

## 量子情報幾何における Heisenberg の不確定性関係の位置付け

渡辺 優

(京都大学 基礎物理学研究所)

2013 年 4 月 10 日

### 1 はじめに

1927 年に Heisenberg [1] はガンマ線顕微鏡による粒子の位置の測定の思考実験を考察することにより、位置  $\hat{x}$  の測定誤差  $\varepsilon(\hat{x})$  と測定による運動量  $\hat{p}$  への擾乱  $\eta(\hat{p})$  の間にトレードオフ関係

$$\varepsilon(\hat{x})\eta(\hat{p}) \gtrsim h \quad (1)$$

を見出した。このトレードオフ関係によって、ある物理量の測定をそれと共役な物理量への擾乱無しに行うことはできない、という量子測定の相補性 (complementarity) [2] が示唆された。しかし、当時、量子測定についての理論はまだ完成していなかったため、ガンマ線顕微鏡に限らない一般の測定過程における誤差と擾乱の間のトレードオフ関係が明らかにすることはできなかった。さらに、同時期に発見された Kennard [3] および Robertson [4] らによる量子揺らぎについてのトレードオフ関係

$$\sigma(\hat{X})\sigma(\hat{Y}) \geq \frac{1}{2} |\langle [\hat{X}, \hat{Y}] \rangle| \quad (2)$$

が Heisenberg の不確定性関係の数学的定式化であると誤って認識された。ここで、

$$\langle \hat{X} \rangle := \text{Tr}[\hat{\rho}\hat{X}] \quad (3)$$

は量子状態  $\hat{\rho}$  における  $\hat{X}$  の期待値、

$$\sigma(\hat{X})^2 := \langle \hat{X}^2 \rangle - \langle \hat{X} \rangle^2 \quad (4)$$

は  $\hat{X}$  の量子揺らぎ、

$$[\hat{X}, \hat{Y}] := \hat{X}\hat{Y} - \hat{Y}\hat{X} \quad (5)$$

は交換関係を表す。量子揺らぎそのものは測定過程に依存せず、系に内在的な量であり、したがって Robertson-Kennard の不等式は量子測定の誤差についてのトレードオフ関係ではない。Robertson-Kennard の不等式に代表される、測定過程に依存しない、対象となる量子系そのものの性質のみで表される不確定性関係は量子状態の非決定性 (indeterminacy) と呼ばれる [1]。

Heisenberg 以降、様々な測定モデルについて不確定性関係が示されたが、どれも等号を達成できない緩いトレードオフ関係であったり [5, 6, 7, 8, 9]、もしくは一般の量子測定については成立しない不等式であったりした [10, 11, 12]。一方、近年の量子制御技術の発展によって、量子系に対する精密な測定が実現できるよう

になってきており [13, 14, 15, 16]、量子測定の精度の限界を与える Heisenberg の不確定性関係が再び着目されるようになってきている。

これまで、量子測定の誤差は測定値の分散によって議論されてきた。しかし、測定値の分散が小さくても、測定によって得られた情報量が多いとは一般に言えず、測定値の分散それ自身は測定の精度を表す指標にはならない。量子測定の相補性は、測定値の分散についてのトレードオフ関係ではなく、測定によって得られる互いに非可換な物理量についての情報量の間トレードオフ関係が存在することを示している。1970 年頃、量子測定理論が Kraus [17] や Davies [18] らによって構築される一方、Helstrom [19] や Holevo [20] らによって量子推定理論の基礎が研究された。量子推定理論は、例えば、未知の量子状態が与えられた場合、どのような測定を行えば量子状態を効率よく推定できるかを明らかにする。推定精度が高いほど量子測定によって得られる情報量は多く、逆に推定精度が低い場合には測定によって得られる情報量は少ない。したがって、現代的な観点からは、Heisenberg の不確定性関係は測定によって得られたある物理量についての情報量と、測定過程による反作用が引き起こす共役な物理量についての情報の損失の間のトレードオフ関係として捉えられる [21, 22]。

一方、古典情報理論では情報幾何 [23] と呼ばれる幾何学的手法によって様々な最適性が統一的に議論されている。情報幾何の量子論への拡張として量子情報幾何があり、量子情報理論の幾何学を用いた統一的な理解につながると考えられている。本論文では、文献 [21, 22] で示された Heisenberg の定式化を紹介し、その情報幾何学的な意味付けについて議論を行う。

