数理解析研究所講究録
第 1852 巻 2013 年 8-14

射影を用いた非線形写像の不動点近似法

東邦大学・理学部　木村泰紀 (Yasunori Kimura)
Faculty of Science, Toho University

1 はじめに

本稿では, Banach 空間の部分集合上で定義された非線形写像の有限族に対し, その共通不動点へ収束する点列を射影を用いて生成する方法をあつかう. とくに, 閉凸集合への射影を用いて近似列を生成する収縮射影法 [9] に対し, 誤差を伴った場合について考察する.

誤差を伴った近似列の生成法に関する重要な結果の一つとして Rockafellar による近接点法 [8] がある. これは極大単調作用素の零点近似点列を生成する方法として提案されているが, 簡単な置き換えで不動点近似法に変形できる. この手法でも誤差の考察がされているが, 点列生成の各段階において発生する誤差の影響が以後の段階まで累積していくため, 収束のためには誤差のノルムの列に対する和の有限性が必要となる. これは, 点列の生成が進むにつれて誤差が急激に減少していくことを要請しており, 実際の数値計算においては大きな問題となる. この問題については, 例えば [5] 等で条件の緩和が試みられているが, 十分なものとは言えない.

そこで本稿では, 収縮射影法に焦点をあて, 誤差が発生し得る距離射影の計算において, ノルムが必ずしも 0 に収束しない場合でも生成点列の性質に一定の評価を与えることができる方法を提案した. この結果は [4] で得られた一写像の場合の近似定理の拡張である.

2 準備

本稿であつかう Banach 空間はすべて実数をスカラーとする. 実数の全体を $\mathbb{R}$, 自然数の全体を $\mathbb{N}=\{1,2,3,\dots\}$ であらわす.

Key words and phrases. Approximation, fixed point, error, shrinking projection method, metric projection.
2010 *Mathematics Subject Classification.* 47H09.

$S = \{x \in E : \|x\| = 1\}$ とする．Banach 空間 E が狭義凸であるとは，$x, y \in S$ が $\|x+y\| = 2$ をみたすならば $x = y$ であることをいう．E が一様凸であるとは，点列 $\{x_n\}, \{y_n\} \subset S$ に対して，$\lim_{n\to\infty} \|x_n + y_n\| = 2$ ならば $\lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0$ が成り立つことをいう．

次に，$S \times S \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 上の関数 $f(x, y, t) = (\|x + ty\| - \|x\|)/t$ を考えよう．E が滑らかであるとは，任意の $x, y \in S$ において $\lim_{t\to 0} f(x, y, t)$ が存在することをいう．また，この極限が $(x, y) \in S \times S$ に関して一様に収束するとき，E は一様に滑らかであるという．

Banach 空間 E が Kadec-Klee 条件をみたすとは，点列 $\{x_n\} \subset E$ が x_0 に弱収束し，かつ $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x_0\|$ ならばつねに $\{x_n\}$ が x_0 に強収束することをいう．一様凸 Banach 空間は Kadec-Klee 条件をみたすことが知られている．

Banach 空間 E の共役空間を E^* であらわす．E から E^* への集合値写像 J が

$$Jx = \{x^* \in E : \|x\|^2 = \langle x, x^* \rangle = \|x^*\|^2\}$$

と定義されるとき，J を双対写像という．E が回帰的かつ狭義凸で滑らかなバナッハ空間のとき，J は全単射となり，このとき E^* 上の双対写像 J^* は J の逆写像となる．

E を回帰的で狭義凸かつ滑らかな Banach 空間とする．$E \times E$ 上の関数 ϕ を，$x, y \in E$ に対して

$$\phi(y, x) = \|y\|^2 - 2\langle y, Jx \rangle + \|x\|^2$$

で定義する．本稿では E の部分集合 C 上で定義される写像 $T : C \to E$ に対し，$\phi(z, Tx) \le \phi(z, x)$ が任意の $z \in F(T)$ と $x \in C$ で成り立つような写像を考える．ここで $F(T)$ は T の不動点の全体，すなわち

$$F(T) = \{z \in C : z = Tz\}$$

である．この写像は，relatively nonexpansive 写像 [1, 2, 3, 6] と呼ばれる写像の一般化である．写像 $S : C \to E$ が $y_0 \in E$ において閉であるとは，$x_0 \in C$ に収束する点列 $\{x_n\} \subset C$ に対して $\{Sx_n\}$ が $y_0 \in E$ に収束するならば $Sx_0 = y_0$ が成り立つことをいう．

