ x=\infty \end{matrix} \right] = \frac{\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}}, \quad \text{namely,} \quad \int_0^\infty \frac{x^{m-1} \partial x}{(1+x)^n} = \frac{\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}}$$

Next, our integral of problem will be

$$\int x^\lambda \partial x \cdot e^{-x} = \lambda x^{\lambda-1} \partial x \cdot e^{-x},$$

with the help of the formula : $\int_0^\infty \partial x \cdot e^{-x} = 1$, the values of sequential integrals are deduced as follows :

$$\int x \partial x \cdot e^{-x} = 1, \quad \int x^2 \partial x \cdot e^{-x} = 1 \cdot 2, \quad \int x^3 \partial x \cdot e^{-x} = 1 \cdot 2 \cdot 3, \quad \int x^4 \partial x \cdot e^{-x} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4,$$

(omitted.)

§133. If we assume $p = f \cos \theta$, $q = f \sin \theta$,

$$(p + q\sqrt{-1})^n = f^n(\cos n\theta + \sqrt{-1} \sin n\theta), \quad (p - q\sqrt{-1})^n = f^n(\cos n\theta - \sqrt{-1} \sin n\theta) \quad (2)$$

where, $\theta = \frac{q}{p}$, $f = \sqrt{p^2 + q^2}$, $\Delta = \int x^{n-1} \partial x \cdot e^{-x}$. Here, our method turns into :

$$\frac{\Delta}{p + q\sqrt{-1}} = \frac{\Delta}{f^n(\cos n\theta + \sqrt{-1} \sin n\theta)}$$

§134. At first, adding both hand-sides of the expression (2), and next, subtracting and deviding with $2\sqrt{-1}$, then we get

$$\int y^{n-1} \partial y \cdot e^{-py} \cos qy = \frac{\Delta \cos n\theta}{f^n}, \quad \text{and} \quad \int y^{n-1} \partial y \cdot e^{-py} \sin qy = \frac{\Delta \sin n\theta}{f^n}$$

These integral formulae have been left during the longest period, as the completely arbitrary numbers with respect to p and q , although we have tried it in vain, we have restricted as plus value number with respect to p . Hence, it is worthy to challenge to understand the below paired integral formulae :

We assume $\Delta = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (n-1)$, $p, q \geq 0$: arbitrary, $\sqrt{p^2 + q^2} = f$. The angle made by these values is θ or $\theta = \frac{q}{p}$. The values by remarkable integral are as follows :

$$\text{Formula 1 : } \int_0^\infty x^{n-1} \partial x \cdot e^{-px} \cos qx = \frac{\Delta \cos n\theta}{f^n}, \quad \text{Formula 2 : } \int_0^\infty x^{n-1} \partial x \cdot e^{-px} \sin qx = \frac{\Delta \sin n\theta}{f^n} \quad (3)$$

[5, p.337-343]

Poisson talks about Euler's integral method as follows :

These formulas owe to Euler, which however, he have discovered by a sort of induction based on diversion from real to imaginary ; although the induction is allowed as the discovering method, however, we must verify the result with the direct and strict method. [20, ¶ 1, p.219], cf. Chapter 2.

In 1809, Laplace publishes *Mémoire sur divers points d'analyse*, [15], in which he introduces the techniques of integral, entitled : *Sur les intégrales définies des Équations à différences partielles*. and *Sur le passage réciproque des Résultats réels aux Résultats imaginaire*. Laplace uses also the divisional integral like Euler, and from here Poisson criticizes Laplace's diversion from real to imaginary. Poisson issued *Mémoire sur les intégrales définies* [20] in 1813, in which he called our attention to induce from real to imaginary number, using the following example.

¶ 1.

$$\int e^{-bx} \cos ax x^{n-1} dx = y, \quad \int e^{-bx} \sin ax x^{n-1} dx = z, \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{da} = - \int e^{-bx} \sin ax x^n dx, \quad \frac{dz}{da} = \int e^{-bx} \cos ax x^n dx$$

$$\begin{cases} \int e^{-bx} \sin ax x^n dx = -\frac{1}{b} e^{-bx} \sin ax x^n + \frac{a}{b} \int e^{-bx} \cos ax x^{n-1} dx + \frac{n}{b} \int e^{-bx} \sin ax x^{n-1} dx, \\ \int e^{-bx} \cos ax x^n dx = -\frac{1}{b} e^{-bx} \cos ax x^n - \frac{a}{b} \int e^{-bx} \sin ax x^{n-1} dx + \frac{n}{b} \int e^{-bx} \cos ax x^{n-1} dx \end{cases}$$

where, we assume b and n positive. This value of A is independent of b , for if $bx = \theta$, then we get

$$A = b^n \int e^{-bx} x^{n-1} dx = \int e^{-\theta} \theta^{n-1} d\theta$$

Finally, we get as follows :

$$y = \frac{\cos nt}{(b^2 + a^2)^{\frac{n}{2}}} \int e^{-\theta} \theta^{n-1} d\theta, \quad z = \frac{\sin nt}{(b^2 + a^2)^{\frac{n}{2}}} \int e^{-\theta} \theta^{n-1} d\theta$$

where, t is the arc of $\tan \frac{a}{b}$, namely $t = \arctan \frac{a}{b}$. Poisson concludes we should use the *direct and vigorous method* as the following :

これらの公式は Euler に拠るものだが、彼はこれらの実数量の虚数量への流用に基づくある種の推論により見出したもので、推論は発見手段としては取り敢えず用いる事が出来るとしても、結果を直接かつ厳密な方法で確認する必要がある。私が *nouveau Bulletin* の n° 42 [19] で二重積分の考察によって証明した公式は、前例の特別な場合だけでなく、 $b = 0$ としても導出される。 [20, ¶ 1, p.219]

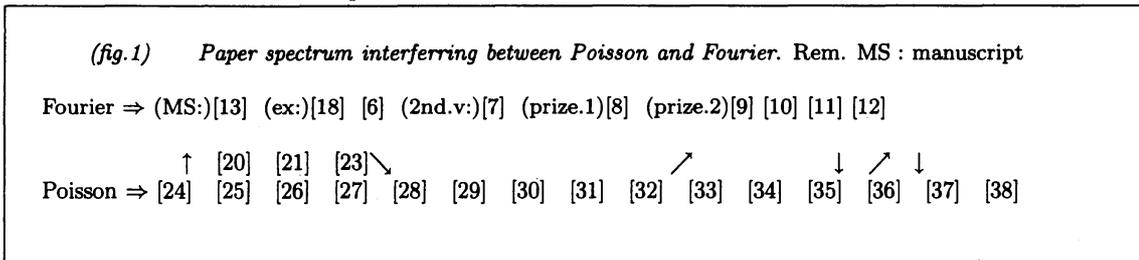
3. ARGUMENT BETWEEN FOURIER AND POISSON ON APPLYING THE THEOREM OF DE GUA TO TRANSCENDENTAL EQUATIONS

There were the strifes between Poisson and Fourier to struggle for the truth on mathematics or mathematical physics for the 23 years since 1807. Poisson [32, p.367] asserts that :

- It is not able to apply the rules served the algebra to assure that an equation hasn't imaginary, to the transcendental equation.
- Algebraic theorems are unsuitable to apply to transcendental equations.
- Generally speaking, it is not allowed to divert the theorems or methods from real to transcendental, without careful and strict handling.