## 2 Fisher 情報量による Heisenberg の不確定性関係の定式化

### 2.1 測定誤差の定式化

有限次元 Hilbert 空間  $\mathcal{H}$  上の未知の同一な量子状態  $\hat{\rho}$  に対して、量子測定 (POVM 測定)  $M = \{\hat{M}_i\}_{i=1}^m$  を行い、その測定結果から物理量  $\hat{X}$  の期待値  $\langle \hat{X} \rangle$  を推定する問題を考える。このような量子状態推定についての問題では、推定の精度の上限を与える Fisher 情報量が通常用いられる。測定  $M$  によって得られる Fisher 情報量 (情報行列)  $J(M)$  は、量子状態を記述するパラメタ  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{d^2-1})^T$  を用いて ( $d = \dim \mathcal{H}$ )

$$[J(M)]_{ij} := \sum_k p_k (\partial_i \log p_k) (\partial_j \log p_k) \quad (6)$$

と表される。ただし、 $\partial_i := \partial / \partial \theta_i$  であり、測定結果  $k$  を得る確率  $p_k$  は

$$p_k := \text{Tr}[\hat{\rho} \hat{M}_k] \quad (7)$$

で与えられる。Fisher 情報行列  $J(M)$  は測定によって得られた量子状態  $\hat{\rho}$  についての情報量を表すが、これを用いて、期待値  $\langle \hat{X} \rangle$  についての Fisher 情報量  $J(\hat{X}; M)$  は、

$$J(\hat{X}; M) := \begin{cases} [\mathbf{x} \cdot J(M)^{-1} \mathbf{x}]^{-1} & (\mathbf{x} \in \text{supp}[J(M)]) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (8)$$

と与えられる。ただし、実ベクトル  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{d^2-1}$  は

$$x_i = \partial_i \langle \hat{X} \rangle \quad (9)$$

で定義される。Fisher 情報量  $J(\hat{X}; M)$  は、 $n$  個の i.i.d. な未知の量子状態をそれぞれ  $M$  で測定し、その測定結果からの一致推定量  $X^{\text{est}}$  の分散の下限を与える:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \text{Var}[X^{\text{est}}] \geq J(\hat{X}; M)^{-1}. \quad (10)$$

この不等式は Cramér-Rao 不等式と呼ばれる [24]。ここで、分散が発散する場合、つまり  $J(\hat{X}; M) = 0$  の場合は、一致推定量が存在しない場合であり、例えば  $M$  が  $\hat{X}$  とは非可換な物理量の射影測定であった場合などが該当する。

量子状態が初期に持っていた情報量は量子 Fisher 情報量と呼ばれる。量子 Fisher 情報量にはいくつものバリエーションが存在するが、ここでは symmetric logarithmic derivative (SLD) Fisher 情報量と呼ばれるものを採用する [25]。SLD Fisher 情報行列  $J_Q$  は

$$[J_Q]_{ij} := \frac{1}{2} \text{Tr}[\hat{\rho}\{\hat{L}_i, \hat{L}_j\}] \quad (11)$$

で定義される。ここで  $\{\cdot, \cdot\}$  は反交換関係を表し、 $\hat{L}_i$  は SLD 作用素と呼ばれるエルミート作用素であり、以下の作用素についての線形方程式の解として定義される。

$$\partial_i \hat{\rho} = \frac{1}{2} \{\hat{\rho}, \hat{L}_i\} \quad (12)$$

量子 Fisher 情報量  $J_Q$  は測定で得られる Fisher 情報量  $J(M)$  の上限を与えており、

$$J_Q \geq J(M) \quad \text{for all } M \quad (13)$$

この不等式は量子 Cramér-Rao 不等式と呼ばれている [26]。物理量  $\hat{X}$  についての SLD Fisher 情報量  $J_Q(\hat{X}) := [\mathbf{x} \cdot J_Q^{-1} \mathbf{x}]^{-1}$  は量子状態の揺らぎを特徴付けており、実際、今回のセットアップでは

$$J_Q(\hat{X})^{-1} = \sigma(\hat{X})^2 \quad (14)$$

を満たす。

我々は、測定  $M$  における  $\hat{X}$  の測定誤差  $\epsilon(\hat{X}; M)$  が

$$\epsilon(\hat{X}; M) = J(\hat{X}; M)^{-1} - J_Q(\hat{X})^{-1} \quad (15)$$

で特徴づけられることを示した [21]。これは、物理的には推定値の揺らぎから物理量の内在的な揺らぎを差し引いたものであり、測定によって推定値に新たに加わってしまった揺らぎを表している。測定が  $\hat{X}$  の射影測定  $P_X$  である場合は  $\epsilon(\hat{X}; P_X) = 0$  であり、また、 $\hat{X}$  とは非可換な物理量  $\hat{Y}$  の射影測定  $P_Y$  の場合には  $\epsilon(\hat{X}; P_Y) = +\infty$  となる。