関数 ϕ とノルムの関係を記述する際の重要な結果として，次の定理がある．

定理 2.1 (Xu [11])**.** E を Banach 空間とし，r を正の実数，$B_r = \{x \in E : \|x\| \le r\}$ とする．このとき，次のことが成立する．

(i) E が一様凸ならば，狭義単調増加で連続な凸関数 $g_r : [0, \infty[\to [0, \infty[$ が存在して，$g_r(0) = 0$ かつ任意の $x, y \in B_r$ と $\alpha \in [0, 1]$ に対して

$$\|\alpha x + (1-\alpha)y\|^2 \le \alpha \|x\|^2 + (1-\alpha)\|y\|^2 - \alpha(1-\alpha)g_r(\|x - y\|)$$

が成り立つ.

(ii) E が一様に滑らかならば, 狭義単調増加で連続な凸関数 $g_r^* : [0,\infty[\to [0,\infty[$ が存在して, $g_r^*(0) = 0$ かつ任意の $x, y \in B_r$ と $\alpha \in [0,1]$ に対して

$$\|\alpha x + (1-\alpha)y\|^2 \geq \alpha \|x\|^2 + (1-\alpha)\|y\|^2 - \alpha(1-\alpha)g_r^*(\|x-y\|)$$

が成り立つ.

この定理を用いて, 次の系が得られる. 詳細は [4] を参照せよ.

系 2.2. E を一様凸かつ一様に滑らかな Banach 空間とし, r を正の実数とする. このとき定理 2.1 の g_r と g_r^* は, 任意の $x, y \in B_r$ に対して

$$g_r(\|x-y\|) \leq \phi(x,y) \leq g_r^*(\|x-y\|)$$

をみたす.

回帰的かつ狭義凸な Banach 空間 E の空でない閉凸集合 C を考える. このとき任意の $x \in E$ に対し

$$\|x - p_x\| = \inf_{p \in C} \|x - p\|$$

をみたす点 $p_x \in C$ が唯一存在する. x にこの p_x を対応させる写像を C に関する距離射影といい, P_C であらわす.

回帰的 Banach 空間 E の空でない閉凸集合列 $\{C_n\}$ に対し, E の部分集合 $\text{s-Li}_n C_n$ は $\{C_n\}$ の強位相による極限点全体からなる集合である. すなわち, $x \in \text{s-Li}_n C_n$ であることは, ある点列 $\{x_n\} \subset E$ が存在して, $\{x_n\}$ は x に強収束し, かつ任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $x_n \in C_n$ をみたすことと同値である. 一方, $\text{w-Ls}_n C_n$ は $\{C_n\}$ の弱位相による部分点列の極限点全体からなる集合である. すなわち, $y \in \text{w-Ls}_n C_n$ であることが, ある点列 $\{y_i\}$ が存在して, $\{y_i\}$ が y に弱収束し, かつ $\{C_n\}$ のある部分列 $\{C_{n_i}\}$ に対して $y_i \in C_{n_i}$ が任意の $i \in \mathbb{N}$ で成り立つことと同値である. E の閉凸集合 C_0 に対して $C_0 = \text{s-Li}_n C_n = \text{w-Ls}_n C_n$ が成り立つとき, $\{C_n\}$ は C_0 に Mosco 収束する [7] といい, $C_0 = \text{M-lim}_{n\to\infty} C_n$ とあらわす.

Mosco 収束する集合列と, 対応する距離射影列の間には次のような関係が成り立っている.

定理 2.3 (Tsukada [10]). E を Kadec-Klee 条件をみたす狭義凸な回帰的 Banach 空間とする. $\{C_n\}$ を E の空でない閉凸集合の列とするとき, もし $C_0 = \text{M-lim}_{n\to\infty} C_n$ が存在しかつ空でないならば, 任意の $x \in E$ に対して $\{P_{C_n}x\}$ は $P_{C_0}x$ に強収束する.

本稿においてはとくに $\{C_n\}$ が包含関係において単調減少であるときが重要であり, その場合には

$$\operatorname*{M-lim}_{n\to\infty} C_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$$

が成り立つ.

