

## カオス的な 2 次写像力学系の大偏差原理

京都大学 工学部電気電子工学科 高橋 博樹  
HIROKI TAKAHASI  
DEPARTMENT OF ELECTRONIC SCIENCE AND ENGINEERING,  
KYOTO UNIVERSITY

区間  $X = [-1, 1]$  上の 2 次写像

(1)  $f_a: x \in I \mapsto 1 - ax^2 \quad a > 0$  はパラメーター

の反復合成によるカオス的な力学系に対する大偏差原理を扱う。

「カオス」とは、力学系における軌道の「予測困難な」不規則な振る舞いのことを指す。すなわち、初期値が必然的に含むであろう誤差が力学系の時間発展とともに急速に増大し、長時間にわたる予測を困難にすることを指す。現在では「カオス」は非線型な力学系の時間発展に現れる普遍的な現象であることが理解されている。

(1) のような臨界点を持つ区間上の写像の反復合成は、カオスを示す最も基本的な力学系としてさかんに研究され、次のようなカオスの存在定理が Jakobson により 1970 年代終わり頃に得られた。

**定理.** [3] パラメーター  $a$  の集合  $A \subset (0, 2]$  と  $c > 0$  が存在して次が成り立つ：

- (a)  $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (1/\varepsilon) |A \cap [2 - \varepsilon, 2]| = 1$ . ただし  $|\cdot|$  は Lebesgue 測度を表す;
- (b)  $a \in A$  なら、Lebesgue 測度の意味でほとんどすべての  $x \in I$  に対して

(2) 
$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |Df_a^n(x)| \geq c.$$

初期値  $x$  を指定すれば未来の任意の時刻  $n > 0$  における状態  $f_a^n x$  は一意に定まる。この意味で力学系は決定論的である。しかし、初期値を無限の精度で指定することは実際には不可能であり、さらに  $a \in A$  なら (2) により初期値の小さな誤差が  $n$  が大きくなるとともに指数的に拡大されてしまうため、一般に  $f_a^n x$  の観測値はきわめてでたらめに見えてしまう。そこで  $f_a^n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) を確率過程と見なし、その極限定理を通じてカオス的な 2 次写像力学系の性質を理解することを考える。

カオス的な 2 次写像力学系が大偏差原理を満たすための十分条件は [1] で初めて与えられた。この結果より、大偏差原理が満たされるようなパ

ラメーター  $a$  は少なくとも可算無限個存在することが従う。我々の主結果 [2] は、このようなパラメーター  $a$  が Lebesgue 測度正で存在することを主張する。

主結果を述べる。  $f = f_a$  に対して次を仮定する：

- (A1)  $a$  は 2 に十分近い;
- (A2)  $|Df^n(f_0)| \geq e^{\lambda n} \forall n \geq 0$ ;
- (A3)  $|f^n 0| \geq e^{-\alpha\sqrt{n}} \forall n \geq 1$ ;
- (A4)  $f$  は  $[f^2 0, f_0]$  上で位相混合的である。

ここで  $\lambda = \frac{9}{10} \log 2$ ,  $\alpha = \frac{1}{100}$  である<sup>1</sup>。(A1)-(A4) が成立するようなパラメーター  $a$  の集合の Lebesgue 測度は正であることが知られている。また、(A2) が成立すれば力学系はカオス的になる。

$X$  上のボレル集合族を  $\mathcal{B}$ ,  $X$  上の規格化 Lebesgue 測度を  $m$  とおく。 $X$  上のボレル確率測度全体からなる集合に弱位相を入れて得られる位相空間を  $\mathcal{M}$  とおく。確率空間  $(X, \mathcal{B}, m)$  を考え、 $n \in \mathbb{N}$  に対して確率変数  $\Delta_n: X \rightarrow \mathcal{M}$  を

$$\Delta_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \delta_{f^i x}$$

で定義する。 $\delta_{f^i x}$  は  $f^i x$  での Dirac 測度である。 $\Delta_n$  の分布を  $\mu_n$  とおく。

**定理.** [2, Theorem B] (A1)-(A4) が成立するなら、 $\{\mu_n\}_n$  は大偏差原理を満たす。すなわち下半連続な関数  $I: \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$  が存在して、任意のボレル集合  $\Gamma \subset \mathcal{M}$  に対して

$$-\inf_{\nu \in \Gamma^\circ} I(\nu) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mu_n(\Gamma) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mu_n(\Gamma) \leq -\inf_{\nu \in \bar{\Gamma}} I(\nu).$$

ここで  $\bar{\Gamma}$ ,  $\Gamma^\circ$  はそれぞれ  $\Gamma$  の閉包と内部を表す。また  $\log 0 = -\infty$ , そして関数の空集合上での  $\inf$  は  $\infty$  と約束する。

$I$  はレート関数であり、これは次のように定義される。 $f$  で不変な Borel 確率測度の全体を  $\mathcal{M}_f$  とおく。これは  $\mathcal{M}$  の部分集合である。 $\nu \in \mathcal{M}_f$  の Lyapunov 数を  $\lambda(\nu) = \int \log |Df| d\nu$  で定義する。この値は、真に正であることが知られている。 $\nu$  の Kolmogorov-Sinai entropy を  $h(\nu)$  とおき、関数  $F: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  を

$$F(\nu) = \begin{cases} h(\nu) - \lambda(\nu) & \text{if } \nu \in \mathcal{M}_f; \\ -\infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

で定義する。 $-F$  を下半連続化したものが  $I$  である。すなわち、

$$I(\nu) = -\inf_{\mathcal{G}} \sup \{F(\xi): \xi \in \mathcal{G}\}$$

<sup>1</sup> $0 < \alpha \ll \lambda < \log 2$  を満たすものなら何でもよい。

である。ここで、右辺の  $\inf$  は  $M$  での  $\nu$  の近傍全体にわたってとる。

定理の証明においては、臨界点  $x = 0$  があるため、cumulant 関数の存在を示して Gärtner-Ellis の定理に持ち込むのは困難である。そこで [4, 5] の考え方を使い、直接に大偏差原理の評価をする。依然として臨界点が問題になるため、(A1)-(A4) と確率論的な議論を使って角谷-Rokhlin の摩天楼を構成し、そこから性質のよい部分力学系を抜き出してそれを評価に用いる。摩天楼が無数必要になる点が、[1] と比べて難しい。

#### REFERENCES

- [1] Chung, Y. M.: Large deviations on Markov towers. *Nonlinearity* **24**, 1229–1252 (2011)
- [2] Chung, Y. M. and Takahasi, H.: Multifractal formalism for Benedicks-Carleson quadratic maps. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*. to appear
- [3] Jakobson, M.: Absolutely continuous invariant measures for one-parameter families of one-dimensional maps. *Commun. Math. Phys.* **81**, 39–88 (1981)
- [4] Takahashi, Y.: Entropy functional (free energy) for dynamical systems and their random perturbations. *Stochastic analysis (Katata/Kyoto, 1982)*, North-Holland Math. Library **32**, North-Holland, Amsterdam 437–467 (1984)
- [5] Young, L.-S.: Some large deviation results for dynamical systems. *Trans. Amer. Math. Soc.* **318**, 525–543 (1990)

*E-mail address:* takahasi.hiroki.7r@kyoto-u.ac.jp