## 2.2 擾乱の定式化

まず、Heisenberg のガンマ線顕微鏡における擾乱について再考してみる。対象粒子によって散乱された光子がスクリーンに到達するまでの経路が未知であることから、粒子の運動量変化を厳密に決めることはできない。したがって、仮に測定後の運動量を正確に測ったとしても、初期の運動量を正確に推定することは出来ない。そして、初期の運動量の推定精度が粒子の擾乱として定式化されていた。これは、現代的には、測定過程による情報量の損失として捉えられる。

量子測定過程は Kraus 演算子  $\mathbf{K} = \{\hat{K}_i\}_i$  と呼ばれる演算子のセットで表される。Kraus 演算子  $\mathbf{K}$  は

$$\sum_i \hat{K}_i^\dagger \hat{K}_i = \hat{I} \quad (16)$$

を満たし、測定後の状態  $\rho'$  は

$$\rho' := \sum_i \hat{K}_i \rho \hat{K}_i^\dagger \quad (17)$$

で与えられる。

測定後の状態が持つ初期状態についての量子 Fisher 情報量  $J'_Q$  は、先ほどと同様に

$$[J'_Q]_{ij} := \frac{1}{2} \text{Tr}[\rho' \{\hat{L}'_i, \hat{L}'_j\}] \quad (18)$$

で定義され、ここでの SLD 演算子  $\hat{L}'_i$  は

$$\partial_i \rho' = \frac{1}{2} \{\rho', \hat{L}'_i\} \quad (19)$$

で与えられる。量子 Fisher 情報量の単調性 [29] より、

$$J_Q \geq J'_Q \quad \text{for all } \mathbf{K} \quad (20)$$

が成立する。

したがって、我々は測定過程による物理量  $\hat{Y}$  への擾乱を、量子 Fisher 情報量の損失

$$\eta(\hat{Y}; \mathbf{K}) = J'_Q(\hat{Y})^{-1} - J_Q(\hat{Y})^{-1} \quad (21)$$

によって定式化した [22] これは、物理的には、測定後の状態を再度測定し、その測定結果から物理量  $\hat{Y}$  の初期の期待値  $\langle \hat{Y} \rangle = \text{Tr}[\rho \hat{Y}]$  を推定した場合の推定値の揺らぎから、初期の物理量の揺らぎを差し引いたものになっている。つまり、測定過程  $\mathbf{K}$  によって、二回目の測定による推定誤差がどれだけ増加してしまったかを表している [27]。擾乱  $\eta(\hat{Y}; \mathbf{K})$  は、測定過程がユニタリ過程、つまり、測定を行わない場合や、 $\hat{Y}$  の射影測定の場合にはゼロである。一方、測定過程が  $\hat{Y}$  とは非可換な物理量の射影測定である場合のように、測定後の状態から  $\langle \hat{Y} \rangle$  を推定できない場合には  $+\infty$  となる。

### 2.3 誤差と擾乱のトレードオフ関係

我々は、全ての測定過程  $\mathbf{K}$  について、これまでに定式化した誤差  $\varepsilon(\hat{X}; \mathbf{M})$  と擾乱が  $\eta(\hat{Y}; \mathbf{K})$  が以下の不等式を満たすことを証明した [21, 22]。

$$\varepsilon(\hat{X}; \mathbf{M}) \eta(\hat{Y}; \mathbf{K}) \geq \frac{1}{4} \left| \langle [\hat{X}, \hat{Y}] \rangle \right|^2 \quad (22)$$

ただし、ここで  $\mathbf{M}$  は測定過程  $\mathbf{K}$  に対応する POVM であり、 $\mathbf{K}$  が測定結果  $i$  と測定結果からは識別出来ないパスの index  $j$  を用いて

$$\mathbf{K} = \{\hat{K}_{i,j}\}_{i,j} \quad (23)$$

と表される場合、 $\text{POVM} = \{\hat{M}_i\}_i$  は

$$\hat{M}_i = \sum_j \hat{K}_{i,j}^\dagger \hat{K}_{i,j} \quad (24)$$

と表される。

不等式 (22) は、全ての測定過程について成り立つが、物理量  $\hat{X}, \hat{Y}$  と状態  $\hat{\rho}$  を固定した場合に、一般にはその等号を達成する測定過程は存在しない。例えば、 $\hat{\rho} = \hat{I}/d$  の場合、任意の  $\hat{X}, \hat{Y}$  に対して

$$\langle [\hat{X}, \hat{Y}] \rangle = 0 \quad (25)$$

であるが、 $[\hat{X}, \hat{Y}] \neq 0$  の場合には誤差もしくは擾乱を有限に留めたままどちらか一方をゼロにすることはできず、したがって、等号は達成できない。