On the other hand, Fourier [11, p.617] refutes Poisson :

- Algebraic equations place no restriction on analytic theorems of determinant ; It is applicable to all transcendental, what we are considering, in above all, heat theory.
- It is sufficient to consider the convergence of the series, or the figure of curve, which the limits of these series represent them in order.
- Generally speaking, it is able to apply the algebraic theorems or methods to the transcendental or all the determined equations.



4. FOURIER'S PRINCIPLE

Chapter 3. *Propagation de la chaleur dans un solide rectangulaire infini*, pp.141-238.

§6 *Développement d'une fonction arbitraire en séries trigonométriques*

¶ 219. An arbitrary function can be developed under the following form :

$$a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + a_4 \sin 4x \dots$$

Fourier states his kernel in ¶ 219 – 221. He redescribes these articles from the corresponding of his first version. He announces these correction in 'Discours Preliminaire', however, the proof is completely same with the expression of first version, except the expression (4).

$$(D) \quad \frac{\pi}{2} \varphi(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + a_4 \sin 4x \dots \tag{4}$$

¶ 221. Fourier states only from the proving of orthonormal relation, so Poisson is disapointed with the lack of vigorousness and exactitude of the very mathematical importance in the future.

Lagrange, dans les anciens Mémoires de Turin, et M. Fourier, dans ses Recherches sur la théorie de la chaleur, avaient déjà fait usage de semblés expressions ; mais il m'a semblé qu'elles n'avaient point encore été démontrées d'une manière précise et rigoureuse ; [24, ¶28, p.46]

The following are Fourier's description about the proof of trigonometric series.

On peut aussi vérifier l'équation précédente (D) (art. 219), en déterminant immédiatement les quantités $a_1, a_2, a_3, \dots, a_j, \dots$ dans l'équation

$$\varphi(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + \dots + a_j \sin jx \dots$$

pour cela on multipliera chacun des membres de dernière équation par $\sin ix dx$, i étant un nombre entier, et on prendra l'intégrale depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \pi$, on aura

$$\int \varphi(x) \sin ix dx = a_1 \int \sin x \sin ix dx + a_2 \int \sin 2x \sin ix dx + \dots + a_j \int \sin jx \sin ix dx + \dots$$

Chapter 5 *De la propagation de la chaleur dans une sphère solide*, pp 304-331.

§ 1 *Solution générale*, pp.304-316.

¶ 284. (Deduction of the determined equation of the root)

Soit $y = e^{mt}u$, u étant une fonction de x , on aura $u = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. On voit d'abord que, la valeur de t devenant infinie, celle de v doit être nulle dans tous les points, puisque le corps est entièrement refroidi. On ne peut donc prendre pour m qu'une quantité négative. Or k a une valeur numérique positive ; on en conclut que la valeur de u dépend des arcs de cercle, ce qui résulte de la nature connue de l'équation $mu = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Soit $u = A \cos nx + B \sin nx$, on aura cette condition $m = -kn^2$. Ainsi l'on peut exprimer une valeur particulière de v par l'équation

$$v = \frac{e^{-kn^2 t}}{x} (A \cos nx + B \sin nx) \quad (5)$$

n est un nombre positif quelconque, et A et B sont des constantes. On remarquera d'abord que la constante A doit être nulle ; car lorsqu'on fait $x = 0$, la valeur de v , qui exprime la température du centre, ne peut pas être infinie ; donc la terme $A \cos nx$ doit être omis.

Du plus, le nombre n ne peut pas être pris arbitrairement. En effet, si, dans l'équation déterminée

$$\frac{\partial v}{\partial x} + hv = 0 \quad (6)$$

on substitue la valeur de v , on trouvera

$$nx \cos nx + (hx - 1) \sin nx = 0 \quad (7)$$

Comme l'équation doit avoir lieu à la surface, on y supposera $x = X$, rayon de la sphère, ce qui donnera $\frac{nX}{\tan nX} = 1 - hX$. Soit λ le nombre $1 - hX$ et posons $nX = \varepsilon$, on aura $\frac{\varepsilon}{\tan \varepsilon} = \lambda$. Il faut donc un arc ε qui, divisé par sa tangente, donne un quotient connu λ , et l'on prendra $n = \frac{\varepsilon}{X}$. Il est visible qu'il y a une infinité de tels arcs, qui ont avec leur tangente un rapport donné ; en sorte que l'équation de condition $\frac{nX}{\tan nX} = 1 - hX$ a une infinité de racines réelles. [2, ¶ 284, pp.305-6]

After supposing $A = 0$ of (5), Fourier substitutes $v = \frac{e^{-kn^2 t}}{x} (\sin nx)$ for (6), then gets the equation (7).

¶ 288. The equation of real root as 'procédé d'approximation'. Fourier proposes the method, which is nearly the what is called Newton approximation or the Newton method. We iterate the approaching by differentiation until we get the root of the crossing point made with the tangent and the curve : $x_{\nu+1} = x_{\nu} - \frac{f(x_{\nu})}{f'(x_{\nu})}$, $f'(x_{\nu}) \neq 0$.

La règle que l'on vien d'exposer pouvant s'appliquer au calcul de chacune des racines de l'équation

$$\frac{\varepsilon}{\tan \varepsilon} = 1 - hX, \quad (8)$$

qui ont d'ailleurs des limits données, on doit regarder toutes ces racines comme des nombres connus. Au reste, il était seulement nécessaire de se convaincre que l'équation a une infinité de racines réelles. On a rapporté ici ce procédé d'approximation, parce qu'il est fondé sur une construction remarquable qu'on peut employer utilement dans plusieurs cas, et qu'il fait connaitre sur-le-champ la nature et les limits des racines ; mais l'application qu'on ferait de ce procédé à l'équation dont il s'agit serait beaucoup trop lente ; il serait facile de recourir dans la pratique à une autre *méthode d'approximation*. [2, ¶ 288, p.311]

¶ 291. (Heat diffusion equation in the sphere.)

La fonction arbitraire $F(x)$ entre dans chaque coefficient sous le signe de l'intégration et donne à la valeur de v toute la généralité que la question exige ; on parvient ainsi à l'équation suivante :

$$\frac{xv}{2} = \frac{\sin n_1 x \int xF(x) \sin n_1 x dx}{X - \frac{1}{2n_1} \sin 2n_1 X} e^{-kn_1^2 t} + \frac{\sin n_2 x \int xF(x) \sin n_2 x dx}{X - \frac{1}{2n_2} \sin 2n_2 X} e^{-kn_2^2 t} + \dots \quad (9)$$

Telle est la forme que l'on doit donner à l'intégrale générale de l'équation

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{2}{x} \frac{\partial v}{\partial x}$$

pour qu'elle représente le mouvement de la chaleur dans la sphère solid. En effet, toutes les conditions de la question seront remplies :

1. L'équation aux différences partielles sera satisfaite.
2. La quantité de la chaleur qui s'écoule à la surface conviendra à la fois à l'action mutuelle des dernières couches et à l'action de l'air sur la surface, c'est-à-dire que l'équation $\frac{\partial v}{\partial x} + hv = 0$, à laquelle chacune des parties de la valeur de v satisfait lorsque $x = X$, aura lieu aussi lorsqu'on prendra pour v la somme de toutes ces parties.
3. La solution donnée conviendra à l'état initial lorsqu'on supposera le temps nul. [2, ¶ 291, p.314-5]

§ 2 *Remarques diverses sur cette solution*, pp.317-334.