3 誤差が累積しない共通不動点近似列生成法

定理 3.1. E を一様凸かつ一様に滑らかな Banach 空間, C を E の空でない閉凸部分集合とし, 正の実数 r に対して $C \subset B_r = \{x \in E : \|x\| \leq r\}$ をみたすとする. $m \in \mathbb{N}$ に対して, $T_0, T_1, \dots, T_{m-1}$ を $F = \bigcap_{i=0}^{m-1} F(T_i) \neq \emptyset$ をみたす C から E への写像とし, 各 $i = 0, 1, \dots, m-1$ に対して $\phi(z, T_i x) \leq \phi(z, x)$ が任意の $z \in F$ と $x \in C$ に対して成り立つと仮定する. $\{\delta_n\}$ を非負の有界実数列とし, $\delta_0 = \limsup_{n\to\infty} \delta_n$ とする. $u \in E$ に対し, 点列 $\{x_n\}$ を次のように定義する. $x_1 \in C$, $C_1 = C$ とし, $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned} C_{n+1} &= \{z \in C : \phi(z, T_{(n \bmod m)} x_n) \leq \phi(z, x_n)\} \cap C_n, \\ x_{n+1} &\in \{z \in C : \|u - z\|^2 \leq d(u, C_{n+1})^2 + \delta_{n+1}\} \cap C_{n+1} \end{aligned}$$

このとき,

$$\limsup_{n\to\infty} \left\| x_n - T_{(n \bmod m)} x_n \right\| \leq 2 g_r^{-1} \left(\frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2} g_r^*(g_r^{-1}(\delta_0)) \right)$$

が成り立つ. ただし, g_r および g_r^* は定理 2.1 で述べたものである. さらに, $\delta_0 = 0$ かつ $I - T$ が原点において閉であるならば $\{x_n\}$ は $P_F u$ に強収束する.

この定理は [4] で用いられた手法によって証明できる. 本稿では完全を期するため, 証明の詳細を省略せずに述べる.

証明. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して, C_n の定義より $C_n \supset F \neq \emptyset$ が成り立つ. また, ϕ の性質より C_n が閉凸集合であることも明らかである. よって, $\{C_n\}$ は空でない閉凸集合の減少列となる. ここで, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $p_n = P_{C_n} u$ とし, $C_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ とすると, 定理 2.3 より $\{p_n\}$ は $p_0 = P_{C_0} u$ に強収束する. このとき, 距離射影の性質と $\{x_n\}$ の取り方によって任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\|u - x_n\|^2 \leq \|u - p_n\|^2 + \delta_n$$

が成り立つ. 定理 2.1 より, 任意の $\alpha \in]0,1[$ に対して

$$\begin{aligned}\|p_n - u\|^2 &\le \|\alpha p_n + (1-\alpha)x_n - u\|^2 \\ &\le \alpha \|p_n - u\|^2 + (1-\alpha)\|x_n - u\|^2 - \alpha(1-\alpha) g_r(\|p_n - x_n\|)\end{aligned}$$

が成り立ち, よって

$$\alpha g_r(\|p_n - x_n\|) \le \|x_n - u\|^2 - \|p_n - u\|^2 \le \delta_n$$

を得る. したがって $g_r(\|p_n - x_n\|) \le \delta_n$ であり, $\|p_n - x_n\| \le g_r^{-1}(\delta_n)$ を得る. 一方, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して, $p_n = P_{C_n} u \in C_n$ であることから $\phi(p_n, T_{(n \bmod m)} x_n) \le \phi(p_n, x_n)$ が得られる. よって, 系 2.2 を用いて

$$\begin{aligned}g_r\left(\left\|p_n - T_{(n \bmod m)} x_n\right\|\right) &\le \phi(p_n, T_{(n \bmod m)} x_n) \\ &\le \phi(p_n, x_n) \\ &\le g_r^*(\|p_n - x_n\|) \\ &\le g_r^*(g_r^{-1}(\delta_n))\end{aligned}$$

となり,

$$\begin{aligned}g_r\left(\frac{\left\|x_n - T_{(n \bmod m)} x_n\right\|}{2}\right) &\le g_r\left(\frac{\|x_n - p_n\| + \left\|p_n - T_{(n \bmod m)} x_n\right\|}{2}\right) \\ &\le \frac{1}{2} g_r(\|x_n - p_n\|) + \frac{1}{2} g_r\left(\left\|p_n - T_{(n \bmod m)} x_n\right\|\right) \\ &\le \frac{1}{2}\delta_n + \frac{1}{2} g_r^*(g_r^{-1}(\delta_n))\end{aligned}$$

となる. したがって任意の $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ に対して

$$\left\|x_n - T_{(n \bmod m)} x_n\right\| \le 2 g_r^{-1}\left(\frac{1}{2}\delta_n + \frac{1}{2} g_r^*(g_r^{-1}(\delta_n))\right)$$

が成り立ち, よって

$$\limsup_{n\to\infty} \left\|x_n - T_{(n \bmod m)} x_n\right\| \le 2 g_r^{-1}\left(\frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2} g_r^*(g_r^{-1}(\delta_0))\right)$$

を得る.

