

## Lévy measure density corresponding to inverse local time

富崎 松代 (奈良女子大学 理学部)

Matsuyo Tomisaki

Nara Women's University

嶽村 智子 (奈良女子大学 理学部)

Tomoko Takemura

Nara Women's University

区間  $I = (l_1, l_2)$  上の尺度関数  $s$ , スピード測度関数  $m$ , 消滅測度関数  $k$  によって導かれる一次元広義拡散過程を  $\mathbb{D}_{s,m,k}$  [ $l_1$  が  $(s, m, k)$ -regular のとき吸収壁] とし, その作用素を  $\mathcal{G}_{s,m,k}$  とする.  $p(t, x, y)$  を  $\mathbb{D}_{s,m,k}$  の  $m$  に関する推移確率密度とする. ここでは, 端点での状態を Feller に従い regular, exit, entrance, natural とよぶ ([1]).

$\beta \geq 0$  に対して,  $\mathcal{H}_{s,m,k,\beta}$  を正の  $\beta$ -調和関数, すなわち,  $\mathcal{G}h = \beta h$  を満たす  $h$  の全体の集合とする,  $h \in \mathcal{H}_{s,m,k,\beta}$  に対して,

$$p_h(t, x, y) = e^{-\beta t} p(t, x, y) / h(x)h(y)$$

とおくと尺度関数  $s_h$  とスピード密度関数  $m_h$  が次で与えられる一次元拡散過程  $\mathbb{D}_{s_h, m_h, 0}$  [ $l_1$  が  $(s, m, k)$ -regular のとき吸収壁] が得られる. すなわち  $p_h(t, x, y)$  が  $m_h$  に関する推移確率密度となり, 作用素が  $\mathcal{G}_{s_h, m_h, 0}$  で与えられる.

$$s_h(x) = \int_c^x h(x)^{-2} ds(x), \quad m_h(x) = \int_c^x h(x)^2 dm(x), \quad c \in I.$$

ここでは, この変換によって得られる一次元拡散過程の端点での状態が regular の場合, 端点を反射壁とした過程  $\mathbb{D}_{s_h, m_h, 0}^*$  [ $l_1$  が  $(s_h, m_h, 0)$ -regular で**反射壁**] の局所時間の逆に現れるレヴィ測度について議論をする.

一次元拡散過程  $\mathbb{D}_{s,m,k}$  が  $\text{supp}[m] = I$ , 端点  $l_1 : (s, m, k)$ -regular を満たすとき, 推移確率密度関数  $p(t, x, y)$  が次のように表現できることが知られている.

$$p(t, x, y) = \int_{[0, \infty)} e^{-\lambda t} \psi(x, \lambda) \psi(y, \lambda) d\sigma(\lambda), \quad t > 0, x, y \in I,$$

ここで  $d\sigma(\lambda)$  は, 次を満たす.

$$\int_{[0, \infty)} e^{-\lambda t} d\sigma(\lambda) < \infty, \quad t > 0. \tag{1}$$

更に,  $\psi(x, \lambda)$ ,  $x \in I$ ,  $\lambda \geq 0$ , は次の積分方程式の解である.

$$\psi(x, \lambda) = s(x) - s(l_1) + \int_{(l_1, x]} \{s(x) - s(y)\} \psi(y, \lambda) \{-\lambda dm(y) + dk(y)\}.$$

一次元拡散過程  $\mathbb{D}_{s, m, k}$  の端点の状態が regular でない場合, 一般にはスペクトル表現をもつかどうかわからない. しかし, 先で述べた変換を用いると次の結果が得られる.

**命題 ([4])** 端点  $l_1$  が  $(s, m, k)$ -entrance, 次の条件を満たすとする.

$$\int_{(l_1, c_0]} \{s(c_0) - s(x)\}^2 dm(x) < \infty, \quad c_0 \in I,$$

このとき推移確率密度関数  $p(t, x, y)$  が次のように表現できる.

$$p(t, x, y) = \int_{[0, \infty)} e^{-\lambda t} \psi(x, \lambda) \psi(y, \lambda) d\sigma(\lambda), \quad t > 0, x, y \in I,$$

ここで  $d\sigma(\lambda)$  は, (1) を満たし,  $\psi(x, \lambda)$ ,  $x \in I$ ,  $\lambda \geq 0$ , は次の積分方程式の解である.

$$\psi(x, \lambda) = 1 + \int_{(l_1, x]} \{s(x) - s(y)\} \psi(y, \lambda) \{-\lambda dm(y) + dk(y)\}.$$

また一次元拡散過程  $\mathbb{D}_{s, m, k}$  が端点  $l_1 : (s, m, k)$ -regular であるとき, 端点  $l_1$  を反射壁にした一次元拡散過程  $\mathbb{D}_{s, m, k}^*$  が得られ, その端点  $l_1$  での局所時間  $l(t, l_1)$  は, 連続な非減少関数である. その逆を  $\tau^*(t)$  とおく. Itô and McKean によって次のことが知られている.