¶ 305. (The proof of the equation (8) has only real roots.)

L'usage que l'on a fait précédemment de l'équation

$$\frac{\varepsilon}{\tan \varepsilon} = \lambda \quad (10)$$

est fondé sur une construction géométrique qui est très propre à expliquer la nature de ces équations. En effet, cette construction fait voir clairement que toutes les racines sont réelle ; en même temps elle en fait connaître les limites et indique les moyens de déterminer la valeur numérique de chacune d'elle. L'examen analytique des équations de ce genre donnerait les mêmes résultats. On pourra d'abord reconnaître que l'équation précédente, dans laquelle λ est un nombre connu, moindre que l'unité, n'a aucune racine imaginaire de la forme $m + n\sqrt{-1}$. Il suffit de substituer au lieu de ε cette dernière quantité, et l'on voit, après les transformations, que le premier membre ne peut devenir nul lorsqu'on attribue à m et n de valeur réelles, à moins que n soit nulle. (Here, Darboux comments as we show bellow.) On démontre aussi qu'il ne peut y avoir dans cette même équation

$$\varepsilon - \lambda \tan \varepsilon = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{\varepsilon \cos \varepsilon - \lambda \sin \varepsilon}{\cos \varepsilon} = 0$$

aucune racine imaginaire, de quelque forme que ce soit. En effet :

1. les racines imaginaires du facteur $\frac{1}{\cos \varepsilon} = 0$ n'appartiennent point à l'équation $\varepsilon - \lambda \tan \varepsilon = 0$, puisque ces racines sont toutes de la forme $m + n\sqrt{-1}$;
2. l'équation $\sin \varepsilon - \frac{\varepsilon}{\lambda} \cos \varepsilon = 0$ a nécessairement toutes ses racines réelles lorsque λ est moindre que l'unité.

Pour prouver cette dernière proposition, il faut considérer $\sin \varepsilon$ comme le produit d'une infinité de facteurs, qui sont

$$\varepsilon \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2^2 \pi^2}\right) \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{3^2 \pi^2}\right) \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4^2 \pi^2}\right) \dots$$

est considérer $\cos \varepsilon$ comme dérivant de $\sin \varepsilon$ par la différentiation. On supposera qu'au lieu de former $\sin \varepsilon$ du produit d'un nombre infini de facteurs on emploie seulement les m premiers, et que l'on désigne le produit par $\varphi_m(\varepsilon)$. Cela posé, on aura l'équation

$$\varphi_m(\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{\lambda} \varphi'_m(\varepsilon) = 0.$$

Or, en donnant au nombre m ses valeurs successives 1, 2, 3, ... depuis 1 jusqu'à l'infini, on reconnaîtra, par les principes ordinaires de l'Algèbre, la nature des fonctions de ε qui correspondent à ces différentes valeurs de m . On verra que, quel que soit le nombre m des

facteurs, les équations en ε qui en proviennent ont les caractères distinctifs de celles qui ont toutes leurs racines réelles. De là on conclut rigoureusement que l'équation (10) dans laquelle λ est moindre que l'unité, ne peut avoir aucune racine imaginaire. Cette même proposition pourrait encore être déduite d'une analyse différente que nous emploierons dans un des Chapitres suivants. [2, ¶305, pp.329-330]

G. Darboux remarks that the description above following from (10) is not exact, and Fourier's description has many mistakes in the following articles.

§ 6 *De mouvement de la chaleur dans un cylindre solide*, pp.332-358

Fourier deduces solution of the heat equation from the general solution summed particular solutions by using integral. From here, we see that our problems discussing between Poisson and Fourier is not only the problem on the roots of the solution, but also the problem of integral of the equations.

¶ 308. (Application of the theorem of De Gua to transcendental equation.)

$$y = f(\theta) = 1 - \theta + \frac{\theta^2}{(2!)^2} - \frac{\theta^3}{(3!)^2} + \frac{\theta^4}{(4!)^2} - \dots = 0, \Rightarrow y + \frac{dy}{d\theta} + \theta \frac{d^2y}{d\theta^2} = y - y + \theta y = 0 \quad (11)$$

$$y + \frac{dy}{d\theta} + \theta \frac{d^2y}{d\theta^2} = 0, \quad \frac{dy}{d\theta} + 2 \frac{d^2y}{d\theta^2} + \theta \frac{d^3y}{d\theta^3} = 0, \quad \frac{d^2y}{d\theta^2} + 3 \frac{d^3y}{d\theta^3} + \theta \frac{d^4y}{d\theta^4} = 0, \dots$$

et, en générale,

$$\frac{d^i y}{d\theta^i} + (i+1) \frac{d^{i+1} y}{d\theta^{i+1}} + \theta \frac{d^{i+2} y}{d\theta^{i+2}} = 0$$

Or,

- si l'on écrit dans l'ordre suivant l'équation algébrique $X = 0$ et toutes celles qui en dérivent par la différentiation $X = 0$, $\frac{dX}{dx} = 0$, $\frac{d^2X}{dx^2} = 0$, $\frac{d^3X}{dx^3} = 0$, ...
- et si l'on suppose que toute racine réelle d'une quelconque de ces équations, étant substituée dans celle qui la précède et dans celle qui la suit, donne deux résultants de signe contraire, il est certain

- que la proposée $X = 0$ a toutes ses racines réelle,

- et que, par conséquent, il en est de même de toutes ses équations subordonnées $\frac{dX}{dx} = 0$, $\frac{d^2X}{dx^2} = 0$, $\frac{d^3X}{dx^3} = 0$, ... ,

ces propositions sont fondées sur la théorie des équations algébriques et ont été démontrées depuis longtemps. [2, ¶ 308, pp.335-7]

To prove having root only real and positive, Fourier summarizes as follows :

Il suffit donc de prouver que les équations $y = 0$, $\frac{dy}{d\theta} = 0$, $\frac{d^2y}{d\theta^2} = 0$, ... , remplissant la condition précédente. Or cela suit de l'équation générale

$$\frac{d^i y}{d\theta^i} + (i+1) \frac{d^{i+1} y}{d\theta^{i+1}} + \theta \frac{d^{i+2} y}{d\theta^{i+2}} = 0$$

car, si l'on donne à θ une valeur positive qui rend nulle la fluxion⁶ $\frac{d^{i+1} y}{d\theta^{i+1}}$, les deux autres termes $\frac{d^i y}{d\theta^i}$ et $\frac{d^{i+2} y}{d\theta^{i+2}}$ recevront des valeurs de signe opposé. A l'égard des valeurs négatives de θ , il est visible, d'après la nature de la fonction $f(\theta)$, qu'aucune quantité négative mise à la place de θ ne pourrait rendre nulle ni cette fonction, ni aucune de celles qui en dérivent par la différentiation ; car la substitution d'une quantité négative quelconque donne à tous les termes le même sign. Donc on est assuré que l'équation $y = 0$ a toutes ses racines réelles et positives. [2, ¶ 308, pp.335-7]

Darboux, the editor of "*Œuvres de Fourier*", comments and aids Fourier as the progenitor of this sort of problems :

Dans le XIX^e Cahier du *Journal de l'Ecole Polytechnique*, page 382, Poisson présente à ce sujet quelques remarques critiques qui paraissent justifiées. Il ne faudrait pas conclure des remarques précédentes que la théorème de Fourier ne peut être d'aucune utilité dans l'étude des équations transcendentes. Convenablement appliqué, il joue, au contraire, dans la résolution de ces équations, un rôle très important que Fourier a été

⁶Ratio of flux, which is the technical term used by Newton's differential and integral method.

le premier à signaler. On s'en assurera aisement en relisant divers passages de l'Ouvrage que nous avons cité plus baut. G.D. [2, ¶ 308, p.336, footnote].

