

# 動的グラフ上のランダムウォークの到達時間と全訪問時間 Hitting time and cover time on dynamic graphs

木場 孝輔                      山内 由紀子                      来嶋 秀治                      山下 雅史  
Kosuke Koba                      Yukiko Yamauchi                      Shuji Kijima                      Masafumi Yamashita

九州大学  
Kyushu University

## 1 はじめに

グラフ上のランダムウォークとは、トークンがグラフの頂点をランダムに遷移していく確率モデルである。グラフ上のランダムウォークは、インターネットクローラーやネットワークの探索などに応用されている。静的なネットワーク上でのランダムウォークに関しては、多くの従来研究が存在する。しかし、インターネットなどの現実のネットワークは時不変ではなく、故障やエラーなどによって時間と共に変化する動的なネットワークであることが多い。そこで、本発表ではこのような動的ネットワークを対象とする。

動的グラフ上でのランダムウォークについての先行研究としては、辺集合のみが変化するグラフ [1, 2, 3] や、頂点が追加されていくグラフを扱ったもの [2] がある。

本発表ではまず、辺集合が変化するグラフとして、各時刻においてグラフの各辺が独立に確率  $q$  で消えるとしたモデルを考える。このモデルに対し、定常分布を任意に設定できるという特徴を持つメトロポリスウォーク [4] を元に、動的グラフ上でのランダムウォークの戦略を提案する。そして、その到達時間と全訪問時間、定常分布を解析する。さらに、ベルヌイグラフ上で、定常分布を任意に設定できるランダムウォークの戦略を提案、解析する。

次に、より一般的なグラフモデルとして、グラフ

の各辺が Markov 連鎖として変化するモデルも扱う。そのグラフ上の単純ランダムウォークについて、グラフをパスに限定した場合の到達時間の上界を求める。

## 2 準備

### 2.1 ランダムウォーク

グラフ  $G = (V, E)$  について、ある頂点  $u \in V$  に隣接する頂点の集合を  $N(u)$  で表し、 $u$  の次数を  $\deg(u)$  と書く。グラフ  $G$  上のランダムウォークとは、グラフ上の頂点をトークンが遷移確率行列  $P = (P(u, v))(u, v \in V)$  に従って確率的に遷移していくモデルである。

すべての隣接頂点に対して等確率で遷移するランダムウォークを単純ランダムウォークという。

任意の正のベクトル  $\mu = (\mu_u)(u \in V, \mu_u > 0)$  が与えられたとき、メトロポリスウォークは以下の遷移確率行列  $R_\mu$  によって定義される。

$$R_\mu(u, v) = \begin{cases} \frac{1}{\deg(u)} \min \left\{ 1, \frac{\deg(u)\mu_v}{\deg(v)\mu_u} \right\} & v \in N(u), \\ 1 - \sum_{w \in N(u)} R_\mu(u, w) & v = u, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

### 2.2 定常分布

$\forall u \in V, \pi(u) = \sum_{v \in V} \pi(v)P(v, u)$  を満たす確率分布  $\pi = (\pi(u))(u \in V)$  を定常分布と呼ぶ。メトロ

ポリスウォークの定常分布は  $\pi \propto \mu$  である [4].

### 2.3 到達時間と全訪問時間

グラフ  $G = (V, E)$  上の遷移確率行列  $P$  に従うランダムウォークがあるとする. このとき頂点  $u \in V$  にあるトークンが, 頂点  $v \in V$  に到達するまでの遷移数の期待値を,  $u$  から  $v$  への到達時間 (Hitting time) と定義し  $H_{u,v}^P$  で記述する. その最大値を  $H^P := \max_{u,v} H_{u,v}^P$  と定義する.

また, 頂点  $u \in V$  にあるトークンが, グラフ上のすべての頂点を訪れるまでの遷移数の期待値を,  $u$  からの全訪問時間 (Cover time) と定義し  $C_u^P$  で記述する. その最大値を  $C^P := \max_u C_u^P$  と定義する.

## 3 ベルヌーイグラフ上のランダムウォーク

### 3.1 ベルヌーイグラフ

辺集合が変化するグラフとして, 以下のモデルを扱う.

**モデル 3.1** 与えられるグラフ  $G = (V, E)$  は単純無向連結とする. 時刻  $t \in \mathbb{N}$  におけるグラフ  $G_t = (V_t, E_t)$  は,  $V_t = V$ ,  $E_t$  は  $E$  の各辺を独立に確率  $1-q$  で選んでできる辺の集合とし, 以下を満たす.

$$\forall t \in \mathbb{N}, e \in E \quad \Pr(E_t \ni e) = 1 - q.$$

このモデルは, 各時刻において, 元となるグラフ  $G$  の各辺が独立に確率  $q$  で消え, 確率  $1-q$  で残っているというものである.