我々は、より強い下限を表す不等式として以下のものを提唱した。物理量  $\hat{X}, \hat{Y}$  が同時にブロック対角化出来ない、つまり  $\hat{X}, \hat{Y}$  の既約な不変部分空間が  $\mathcal{H}$  の場合、

$$\varepsilon(\hat{X}; \mathbf{M})\eta(\hat{Y}; \mathbf{K}) \geq \sigma(\hat{X})^2\sigma(\hat{Y})^2 - C_S(\hat{X}, \hat{Y})^2 \quad (26)$$

が成り立つことを数値的に示し、さらに、この等号を達成する測定が全ての  $(\hat{\rho}, \hat{X}, \hat{Y})$  の組みに対して存在することを証明した。この不等式 (26) が (22) より強いことは、それぞれの不等式に現れる下限の間に Schrödinger の不等式と呼ばれる状態の非決定性を表す不等式が成り立つことから確認できる。

$$\sigma(\hat{X})^2\sigma(\hat{Y})^2 - C_S(\hat{X}, \hat{Y})^2 \geq \frac{1}{4} \left| \langle [\hat{X}, \hat{Y}] \rangle \right|^2 \quad (27)$$

ここで、 $C_S(\hat{X}, \hat{Y})$  は物理量  $\hat{X}, \hat{Y}$  の対称化相関であり、以下のように定義される。

$$C_S(\hat{X}, \hat{Y}) := \frac{1}{2} \langle \{\hat{X}, \hat{Y}\} \rangle - \langle \hat{X} \rangle \langle \hat{Y} \rangle \quad (28)$$

このように、情報論的に誤差や擾乱を定式化しなおすことで、全ての測定過程について成り立つ不確定性関係を示すことができ、さらにその達成可能な下限までもが明らかになった。

### 3 量子情報幾何との関連性

情報幾何はパラメタ  $\theta$  にしたがう確率分布の集合に対して、 $\theta$  を座標とし、その幾何学的な性質から情報理論や確率分布のダイナミクスを議論する。Čencov (Chentsov) の定理により、確率分布空間の計量に対して、マルコフ写像によって単調減少する、という単調性を課すと、その計量は定数倍の自由度を除いて Fisher 情報行列に一意に定まる [28]。したがって、この計量は特に Fisher 計量と呼ばれる [23]。

一方、量子情報幾何はパラメタ  $\theta$  にしたがう量子状態の集合についての幾何学的な性質を議論する。量子状態空間におけるマルコフ写像の対応物は量子操作と呼ばれ、量子測定過程もその中に含まれている。Petz の定理により、量子操作による単調性をこの空間の計量に対して課すと、それは量子 Fisher 情報行列によって与えられ、これを特に量子 Fisher 計量と呼ぶ [29]。

量子測定過程は、量子状態  $\hat{\rho}$  から測定結果の確率分布  $p$  と測定後の量子状態  $\hat{\rho}'$  の二つを出力する。したがって、量子測定過程によって、初期状態の量子状態空間から、測定結果の確率分布からなる古典的な確率分布空間と、測定後の量子状態からなる量子状態空間の、二つの統計空間が生成される。

情報論的に定式化された Heisenberg の不確定性関係 (22), (26) は、これらの生成された二つの統計空間の間の計量の間、一方の空間の計量が大きくなれば、他方の空間の計量は小さくなる、というトレードオフ関係が存在することを示し、その下限を与える不等式になっていることがわかる。

Heisenberg の不確定性関係を状態推定の枠組みで捉え直すことで、Heisenberg の不確定性関係が二つの統計空間の間の Fisher 計量間のトレードオフ関係であることが示された。二つの空間における距離など、ロー