5. POISSON'S HEAT THEORY IN RIVALRY TO FOURIER

Poisson [24] traces Fourier's work of heat theory, from the another point of view. Poisson emphasizes, in the head paragraph of his paper, that although he totally takes the different approaches to formulate the heat differential equations or to solve the various problems or to deduce the solutions from them, the results by Poisson are coincident with Fourier's.

私が展開しようとする問題は、最初は 1812 年に Fourier 氏に授けられた学士院の第一位の懸賞の懸かった主題であった。懸賞論文は書記局に保管され私も閲覧出来る：私はこの論文を通して私より前に得た基本的な諸結果を指摘するのに細心の注意を払った；私は初めに次の事を言いたい。例として挙げた全ての特殊問題に関しては、私の本論文中の各式は Fourier 氏が出したものと全く一致する。しかし、二つの論文で共通なのはそれだけだ。何故なら、

- 熱の微分方程式を定式化するため、
- それらを解決したり個々の問題の解を得るため、

Fourier 氏とは全面的に異なる方法を取ったからだ。 [24, pp.1-2]

Poisson points out the various difficulties of Fourier's applying to the physical problems :

En adoptant celle qui réduit la sphère d'activité de ce rayonnement à une étendue insensible, j'ai formé l'équation différentielle du mouvement de la chaleur dans l'intérieur d'un corps hétérogène, pour lequel la chaleur spécifique et la conductibilité varient d'une manière quelque d'un point à un autre. Dans le cas particulier de l'homogénéité, cette équation coïncide avec celle de M. Fourier a donnée la premier dans le mémoire cité, en la déduisant de l'action des élémens contigus du corps, ce qui n'a pas paru exempt de *difficulté*. Outre cette équation, comme à tous les points du corps, il en existe une autre qui n'appartient qu'aux points de la surface supposée rayonnante, et que M. Fourier a également donnée. [24, p.6] (*Italics mine.*)

Poisson [24] considers the proving on the convergence of series of periodic quantities by Lagrange and Fourier as the manner lacking the exactitude and vigorousness, and wants to make up to it.

Dans le mémoire cité dans ce n.^o, j'ai considéré directement les formules de cette espèce qui ont pour objet d'exprimer des portions de fonctions, *en séries de quantités périodiques*, dont tous les termes satisfont à des conditions données, relatives aux limites de ces fonctions. Lagrange, dans les anciens Mémoires de Turin, et M. Fourier, dans ses Recherches sur la théorie de la chaleur, avaient déjà fait usage de semblables expressions ; mais il m'a semblé qu'elles n'avaient point encore été démontrées d'une manière précise et rigoureuse ; et c'est à quoi j'ai tâché de suppléer dans ce Mémoire, par rapport à celles de ces formules qui se présentent le plus souvent dans les applications. [24, §2, ¶28, p.46] (*Italics mine.*)

Poisson proposes the different and complex type of heat equation with Fourier's (a)_P. For example, we assume that interior ray extends to sensible distance, which forces of heat may affect the phenomina, the terms of series between before and after should be differente.

¶47 (Heat equations by Poisson)

On aura enfin

$$(a)_P \quad \frac{du}{dt} = a^2 \left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} \right) \quad (12)$$

pour l'équation différentielle du mouvement de la chaleur dans l'intérieur de la masse du corps que l'on considère. [24, §5, ¶47, p.82]

Poisson concludes on this question, priding himself on the originality of proof and defending himself on the lack of exactitude : To get the root of this equation, Poisson introduces two methods to distinguish the root of a transcendental equation :

¶68 (Definition of the method of cascades by Poisson.)

Euler a démontré que les équations $\sin x = 0$, $\cos x = 0$, n'ont pas de racines imaginaires : d'ailleurs on s'assure aisément, à l'égard de ces équations fort simples, que l'on n'y peut pas satisfaire en prenant $x = p + q\sqrt{-1}$, à moins qu'on n'ait $q = 0$; mais il n'en est pas de même ; dès qu'il s'agit d'une équation transcendante un peu compliquée ; et d'un autre côté, les règles que les géomètres ont trouvées pour s'assurer, à *priori*, de

la réalité de toutes les racines d'une équation donnée, ne conviennent qu'aux équations algébriques, et ne sont point applicables en général aux équation transcendantes. En effet, ces règles se réduisent à deux :

- l'une est celle que *Lagrange* a donnée, d'après la consideration de l'équation *aux carrés des différences* ; équation que l'on peut regarder comme impossible à former, dans le cas des équations transcendantes :
- l'autre règle se déduit de l'ancienne méthode proposée pour la résolution des équations numériques, et connue sous le nom de *méthode des cascades* ; en voici l'énoncé le plus général. [27, pp.381-2]

Poisson explains the *méthode des cascades* as follows :

即ち、 $X = 0$ がある n 次の代数方程式である時、 $n-1$ 回の微分で常に実根しか持たない $X^{(n-1)} = 0$ となるのは、それが一次であるからだ：その前述の規則が代数方程式に適用可能なのはこの状況である。しかし、 $X = 0$ は任意の超越方程式であり、 $X' = 0$, $X'' = 0, \dots$ などの方程式等はこの手の性質を持った全ての方程式である；それでその規則はもはや適用出来なくなろう。少なくとも、極めて特殊な場合、この方程式の級数が一通りでなく、全ての根が実数であると分かっているような、 $\sin x = 0$ とか $\cos x = 0$ とかで構成されている場合である。 [27, pp.381-2]

Il est à remarquer que lors même qu'on aurait prouvé, d'après, la forme ou quelque propriété d'une équation transcendante $X = 0$, que l'on a $X \cdot X''$ négatif pour $X' = 0$, $X' \cdot X'''$ négatif pour $X'' = 0$, $X'' \cdot X^{(4)}$ négatif pour $X''' = 0$, et ainsi de suite jusqu'à l'infini, on n'en pourrait pas conclure que cette équation $X = 0$ n'ait pas de racines imaginaires. [27, pp.382-3]⁷

Here, Poisson puts a very simple example of transcendental equation and iterates the differential :

$$X = e^x + be^{ax} = 0 \quad (13)$$

where, we assume $a > 0$ and b : an arbitrary, given quantities. The equation of an arbitrary degree with respect to i is also

$$X^{(i)} = e^x + be^{ax} = 0, \quad X^{(i-1)} = ba^{i-1} \cdot e^{ax}(1-a) = 0, \quad X^{(i+1)} = ba^i \cdot e^{ax}(a-1) = 0, \\ X^{(i-1)} \cdot X^{(i+1)} = -b^2 a^{2i-1} \cdot e^{2ax}(1-a)^2 = 0 \quad (14)$$

⁸ Finally, Poisson concludes : the transcendental equation of example (13) has numberless imaginaries : if $b < 0$, (13) has only real root, and if $b > 0$ no root. [27, p.383].