以下で用いる記号を定義する.  $n = |V|$ ,  $m = |E|$  とする. 元となるグラフ  $G$  における  $u$  の隣接頂点の集合を  $N(u)$  で表し,  $u$  に接続する辺の数を  $\deg(u)$  とする. 時刻  $t$  のグラフ  $G_t$  における  $u$  の隣接頂点の集合を  $N_t(u)$  とし,  $u$  に接続する辺の数を  $\deg_t(u)$  とする. 明らかに,  $N_t(u) \subseteq N(u)$  が成り立つ. グラフ  $G$  の最小次数を  $\delta$ , 最大次数を  $\Delta$  とする.

### 3.2 ベルヌーイグラフ上のメトロポリスウォーク

任意の正のベクトル  $\mu = (\mu_u) (u \in V, \mu_u > 0)$  が与えられているとする. 各時刻  $t$  において, トークンが頂点  $u \in V$  にいるとき, 以下のように動く.

1. もし,  $G_t$  上で隣接頂点が1つも無いならば現在の頂点にとどまる.
2. そうでなければ,  $G_t$  での隣接頂点  $N_t(u)$  から, 等確率に1つ選び  $v$  とする.
3. 確率  $\min \left\{ 1, \frac{\deg(u)\mu_v}{\deg(v)\mu_u} \right\}$  で  $v$  へ移動する.

**命題 3.2** ベルヌーイグラフ上のメトロポリスウォークの遷移確率行列  $P_\mu$  は, 変化のないグラフ  $G$  上で  $\mu$  を与えたときのメトロポリスウォークの遷移確率行列  $R_\mu$  を用いて, 以下のように表せる.

$$P_\mu(u, v) = \begin{cases} (1 - q^{\deg(u)}) R_\mu(u, v) & v \in N(u), \\ q^{\deg(u)} + (1 - q^{\deg(u)}) R_\mu(u, u) & u = v, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

### 3.3 到達時間と全訪問時間の解析

本節では, ベルヌーイグラフ上のメトロポリスウォークの到達時間と全訪問時間について, 静的なグラフ上のランダムウォークの到達時間, 全訪問時間との比較を行う.

**定理 3.3** ベルヌーイグラフ上のメトロポリスウォークの到達時間  $H_{u,v}^{P_\mu}$  と全訪問時間  $C_u^{P_\mu}$  は以下を満たす.

$$\frac{H_{u,v}^{R_\mu}}{1 - q^\Delta} \leq H_{u,v}^{P_\mu} \leq \frac{H_{u,v}^{R_\mu}}{1 - q^\delta}, \quad \frac{C_u^{R_\mu}}{1 - q^\Delta} \leq C_u^{P_\mu} \leq \frac{C_u^{R_\mu}}{1 - q^\delta}.$$

ここで  $H_{u,v}^{R_\mu}$  と  $C_u^{R_\mu}$  は, 変化のないグラフ  $G$  上で  $\mu$  を与えたときのメトロポリスウォークの到達時間と全訪問時間である.

グラフ  $G$  の次数が大きくなるほど、ベルヌーイグラフ上のメトロポリスウォークの到達時間、全訪問時間は、変化のないグラフ  $G$  上でのメトロポリスウォークの到達時間、全訪問時間に近づく。

**補題 3.4** ある遷移確率行列  $P = (P(u, v))(u, v \in V)$  が与えられるとする。このとき、グラフ上の各頂点  $u$  に対し、 $0 \leq q_u < 1$  である、任意の  $q_u$  が与えられ、遷移確率行列  $P'$  が以下のように書けるとする。

$$P'(u, v) = \begin{cases} (1 - q_u)P(u, v) & v \in N(u), u \neq v, \\ q_u + (1 - q_u)P(u, u) & u = v, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

このとき、到達時間と全訪問時間は

$$H_{u,v}^{P'} = \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{w \in W_{u,v}^P, |w|=t+1} \left\{ \left( \prod_{i=1}^t P(w_i, w_{i+1}) \right) \sum_{j=1}^t \frac{1}{1 - q_{w_j}} \right\},$$

$$C_u^{P'} = \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{w \in W_u^P, |w|=t+1} \left\{ \left( \prod_{i=1}^t P(w_i, w_{i+1}) \right) \sum_{j=1}^t \frac{1}{1 - q_{w_j}} \right\},$$

となる。ただし  $W_{u,v}^P$  は、 $G$  上で  $P$  に従うランダムウォークを行ったときにとりうる  $u$  から  $v$  への道全体の集合であり、 $W_u^P$  は、 $u$  から全訪問するのにとりうる道全体の集合である。