**命題 ([2])** 次を仮定する.

$$k = 0.$$

$$l_1 \text{ is } (s, m, 0)\text{-regular and reflecting.}$$

$$s(l_2) = \infty.$$

このとき,  $[\tau^*(t), t \geq 0]$  は Lévy 過程となり, Lévy measure density  $n^*(\xi)$  が存在して, 次を満たす.

$$E_{l_1}^* [e^{-\lambda \tau^*(t)}] = \exp \left\{ -t \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda \xi}) n^*(\xi) d\xi \right\},$$

$$n^*(\xi) = \lim_{x, y \rightarrow l_1} D_{s(x)} D_{s(y)} p(\xi, x, y) = \int_{[0, \infty)} e^{-\lambda \xi} d\sigma(\lambda),$$

ここで,  $p(t, x, y)$ ,  $d\sigma(\lambda)$  は,  $\mathbb{D}_{s,m,k}$  に対応した推移確率密度関数とそのスペクトル表現に現れる測度である.

また変換前と変換後の端点での状態には次のような関係がある.

**命題 ([3])**  $l_1$  が  $(s_h, m_h, 0)$ -regular である必要十分条件は,

$$l_1 \text{ is } (s, m, k)\text{-regular and } h(l_1) \in (0, \infty). \quad (2)$$

$$l_1 \text{ is } (s, m, k)\text{-entrance, } h(l_1) = \infty, \text{ and } |m_h(l_1)| < \infty. \quad (3)$$

$$l_1 \text{ is } (s, m, k)\text{-natural, } h(l_1) = \infty, \text{ and } |m_h(l_1)| < \infty. \quad (4)$$

これらの命題により, 変換された一次元拡散過程  $\mathbb{D}_{s_h, m_h, 0}^*$  の端点での局所時間の逆  $\tau^*(t)$  に対応したレヴィ測度  $n^{(h^*)}(\xi)$  は次で与えられる.

**定理**  $h \in \mathcal{H}_{s,m,k,\beta}$ . (2), (3), または, (4) であると仮定し, 更に  $s_h(l_2) = \infty$  とする. このとき  $[\tau^*(t), t \geq 0]$  は Lévy 過程となり, Lévy measure density  $n^{(h^*)}(\xi)$  が存在する. 特に, (2) のとき, 次で与えられる.

$$\begin{aligned} n^{(h^*)}(\xi) &= h(l_1)^2 e^{-\beta\xi} \int_{[0, \infty)} e^{-\xi\lambda} d\sigma(\lambda) \\ &= h(l_1)^2 e^{-\beta\xi} \lim_{x, y \rightarrow l_1} D_{s(x)} D_{s(y)} p(\xi, x, y). \end{aligned}$$

(3) のとき, 次で与えられる.

$$\begin{aligned} n^{(h^*)}(\xi) &= D_s h(l_1)^2 e^{-\beta\xi} \int_{[0, \infty)} e^{-\xi\lambda} d\sigma(\lambda) \\ &= D_s h(l_1)^2 e^{-\beta\xi} \lim_{x, y \rightarrow l_1} p(\xi, x, y). \end{aligned}$$

ここで,  $p(t, x, y)$ ,  $d\sigma(\lambda)$  は,  $\mathbb{D}_{s,m,k}$  に対応した推移確率密度関数とそのスペクトル表現に現れる測度である.

最後に例を述べる.