G.Darboux comments if $b \leq 0$, (13) has only real root, it is true, however, Poisson doesn't put the case of $b = 0$. cf. Chapter 6. Poisson's footnote of this paragraph is followed, which remarks about the transference of the algebraic equations to transcendental equations :

私は嘗て、代数から求められた規則を虚数根を持たない超越方程式に適用することは一般的に出来ない事について注意を促す機会があった。また、破綻する場合についてのある例を挙げた。(Journal de l'École Polytechnique, 19^e Cahier, page 382)。⁹これらの規則は、全ての根が実数であることがわかっている方程式をある十分な回数微分を想定している。それらは結局、以下のようなある方程式で、多くの物理学の問題に出てくる方程式(15)とすべきである；だから、際限なく微分する事によって、我々がある一次方程式から要求しようとするものと少しも違わない結果に達することになる。同じ事が $\sin x = 0$, $\cos x = 0$ と関係する方程式に関してや、初期温度が中心からの等距離で同じであろうと、半径とかの何らかの方法で変化を受けようが、球の中の熱分布問題で生じるどんな問題に関して絶対的に何一つ証明していないだろう。 [32, pp.367-8]

$$1 - x + \frac{x^2}{(2!)^2} - \frac{x^3}{(3!)^2} + \frac{x^4}{(4!)^2} - \dots = 0 \quad (15)$$

6. POISSON'S REFUTATION TO FOURIER'S DEFECT

Poisson issued *Note sur les racines des équations transcendantes*, [35] in 1830, in which he points out Fourier's defect of description of the roots of transcendental equations in *Théorie analytique de la chaleur*, [2, p.335] issued in 1822. Fourier may be felt hurt by this problem with Poisson, and moreover, it seems that such collisions in opinion disturb to evaluate Poisson of today.

⁷Poisson conjectures the defect of proof in the case of series consisted of exact differential. cf. Chapter ??.

⁸This equation (14) is the same as (16).

⁹Poisson [29], JEP 12 (1823), 405-509. There is a gap of citation of pages.

Fourier 氏の場合は、数学者達が代数方程式で実根の存在を知るために見つけた規則を超越方程式にも適用している。元々、De Gua の定理は古い cascades の方法を基礎とする。ある任意の次数の代数方程式の根が全て実根である事を確認出来る事に倣って、超越方程式の場合でも同じ効用があるものと考えている。私の熱分布に関する第 2 論文でその定理は破綻する好例に根拠を置いた反論を書いた。 [35, pp.90-1]

Poisson's description mismatches with Fourier. Poisson [35] states this contradiction in the case of transcendental equations as follows : we assume a, b given constants, $x \in \mathbb{R}$. We remark that, in this paper, he omits to state the detail condition of a and b . It seems to that he reconsiders it from the other analysis. (cf. [27, pp.383].) Anyway, we get the following (16), according to the same process as (14).

$$\frac{d^n X}{dx^n} \cdot \frac{d^{n+2} X}{dx^{n+2}} = -b^2(1-a)^2 a^{2n+1} e^{2ax}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (16)$$

From $X = 0$, we also get $\frac{d^n X}{dx^n} = e^x - ba^n e^{ax} = 0$. Finally, he deduces an imaginary root of the real part : $x = \frac{\log ba^n}{1-a}$ and the infinite imaginary part : $x = \frac{2m\pi}{1-a} i, m \in \mathbb{Z}$ or $0, i = \sqrt{-1}$.

Donc toute racine réelle de l'équation intermédiaire $\frac{d^{n+1} X}{dx^{n+1}} = 0$, étant substituée dans les deux équations adjacentes $\frac{d^n X}{dx^n} = 0$ et $\frac{d^{n+2} X}{dx^{n+2}} = 0$, donnera des results de signe contraire; donc d'après la règle de M. Fourier, l'équation $e^x - be^{ax} = 0$, et toutes celles qui s'en déduisent par différentiation, devraient avoir toutes leurs racines réelles; et, au contraire, chacune de ce équations a une seule racines réelle et une infinité de racines imaginaires, comprises sous la forme :

$$x = \frac{\log ba^n + 2i\pi\sqrt{-1}}{1-a}$$

π désignant le rapport de la circonférence au diamètre, et i étant une nombre entier ou zéro. ... J'avais pensé que les équations transcendentes semblables à celle-ci :¹⁰

$$1 - x + \frac{x^2}{(2!)^2} - \frac{x^3}{(3!)^2} + \frac{x^4}{(4!)^2} - \dots = 0 \quad (17)$$

pourraient être assimilées aux équations algébriques, à cause de l'accroissement des dénominateurs qui permettrait de négliger les termes d'un rang très-éloignés¹¹. Mais en y réfléchissant de nouveau, j'ai reconnu que cette considération ne serait pas satisfaisant.¹² En effet, l'équation différentielle de l'ordre n serait, dans cet exemple,

$$1 - \frac{x}{1 \cdot n + 1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2 \cdot n + 1 \cdot n + 2} - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot n + 1 \cdot n + 2 \cdot n + 3} + \dots = 0$$

or, quelque grand que soit n , on ne pourrait pas la réduire à ses premiers termes, parce que les valeurs de x qui s'en déduisent sont aussi très-grandes et comparables à n . [35, pp.92-5]

After Poisson [34],¹³ continuously, Poisson appends his opinion about proof of exact differential in the last pages of [36, pp.173-4]. His conjecture is based on the preceding analysis in [27, pp.382-3]. cf. Chapter 5.

The proof of the conservation in time and space of an exact differential was discussed by Lagrange, Cauchy, Stokes, and others. The herein-called "Poisson conjecture" in 1831, cited in the Introduction as one of our main motivations for this study, It had its beginnings with the incomplete proof by Lagrange [14]. However, thereafter, Cauchy [1] had presented a proof as early as 1815, while Power and Stokes [40] had tried by other methods. To date Cauchy's proof is still considered to be the best. Poisson concludes the proof is defect, and even the equation made of tencscendentals satisfy with exact differential at the original time of movement, the equations satisfy no more with it during all the time:

¹⁰This (17) equals to (15). This series are the similar to transcendental equations : e^x or e^{-x^2} , what we know, the following formulae :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{(2!)^2} + \frac{x^3}{(3!)^2} + \frac{x^4}{(4!)^2} + \dots, \quad e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{(2!)^2} - \frac{x^6}{(3!)^2} + \frac{x^8}{(4!)^2} - \dots$$

¹¹Mémoires de l'Académie, tome VIII, page 367. sic. Poisson [32]

¹²Fourier points out Poisson's withdrawal of this expression (17) in Fourier [12, p.126].

¹³This note's accepted date is signed as Lu : 2/mars/1829.