道  $w \in W_{u,v}^P$  に対し、 $|w|$  で道の長さを表す。例えば  $w$  が、 $u \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_2 \rightarrow v$  という道を表すとき、 $w = (w_1, w_2, w_3, w_4, w_5) = (u, v_1, v_2, v_2, v)$  であり、 $|w| = 5$  である。同様に  $w' \in W_u^P$  についても  $|w'|$  は道の長さを表す。

**証明 (定理 3.3)** 補題 3.4 より、ベルヌーイグラフ上のメトロポリスウォークの到達時間と全訪問時間は

$$H_{u,v}^{P_\mu} = \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{w \in W_{u,v}^{R_\mu}, |w|=t+1} \left\{ \left( \prod_{i=1}^t R_\mu(w_i, w_{i+1}) \right) \sum_{j=1}^t \frac{1}{1 - q^{\deg(w_j)}} \right\},$$

$$C_u^{P_\mu} = \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{w \in W_u^{R_\mu}, |w|=t+1} \left\{ \left( \prod_{i=1}^t R_\mu(w_i, w_{i+1}) \right) \sum_{j=1}^t \frac{1}{1 - q^{\deg(w_j)}} \right\}.$$

ここで、グラフ上の頂点の最小次数  $\delta$ 、最大次数  $\Delta$  と、 $G$  上のメトロポリスウォークの到達時間、全訪問時間を用いると、定理 3.3 が得られる。□

### 3.4 ベルヌーイグラフ上のメトロポリスウォークの定常分布

2.2 節で述べたとおり、静的なグラフ上では、メトロポリスウォークにより所望の定常分布が実現できる。しかし動的なグラフ上では、定常分布が所望の分布に一致しないことを示す。

**定理 3.5** ベルヌーイグラフ上のメトロポリスウォークの定常分布  $\pi_\mu = (\pi_\mu(u)) (u \in V)$  は以下のようになる。

$$\pi_\mu(u) \propto \frac{\mu_u}{1 - q^{\deg(u)}}.$$

**証明**  $\forall u \in V$ ,  $\pi_\mu(u) = k \cdot \frac{\mu_u}{1 - q^{\deg(u)}}$  とする。  $k$  は正規化定数であり、 $k = 1 / \sum_{w \in V} \frac{\mu_w}{1 - q^{\deg(w)}}$  である。任意の 2 頂点  $u, v \in V$  に対して、 $\deg(u)\mu_v < \deg(v)\mu_u$  のとき、

$$\begin{aligned} & \pi_\mu(u)P_\mu(u, v) \\ &= k \cdot \frac{\mu_u}{1 - q^{\deg(u)}} \cdot \frac{1 - q^{\deg(u)}}{\deg(u)} \min \left\{ 1, \frac{\deg(u)\mu_v}{\deg(v)\mu_u} \right\} \\ &= k \cdot \frac{\mu_v}{\deg(v)} \\ &= k \cdot \frac{\mu_v}{1 - q^{\deg(v)}} \cdot \frac{1 - q^{\deg(v)}}{\deg(v)} \min \left\{ 1, \frac{\deg(v)\mu_u}{\deg(u)\mu_v} \right\} \\ &= \pi_\mu(v)P_\mu(v, u). \end{aligned}$$

$\deg(u)\mu_v \geq \deg(v)\mu_u$  のときも同様に,  $\pi_\mu(u)P(u, v) = \pi_\mu(v)P(v, u)$  となる. よって任意の2頂点  $u, v \in V$  に対して,  $\pi_\mu(u)P(u, v) = \pi_\mu(v)P(v, u)$  を満たす. したがって,  $\pi_\mu = \left(k \cdot \frac{\mu_u}{1 - q^{\deg(u)}}\right) (u \in V)$  は, ベルヌーイグラフ上でのメトロポリスウォークの定常分布である.  $\square$

定理 3.5 より, 3.2 節のメトロポリスウォークでは, 定常分布が与えた  $\mu$  に比例しない. 次の節では,  $\mu$  に比例する定常分布を持つランダムウォークを示す.

### 3.5 ベルヌーイグラフ上で, 所望の定常分布を持つメトロポリスウォーク

定理 3.5 より, 3.2 節のメトロポリスウォークに  $\mu' = \mu_u (1 - q^{\deg(u)})$  を与えることで,  $\mu$  に比例する定常分布を持つランダムウォークを得ることが出来る. このときの遷移確率行列  $P_{\mu'}$  は, 命題 3.2 から得られる. また, このランダムウォークの到達時間  $H^{P_{\mu'}}$ , 全訪問時間  $C^{P_{\mu'}}$  は, 定理 3.3 によって抑えられる. ここで,  $H^{R_{\mu'}} = O(f' \cdot n^2)$ ,  $C^{R_{\mu'}} = O(f' \cdot n^2 \log n)$ ,  $f' = \frac{\max_{u \in V} \mu'_u}{\min_{u \in V} \mu'_u}$  である [4]. よって, 以下のような上界が得られる.