**例 [Radial Ornstein Uhlenbeck process]**

$$\mathcal{G} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \left( \frac{2\nu + 1}{2x} - \kappa x \right) \frac{d}{dx}, \text{ on } I = (0, \infty),$$

ここで,  $\nu \in \mathbb{R}$ ,  $\kappa > 0$ . このとき, 尺度関数とスピード測度は次で与えられる.

$$ds(x) = x^{-2\nu-1} e^{\kappa x^2} dx, \quad dm(x) = 2x^{2\nu+1} e^{-\kappa x^2} dx,$$

境界での状態は, 右端点 0 は,  $(s, m, 0)$ -exit ( $\nu \leq -1$ ), regular ( $-1 < \nu < 0$ ), entrance ( $0 \leq \nu$ ), 左端点  $\infty$  は,  $(s, m, 0)$ -natural となる. またスペクトル表現を持つための条件を満たすのは, 次のときである.

$$\int_0^1 \{s(1) - s(x)\}^2 dm(x) < \infty \iff |\nu| < 1.$$

(1)  $-1 < \nu < 0$  のとき

$\mathbb{D}^*$ :  $\mathcal{G}$  に対応する一次元拡散過程 [0: 反射壁]

$n^*(\xi)$ : Lévy measure density

とおくと Itô and McKean の手法を用いて得ることができる.  $n^*(\xi)$  は次で与えられる.

$$n^*(\xi) = 2^{-|\nu|+1} \frac{|\nu|}{\Gamma(|\nu|)} \left( \frac{\kappa}{\sinh(\kappa\xi)} \right)^{|\nu|+1} e^{\kappa(\nu+1)\xi}.$$

(2)  $-1 < \nu < -1$  のとき  $\beta > 0$  に対して,

$$h(x) = \left( \frac{\kappa}{2} \right)^{|\nu|/2} \Gamma \left( \frac{|\nu|}{2} - \frac{\nu}{2} + \frac{\beta}{2\kappa} \right) x^{-\nu-1} e^{\kappa x^2/2} W_{-\frac{\beta}{2\kappa} + \frac{\nu+1}{2}, \frac{|\nu|}{2}}(\kappa x^2),$$

$h(x)$  は  $\mathcal{H}_{s,m,0,\beta}$  の元となり, この  $h(x)$  による変換によって次の作用を得る.

$$\mathcal{G}_h = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \left\{ -\frac{1}{2x} + 2\kappa x \frac{W'_{-\frac{\beta}{2\kappa} + \frac{\nu+1}{2}, \frac{|\nu|}{2}}(\kappa x^2)}{W_{-\frac{\beta}{2\kappa} + \frac{\nu+1}{2}, \frac{|\nu|}{2}}(\kappa x^2)} \right\} \frac{d}{dx}.$$

対応する尺度関数, スピード関数は次で与えられる.

$$ds_h(x) = h(x)^{-2} ds(x), \quad dm_h(x) = h(x)^2 dm(x).$$

境界での状態は, 右端点 0 は  $(s_h, m_h, 0)$ -regular, 左端点  $\infty$  は  $s(\infty) = \infty$  を満たす. よって

$\mathbb{D}_h^*$ :  $\mathcal{G}_h$  に対応する一次元拡散過程 [0: 反射壁]

$n_h^*(\xi)$ : Lévy measure density

とおくと定理により  $n_h^*(\xi)$  は次で与えられる.

$$n_h^*(\xi) = 2^{-|\nu|-1} \Gamma(|\nu| + 1) \left( \frac{\kappa}{\sinh(\kappa\xi)} \right)^{|\nu|+1} e^{\{\kappa(\nu+1)-\beta\}\xi},$$

特に  $\beta = \kappa(\nu + 1)$  のとき,

$$\mathcal{G}_h = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \left\{ \frac{1}{2x} + \kappa x \frac{K'_{|\nu|} \left( \frac{\kappa x^2}{2} \right)}{K_{|\nu|} \left( \frac{\kappa x^2}{2} \right)} \right\} \frac{d}{dx},$$

$n_h^*(\xi)$  は次で与えられる.

$$n^*(\xi) = 2^{-|\nu|-1} \Gamma(|\nu| + 1) \left( \frac{\kappa}{\sinh(\kappa\xi)} \right)^{|\nu|+1}.$$

ここで  $K_\alpha$  と  $W_{\alpha,\beta}$  は, 変形された Bessel 関数と Whittaker 関数である.

## 参考文献

- [1] W. Feller, *The parabolic differential equations and the associated semi-groups of transformations*, Ann. of Math., **55** (1952), 468–519.
- [2] K. Itô and H. P. McKean, Jr., *Diffusion Processes and their Sample Paths*, Springer-Verlag, New York, 1974.
- [3] T. Takemura, State of boundaries for harmonic transforms of one-dimensional generalized diffusion processes, Annual Reports of Graduate School of Humanities and Sciences, Nara Women's University, vol. 25, 285-294, 2010.
- [4] T. Takemura and M. Tomisaki,  $h$ -transform of one dimensional generalized diffusion operators, Kyusyu J. Math. **66**(2012), no. 1, 171–191.