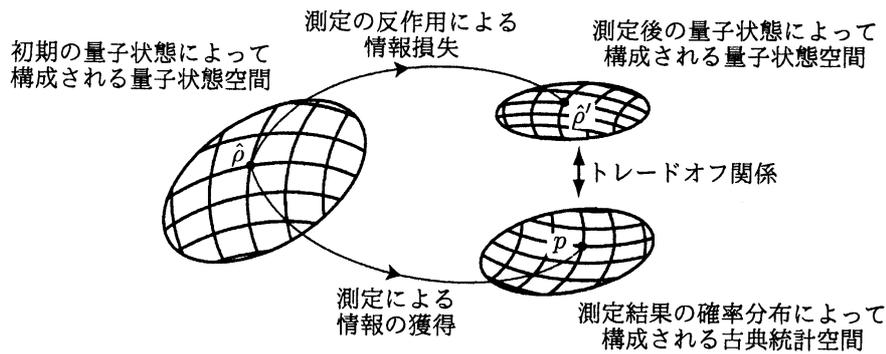


図1 量子測定過程によって量子状態空間から生成される二つの統計空間。それぞれパラメタ  $\theta$  による座標が導入されており (図中では縞模様で模式的に表している)、空間中の各点は量子状態や確率分布を表す。Heisenberg の不確定性関係は、生成されたそれぞれの空間における計量の間トレードオフ関係を表す。

カルではない大局的な性質については未だわかっていないが、今後、量子検定理論など他の問題設定における不確定性関係を議論することで、各空間の大局的な性質についての関係が明らかになるのではないかと予想される。

## 参考文献

- [1] W. Heisenberg, *Zeitschrift für Physik* **43**, 172 (1927), English translation: J. A. Wheeler and H. Zurek, *Quantum Theory and Measurement* (Princeton Univ. Press, New Jersey, 1983), p. 62.
- [2] N. Bohr, *Phys. Rev.* **48**, 696 (1935).
- [3] E. H. Kennard, *Z. Phys.* **44**, 326 (1927).
- [4] H. P. Robertson, *Phys. Rev.* **34**, 163 (1929).
- [5] E. Arthurs and J. L. Kelly, *Bell Syst. Tech. J.* **44**, 725 (1965);
- [6] E. Arthurs and M. S. Goodman, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 2447 (1988).
- [7] M. Ozawa, *Phys. Lett. A* **320**, 367 (2004).
- [8] H. P. Yuen and M. Lax, *IEEE Trans. Inf. Theory* **19**, 740 (1973).
- [9] H. Nagaoka, *Trans. Jpn. Soc. Indust. Appl. Math.* **1**, 305 (1991) (in Japanese), English translation: M. Hayashi, *Asymptotic Theory of Quantum Statistical Inference: selected papers* (World Scientific, Singapore, 2005) p. 133.
- [10] T. Sagawa and M. Ueda, *Phys. Rev. A* **77**, 012313 (2008);
- [11] B.-G. Englert, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 2154 (1996).
- [12] P. Busch and C. Shilladay, *Phys. Rep.* **435**, 1 (2006);
- [13] A. Kuzmich *et al.*, *Phys. Rev. A* **60**, 2346 (1999).
- [14] Y. Takahashi *et al.*, *Phys. Rev. A* **60**, 4974 (1999).
- [15] A. Kuzmich *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 1594 (2000).
- [16] T. Takano *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 033601 (2009).
- [17] K. Kraus, *Annals of Physics* **64**, 311 (1971).

- [18] E. B. Davies, *Quantum Theory of Open Systems* (Academic Press, London, 1976).
- [19] C. W. Helstrom, *J. Stat. Phys.* **1**, 231 (1969).
- [20] A. S. Holevo, *Probabilistic and Statistical Aspects of Quantum Theory*, (North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1982).
- [21] Y. Watanabe, T. Sagawa, M. Ueda, *Phys. Rev. A* **84**, 042121 (2011).
- [22] Y. Watanabe, M. Ueda, arXiv:1106.2526 (2011).
- [23] S. Amari, H. Nagaoka, *Methods of Information Geometry* (AMS, 2007).
- [24] H. Cramér, *Mathematical Methods of Statistics* (Princeton University, Princeton, NJ, 1946).
- [25] C. W. Helstrom, *Phys. Lett. A* **25**, 101 (1967).
- [26] S. L. Braunstein and C. M. Caves, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 3439 (1994).
- [27] Y. Watanabe, T. Sagawa, M. Ueda, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 020401 (2010).
- [28] L. L. Campbell, *Proc. Amer. Math. Soc.* **98**, 135 (1986).
- [29] D. Petz, *Linear Algebra Appl.* **244**, 81 (1996).