$$H^{P_{\mu'}} = O\left(\frac{f'}{1 - q^\delta} \cdot n^2\right),$$

$$C^{P_{\mu'}} = O\left(\frac{f'}{1 - q^\delta} \cdot n^2 \log n\right).$$

さらに,  $\mu$  が一様ときは, 以下のようになる.

$$H^{P_{\mu'}} = O\left(\frac{1 - q^\Delta}{(1 - q^\delta)^2} \cdot n^2\right),$$

$$C^{P_{\mu'}} = O\left(\frac{1 - q^\Delta}{(1 - q^\delta)^2} \cdot n^2 \log n\right).$$

## 4 Edge-Markovian グラフ上のランダムウォーク

### 4.1 Edge-Markovian グラフ

モデル 3.1 の拡張として, 以下のモデルを扱う.

**モデル 4.1** 与えられるグラフ  $G = (V, E)$  は単純無向連結とする. 確率  $p, q (0 < p, q < 1)$  が与えられているとする. 時刻  $t$  におけるグラフを  $G_t = (V_t, E_t)$ ,  $V_t = V$  とする. 各時刻  $t$  において, 各辺  $e \in E$  が, 以下のような遷移確率に従って変化する.

	$e \in E_{t+1}$	$e \notin E_{t+1}$
$e \in E_t$	$1 - p$	$p$
$e \notin E_t$	$q$	$1 - q$

このモデルは  $1 - p = q$  のとき, モデル 3.1 と等しい. 特に,  $G$  としてパスグラフが与えられたとき ( $V = \{1, 2, \dots, n\}, E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \dots, \{n - 1, n\}\}$ ), Markovian パスと呼ぶ.

### 4.2 Edge-Markovian グラフ上の単純ランダムウォーク

各時刻  $t$  において, トークンが頂点  $u \in V$  にいるとき以下のように動く.

- もし,  $G_t$  上で隣接頂点が1つも無いならば現在の頂点にとどまる.
- そうでなければ,  $G_t$  での隣接頂点  $N_t(u)$  から等確率に1つ選び, そこへ移動する.

### 4.3 Markovian パス上の単純ランダムウォークの到達時間

グラフを Markovian パスに限定したときの, 単純ランダムウォークの到達時間の上界を示す.

**定理 4.2**  $1 - p \geq q$  である Markovian パス上の, 単純ランダムウォークの到達時間  $H^P$  は, 以下を満たす.  $1 - p \geq q$  である Markovian パス上の単純ラン

ダムウォークにおいて、端点からもう一方の端点までの到達時間  $H_{1,n}$  は以下を満たす。

$$H_{1,n}^P \leq \frac{b(n-1)}{p+q-1} + \frac{\left(a - \frac{b}{p+q-1}\right) \left(1 - \left(\frac{2-p-q}{p+q}\right)^{n-1}\right)}{1 - \left(\frac{2-p-q}{p+q}\right)},$$

$$a = 1 + \frac{\max\{1 - \mu_{\{1,2\}}, 1 - q\}}{q},$$

$$b = 1 + \frac{p(1-q)}{1 - (1-q)^2}.$$

ここで  $\mu_{\{1,2\}}$  は、初期グラフ  $G_1$  において辺  $\{1,2\}$  が存在する確率である。

## 5 おわりに

グラフ  $G$  上の各辺が各ステップ毎に独立に確率  $p$  で消えるモデル上でのメトロポリスウォークについて、その到達時間と全訪問時間、定常分布を解析した。定常分布を任意に設定できるランダムウォークを提案し、その到達時間と全訪問時間の上界を求めた。さらに、グラフ  $G$  の各辺が Markov 連鎖として変化するモデル上の単純ランダムウォークについて、グラフをパスに限定した場合の到達時間の上界を求めた。しかし、その上界は頂点数について指数の上界であるため、頂点数の多項式で抑えられないか考える必要がある。また、パス以外のグラフについて解析することも、今後の課題である。

## 参考文献

- [1] C. Avin, M. Koucky, Z. Lotker, How to explore a fast-changing world (Cover time of a simple random walk on evolving graphs), LNCS, 5125 (2008), 121–132.
- [2] C. Cooper, Random walks, Interacting particles, dynamic networks: Randomness can be helpful, LNCS, 6796 (2011), 1–14.
- [3] K. Koba, S. Kijima, M. Yamashita, Random walks on dynamic graphs, Proc. WAAC 2011, 28–35.
- [4] Y. Nonaka, H. Ono, K. Sadakane, M. Yamashita, The hitting and cover times of Metropolis walks, Theoretical Computer Science Volume 411 Issue 16–18, 2010, 1889–1894