さらに, $\delta_0 = 0$ かつ $I - T$ が原点において閉であると仮定しよう. このとき,

$$\limsup_{n\to\infty} g_r(\|p_n - x_n\|) \le \limsup_{n\to\infty} \delta_n = 0$$

となり, $\lim_{n\to\infty}\|p_n - x_n\| = 0$ が得られる. よって $\{x_n\}$ は $p_0 = P_{C_0}u$ に強収束する. ここで $i = 0, 1, \ldots, m-1$ を一つ固定し, 各 $k \in \mathbb{N}$ に対して $w_k = x_{mk+i}$ として $\{x_n\}$ の部分列 $\{w_k\}$ をとると

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\|(I - T_i)w_k\| &= \lim_{k\to\infty}\|w_k - T_i w_k\| \\ &= \lim_{k\to\infty}\left\|x_{mk+i} - T_{((mk+i) \bmod m)}x_{mk+i}\right\| \\ &\le 2g_r^{-1}\left(0 + \frac{1}{2}g_r^*(g_r^{-1}(0))\right) = 0\end{aligned}$$

が成り立つ. $I - T_i$ が原点で閉であることを用いると $(I - T_i)p_0 = 0$, すなわち $p_0 \in F(T_i)$ が得られる. $i = 0, 1, \ldots, m-1$ は任意だったので $p_0 \in F = \bigcap_{i=0}^{m-1} F(T_i)$ であり, $F \subset C_0$ であることから $p_0 = P_{C_0}u = P_{F(T)}u$ となり, 定理は示された. □

この定理において, E が Hilbert 空間のときは $g_r = g_r^* = \|\cdot\|^2$ が成り立つ. このことから, 前述の誤差評価式は

$$\limsup_{n\to\infty}\left\|x_n - T_{(n \bmod m)}x_n\right\| \le 2\sqrt{\delta_0}$$

となることがわかる.

参考文献

[1] D. Butnariu, S. Reich, and A. J. Zaslavski, *Asymptotic behavior of relatively nonexpansive operators in Banach spaces*, J. Appl. Anal. **7** (2001), 151–174.

[2] D. Butnariu, S. Reich, and A. J. Zaslavski, *Weak convergence of orbits of nonlinear operators in reflexive Banach spaces*, Numer. Funct. Anal. Optim. **24** (2003), 489–508.

[3] Y. Censor and S. Reich, *Iterations of paracontractions and firmly nonexpansive operators with applications to feasibility and optimization*, Optimization **37** (1996), 323–339.

[4] Y. Kimura, *Approximation of a fixed point of nonlinear mappings with nonsummable errors in a Banach space*, Proceedings of the Fourth International Symposium on Banach and Function Spaces, to appear.

[5] ———, *Further improvement of a coefficient condition for a weakly convergent iterative scheme*, Nonlinear Anal. **71** (2009), e2023–e2027.

[6] S. Matsushita and W. Takahashi, *A strong convergence theorem for relatively nonexpansive mappings in a Banach space*, J. Approx. Theory **134** (2005), 257–266.

[7] U. Mosco, *Convergence of convex sets and of solutions of variational inequalities*, Adv. in Math. **3** (1969), 510–585.

[8] R. T. Rockafellar, *Monotone operators and the proximal point algorithm*, SIAM J. Control Optim. **14** (1976), 877–898.

[9] W. Takahashi, Y. Takeuchi, and R. Kubota, *Strong convergence theorems by hybrid methods for families of nonexpansive mappings in Hilbert spaces*, J. Math. Anal. Appl. **341** (2008), 276–286.

[10] M. Tsukada, *Convergence of best approximations in a smooth Banach space*, J. Approx. Theory **40** (1984), 301–309.

[11] H. K. Xu, *Inequalities in Banach spaces with applications*, Nonlinear Anal. **16** (1991), 1127–1138.