Mais la démonstration qu' on donne de cette proposition suppose que les valeurs de u , v , w , doivent satisfaire non seulement aux équations différentielles du mouvement, mais encore à toutes celles qui s'en déduisent en les différentiant par rapport à t ; ce qui n'a pas toujours lieu à l'égard des expressions de u , v , w , en séries d'exponentielles et de sinus ou cosinus dont les exposans et les arcs sont proportionnelles au temps ; et la démonstration étant alors *en défaut*, il peut arriver que la formule $udx + vdy + wdz$ soit une différentielle exacte à l'origine du mouvement, et qu'elle ne soit plus à toutes autre époque. Nous en donnerons des exemples et nous développerons davantage cette remarque dans la applications que nous ferons par la suite, des fomules de ce mémoire à différentes questions. [36, ¶73. pp.173-4] (*Italic mine.*)

7. FOURIER'S DEFENSE AND ENHANSEMENT OF HIS THEORY

In 1824, Fourier [10] examined various roots of real or imagibnary root for practical heat problems. In his title, he seems to emphasize the *qui dépendent de la théorie de la chaleur*. Namely he considers it is roots 'depending on' or 'relating to' just the heat theory. And he assures, according to our demonstration, all the roots are reals.

Les coefficients k , c , d représentent respectivement la conducibilité de chaleur, la densité; X est le rayon total de sphère, x est la rayon de la couche sphérique dont on vent déterminer la température v , et t mesure le temps écoulé depuis l'instant où le refroidissement commence, jusqu'à l'instant où la température prend la valeur désignée par v . [10, p.613-4]

Nous avons rapporté plus haut la solution que l'on trouve en intégrant les équations du mouvement de la chaleur dans la sphère ; mais nous avons réduit cette solution au cas où la surface est assujettie dans tous les points à une température constante zéro. On a vu comment la formule ainsi réduit s'accorde avec le théorème général que l'on vient de démontrer. On peut aussi considérer les cas plus général où la chaleur du solide se dissipe à travers la surface dans un milieu dont la température est constante. On attribuera au coefficient qui mesure la conducibilité extérieure une valeur déterminée H , et l'on aura pour exprimer les températures variables du solide l'équation suivante :

$$(1) \quad v = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin(n_i x)}{x} \frac{e^{-\frac{k}{cd} n_i^2 t}}{X - \frac{1}{2n_i} \sin(2 n_i X)} \int_0^X d\alpha \alpha F_\alpha \sin(n_i \alpha), \quad (2) \quad \frac{n_i X}{\tan(n_i X)} = 1 - \frac{H}{k} X \quad (18)$$

Les quantités x , v , t , k , c , d , ont la même signification que dans l'article précédent. Le coefficient H exprime la conducibilité de la surface relative au milieu dont la température constante est zéro. La fonction F_α représente, comme nous l'avons dit, le système des températures initiales. L'équation (2) donne pour la valeur de n_i , une infinité de racines, et nous avons démontré plusieurs fois, soit par le calcul, soit par des considérations propres à la théorie de la chaleur, que toutes ces racines sont réelles ; la température variable v est la double de la somme de tous les termes dont la valeur est indiquée. [10, p.622]

Here, (18) comes from (9) and (8) in the main work, respectively.

In 1829, Fourier published 'Mémoire' [11] using the same title with [2]. It may be he tries to enhance his theory.

¶ 1. *Objet de la question, formule qui en donne la solution.* (The object of the problem, the formula which gives the solution.) Fourier says : I don't talk about here the fundamental problems of heat equations. There were several years since the equations did a service to the calculation. Or, we are doubted that the mathematic analysis allow to apply this genre of phenomina. In reply to Poisson, Fourier discusses this problem.

唯単に計算原理だけに基ずいた抽象的定理だと謂う彼 (Poisson) の意見にも考慮する事は有益だろう。それでこの観点から別の研究¹⁴の中でそれを提案した。しかし、この問題は慎重な配慮がなされていないまま、根本的な提案に疑義を挟んで、この超越方程式が虚根を持つ事に数年間かかりきりだった。指摘を受けてやっと正しいと分かったのだ。今は色々な証明を提案することだけにとどめよう。実を言えば、この定理は大部分の数学的真理と共に良く知られた事だし、昔¹⁵、勉強したも

¹⁴It may be Fourier [10], which proposed in 1824, the time appeared in the bottom of [10, p.617].

¹⁵cf [12, p.127]. In this paper Fourier cites his papers :

ので、そのためそれらを証明する事を加える位は簡単に出来る。 [12, p.127].

L'application que j'ai faite de cette analyse a donné lieu (19^e Cahier de l'École polytechnique, page 382, 383),¹⁶ à des objections qu'il m'avait paru inutile de réfuter, parce qu'aucun des géomètres qui ont traité depuis des questions analogues ne s'arrêta à ces objections : mais comme je les trouve reproduites dans le nouveau volume de la collection de nos Mémoires (tom. VIII, nouveaux Mémoires de l'Académie des sciences, Mémoires sur l'équilibre et le Mouvement des Corps élastiques page 11),¹⁷ cette réputation est devenue en quelque sorte nécessaire, je l'ai donc insérée dans un article du présent Mémoire. Elle a pour objet de prouver que l'exemple cité par M. Poisson (l'École polytechnique, 19^e Cahier, page 383), en alléguant que dans ce cas l'application du théorème serait fautive, donne au contraire une conclusion conforme à la proposition générale. [11, pp.616-7] (Italic mine.)

非難の顛りは2点から生じる。1点目は著者 (Poisson) が関数 e^x あるいは $(1 + \frac{x}{n})^n$ (ここに n は無限) についての無数の等しい因子を全然考慮していない事、2点目は定理の文脈で、'real' という語が「現実の」という意味を表すという事を忘れていた事だ。(*Théorie de la chaleur*, page 373, 及び page 380, art. 312 を参照せよ。)¹⁸

In 1830, Fourier published the *Remarques* [12], which may be the last paper to Poisson in life, after only 7 days since Poisson's proposal [35], in which Fourier says : (Remark. We counter and show the paragraph number instead of the article number, for the article number is none in his paper.)

¶ 10. Fourier states his same theory in ¶308 of the main work. cf. ¶308 in Chapter 4.

Pour établir cette conséquence, nous allons rappeler le calcul même qui est employé par l'auteur : et afin de rendre les expressions plus simples, sans altérer en rien les conclusions que l'on en déduit, nous considérerons seulement l'équation $e^x - e^{ax}$. Le lecteur pourra s'assurer facilement qu'il n'y a ici aucune différence entre les conséquences qui conviennent à l'équation $e^x - be^{ax}$, a et b étant positifs, et celles que l'on déduirait de l'équation très-simple $e^x - e^{2x} = 0$.

Écrivant donc

$$X = e^x - e^{2x} = 0 \Rightarrow \frac{d^n X}{dx^n} = e^x - 2^n e^{2x}, \quad \frac{d^{n+1} X}{dx^{n+1}} = e^x - 2^{n+1} e^{2x}, \quad \frac{d^{n+2} X}{dx^{n+2}} = e^x - 2^{n+2} e^{2x},$$

et posant l'équation $\frac{d^{n+2} X}{dx^{n+2}} = 0$, ou $e^x - 2^{n+1} = 0$, $e^{2x} = 0$, on en tire la valeur de e^x pour la substituer dans les deux valeurs de $\frac{d^n X}{dx^n}$ et $\frac{d^{n+2} X}{dx^{n+2}}$. Par cette élimination, on trouve

$$\frac{d^n X}{dx^n} = 2^n e^{2x}, \quad \frac{d^{n+2} X}{dx^{n+2}} = -2^{n+1} e^{2x}, \quad \text{et} \quad \frac{d^n X}{dx^n} \cdot \frac{d^{n+2} X}{dx^{n+2}} = -2^{2n+1} e^{4x} \quad (19)$$

l'on détermine la valeur du produit $\frac{d^n X}{dx^n} \cdot \frac{d^{n+2} X}{dx^{n+2}}$, qui est $-2^{2n+1} e^{4x}$.¹⁹ L'auteur en conclut que toute racine réelle de l'équation intermédiaire $\frac{d^{n+1} X}{dx^{n+1}}$, étant substituée dans l'équation qui précède et dans cette qui suit, donne deux résultats de signes contraires : c'est cette conclusion que l'on ne peut pas admettre.

En effet, si, la valeur réelle de x qui rend nulle la fonction intermédiaire $e^x - 2^{n+2} e^{2x}$, réduit à zéro le facteur e^x commun aux deux termes, cette même valeur de x étant substituée dans la fonction qui précède, savoir $e^x - 2^n e^{2x}$, et dans celle qui suit, savoir $e^x - 2^{n+1} e^{2x}$, réduira l'une et l'autre à zéro. Les deux résultats ne sont donc point de signes différents, ils sont les mêmes. Pour que l'un des résultats fût positif et l'autre négatif, il faudrait ne considérer parmi les racines réelles de l'équation $e^x - 2^{n+1} e^{2x} = 0$, que celles de ces racines qui ne rendent point nul le facteur e^x . [12, pp.122-4] (Italic mine.)

J'ai publiés, il y a plusieurs années, dans un Mémoire spécial (Bulletin des Sciences, Société Philomatique, années 1818, page 61, et 1820, page 156).

¹⁶Poisson [32, pp.367-8]. Fourier's citation of pages 382-3 are same with the pages 367-8 by Poisson. cf. We show the pages 367-8 in above [32, pp.367-8].

¹⁷Poisson [32], pp.357-355. The page 11 corresponds to 357+10=367. cf. Footnote of p.367.

¹⁸In 1824, Fourier [10], published in 1827, examined various roots of real or imaginary root for practical heat problems. For this fact, we choose the corresponding Japanese word : '現実の'.

¹⁹cf. Poisson's assertion : (16).

Here, Fourier's assertion is that if we assume the intermediate function $\frac{d^{n+1}X}{dx^{n+1}}$ zero, then the common term $e^x = 0$. We substitute this same value for the two equations before and after of this intermediate function, then have zeros which are the same sign each other as follows : Then both equations of (19) are zeros and have the same sign respectively.

¶ 19. Fourier remarked, taking 'another principles' and devoting himself entirely 'several years' to improve further the method of De Gua and Roll as follows :

Quant aux principes que j'ai suivis pour résoudre les équations algébriques, ils sont très-différents de ceux qui servent de fondement aux recherches de de Gua ou à la méthode des cascades de Rolle. L'un et l'autre auteur ont cultivé l'analyse des équations ; mais ils n'ont point résolu la difficulté principale, qui consiste à distinguer les racines imaginaires. (omitted.) J'ai traité la même question par d'autres principes, dont l'auteur de objection parait n'avoir point pris connaissance. J'ai publiés, il y a plusieurs années, dans un Mémoire spécial (Bulletin des Sciences, Société Philomatique, années 1818, page 61, et 1820, page 156.) [12, p.127] (Italic mine.)

8. CONCLUSIONS

(1) We must consider our problem as the totality among the definite integral, the trigonometric series, etc., for Poisson's objection to Fourier is relating to the universal and fundamental problem of analytics, as we show Poisson's analytical/mathematical thought or sight in the Chapter 1, 5, etc. (2) Fourier's theoretical works in life are : theorem on the discriminant of number and range of real root, heat and diffusion theory and equations, practical use of transcendental series, theoretical reasons to the wave and fluid equations and many seeds to be done in the future as like Dirichlet's expression : to offer a new example of the *prolificity* of the analytic process. (3) To Fourier's method : we think, a rough-and-ready method for prompt application by request from physic/mathematics. Poisson's objections are very useful for Fourier to prove the series theory, however, in vain for Fourier's passing away. It is toward a sort of *singularity of passage* from the finite to the infinitem like Dirichlet's expression.

REFERENCES

- [1] A.L.Cauchy, *Mémoire sur la Théorie des Ondes, 1815*, Savants étrangers, 1(1827), 1 partie §§3,4 et 2 partie §§4,5. (Remark : this paper is the same as *Mémoire sur la Théorie des Ondes à la surface d'un fluid pesant d'un profondeur indéfinie*, Œuvres de Cauchy, 1882, serie (1), t. 1, pp.5-318.)
- [2] G.Darboux, *Œuvres de Fourier. Publiées par les soins de M.Gaston Darboux*, Tome Premier, Paris, 1888, Tome Second, Paris, 1890.
- [3] G.Darboux, *Œuvres de Fourier. Publiées par les soins de M.Gaston Darboux*, Tome Second, Paris, 1890. → <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k33707>
- [4] M.G.Lejeune Dirichlet, *Solution d'une question relative à la théorie mathématiques de la chaleur*, Crelle J. für die reine und angewandte Mathematik, 5(1830), 287-295. ⇒ Lejeune Dirichlet, *G Werke* Tome 1, herausgegeben auf Veranlassung der königlich preussischen Akademie der Wissenschaften von Kronecker ; forgesetzt von L.Fuchs, Berlin, 1889-1897, 161-172. → <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k99435r/f132>
- [5] L.Euler, *De valoribus integralium a termino variabilis $x = 0$ usque ad $x = \infty$ extensorum*, Mémoires de l'Académie des Science, Berlin, 1781, 337-345. (Lu: 30/apr/1781.)
- [6] J.-B.-J. Fourier, *Sur l'usage du théorème de Descartes dans la recherche des limites des racines*, Bulletin des Sciences par la Société Philomatique de Paris, 1820, 156-165 and 181-7. → [3], 291-309. (Followed by the comment of G.Darboux, 310-314.)
- [7] J.-B.-J. Fourier, *Théorie analytique de la chaleur. Deuxième Édition*, Paris, 1822. (This is available by G.Darboux [2] [Tome Premier] with comments).
- [8] J.-B.-J. Fourier, *Théorie du mouvement de la chaleur dans les corps solides, I^e Partie*, Mémoires de l'Académie royale des Siences, 4(1819-20), 1824, 185-555.
- [9] J.-B.-J. Fourier, *Suite de Mémoire intitulé : Théorie du mouvement de la chaleur dans les corps solides, II^e Partie*, Mémoires de l'Académie royale des Siences, 5(1821-22), 1826, 153-246. → [3], 3-94. → <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3220m/f7>
- [10] J.-B.-J. Fourier, *Mémoire sur la distinction des racines imaginaires, et sur l'application des théorèmes d'analyse algébrique aux équations transcendentes qui dépendent de la théorie de la chaleur*, Mémoires de l'Académie royale des Siences, 7(1827), 605-624. → [3], 127-144. → <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k32227>
- [11] J.-B.-J. Fourier, *Mémoire sur la théorie analytique de la chaleur*, Mémoires de l'Académie royale des Siences, 8(1829), 581-622. → [3], 145-181. → <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3223j>
- [12] J.-B.-J. Fourier, *Remarques générales sur l'application des principes de l'anayse algébrique aux équations transcendantes*, Mémoires de l'Académie royale des Siences, 10(1831), 119-146. (Lu : 9/mars/1829.) → <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k32255>, → [3], 185-210.
- [13] I.Grattan-Guinness, *Joseph Fourier 1768-1830*, MIT., 1972.

- [14] J.L.Lagrange, *Mécanique analytique*, Paris, 1788. (Quatrième édition d'après la Troisième édition de 1833 publiée par M. Bertrand, *Joseph Louis de Lagrange, Oeuvres*, publiées par les soins de J.-A. Serret et Gaston Darboux, 11/12, (Vol.11 : 1888, Vol.12 : 1889), Georg Olms Verlag, Hildesheim-New York, 1973.) (J.Bertrand remarks the differences between the editions.)
- [15] P.S.Laplace, *Mémoire sur divers points d'analyse*, J. École Polytech., Cahier 15, 8(1809), 229-265. → <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/cb34378280v>
- [16] S.Masuda, *Historical development of classical fluid dynamics*, Dissertation for a degree of Doctor of Science, Tokyo Metropolitan Univ., 2011. → <http://hdl.handle.net/10748/4129>
- [17] S.Masuda, 数学史から見た Navier-Stokes 方程式の微視的記述関数の論争に見る物理的構成と数学的記述, (研究集会「非線形波動現象の研究の新たな進展」), 数理解析研究所講義録 1800, 49-61, 2012.
- [18] S.D.Poisson, *Mémoire sur la Propagation de la Chaleur dans les Corps Solides*, Nouveau Bulletin des Sciences par la Société philomatique de Paris, t.I, 112-116, no.6, mars 1808. Paris. (Lu : 21/déc/1807) (Remark. The author of paper is named as Fourier, for the report of Fourier's undefined version, however, the signature in the last page is 'P' meant Poisson.) → [2] vol.2, 215-221. → <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k33707>
- [19] S.D.Poisson, *Sur les intégrales définies*, Nouveau Bulletin des Sciences, par la Société Philomatique, Paris. Avril. 42(1811), 243-252. (referred : [20, p.219])
- [20] S.D.Poisson, *Mémoire sur les intégrales définies*, (1813), J. École Polytech., Cahier 16, 9(1813), 215-246. → <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt4336720/f220>
- [21] S.D.Poisson, *Suite du Mémoire sur les intégrales définies, imprimé dans le volume précédent de ce Journal*, J. École Polytech., Cahier 17, 10(1815), 612-631. → <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt433673r/f614> (followed from [20].)
- [22] S.D.Poisson, *Mémoire sur l'intégration de quelques équations linéaires aux différences partielles, et particulièrement de l'équation générale du mouvement des fluides élastiques*, Mémoires de l'Académie royale des Sciences, 13(1818), 121-176. (Lu : 19/juillet/1819.) (referred : [24, p.139])
- [23] S.D.Poisson, *Suite du Mémoire sur les Intégrales définies, Inséré dans les deux précédens volumes de ce Journal*, J. École Polytech., Cahier 18, 11(1820), 295-341. → <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt4336744/f300> (followed from [20] and [21].)
- [24] S.D.Poisson, *Mémoire sur la Distribution de la Chaleur dans les Corps solides*, J. École Royale Polytech., Cahier 19, 12(1823), 1-144. (Lu : 31/déc/1821.) (Remark. In this top page, Poisson addes the following footnote : Ce Mémoire a été lu à l'institut, le 29 mai 1815 ; le mois suivant, j'en ai donné des extraits dans le Journal de Physique et dans le Bulletin de la Société philomatique ; mais depuis cette époque, j'ai eu l'occcation de reprendre mon travail sur le même sujet, et d'y ajouter plusieurs parties qui en ont presque doublé l'étendue : c'est pourquoi je ne donnerai à mon Mémoire d'autre date que celle de sa publication.) → <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k433675h>
- [25] S.D.Poisson, *Addition Au Mémoire sur précédent, et au Mémoire sur la manière d'exprimer les Fonctions par des Séries de Quantités périodiques*, J. École Royale Polytech., Cahier 19, 12(1823), 145-162. → <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k433675h>
- [26] S.D.Poisson, *Mémoire sur l'Intégration des équations linéaires aux différences partielles*, J. École Royale Polytech., Cahier 19, 12(1823), 215-248. (Lu : 31/déc/1821.) → <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k433675h>
- [27] S.D.Poisson, *Second Mémoire sur la Distribution de la chaleur dans les corps solides*, J. École Royale Polytech., Cahier 19, 12(1823), 249-403. (Lu : 31/déc/1821.) → <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k433675h>
- [28] S.D.Poisson, *Suite du Mémoire sur les Intégrales définies et sur la Sommation des Séries*, J. École Royale Polytech., Cahier 19, 12 (1823), 404-509. (followed from [20], [21] and [23].) → <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k433675h>
- [29] S.D.Poisson, *Extrait d'un Mémoire sur la Propagation du mouvement dans les fluides élastiques*, Annales de chimie et de physique, 2^e Ser., 22(1823), 250-269. (Lu : 24/mar/1823.)
- [30] S.D.Poisson, *Sur la chaleur rayonnante*, Annales de chimie et de physique, 26(1824), 225-45, 442-44.
- [31] S.D.Poisson, *Mémoire sur l'équilibre et le Mouvement des Corps élastiques*, Annales de chimie et de physique, 37(1828), 337-355. (Lu : 14/apr/1828. This is an extract from [32])
- [32] S.D.Poisson, *Mémoire sur l'Équilibre et le Mouvement des Corps élastiques*, Mémoires de l'Académie royale des Sciences, 8(1829), 357-570. (Lu : 14/apr/1828.) → <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3223j>
- [33] S.D.Poisson, *Addition au Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps, inséré dans ce volume*, Mémoires de l'Académie royale des Sciences, 8(1829), 623-27. (Lu : 14/apr/1828.) → <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3223j>
- [34] S.D.Poisson, *Mémoire sur l'Équilibre fluides*, Mémoires de l'Académie royale des Sciences, 9(1830), 1-88. (Lu : 24/nov/1828.) → <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3224v>
- [35] S.D.Poisson, *Note sur les racines des équations transcendentes*, Mémoires de l'Académie royale des Sciences, 9(1830), 89-95. (Lu : 2/mars/1829.) → <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3224v>
- [36] S.D.Poisson, *Mémoire sur les équations générales de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques et des fluides*, (1829), J. École Royale Polytech., 13(1831), 1-174. (Lu : 12/oct/1829.)
- [37] S.D.Poisson, *Théorie mathématique de la chaleur (I)*, Annales de chimie et de physique, 59(1835), 71-102.
- [38] S.D.Poisson, *Théorie mathématique de la chaleur*, Bachelier Père et Fils, Paris, 1835.
- [39] B.Riemann, *Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe*, Göttingen State-Univ. 1867. 1-47.
- [40] G.G.Stokes, *On the theories of the internal friction of fluids in motion, and of the equilibrium and motion of elastic solids, 1849, (read 1845), (From the Transactions of the Cambridge Philosophical Society Vol. VIII. p.287), Johnson Reprint Corporation, New York and London, 1966, Mathematical and physical papers 1, 1966, 75-129, Cambridge.*