

A Dirichlet space on ends of tree and Dirichlet forms with a nodeswise orthogonal property

東京理科大学・理学部・金子 宏

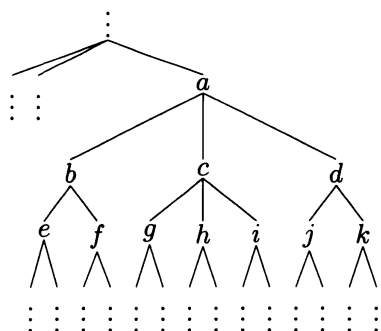
Hiroshi KANEKO

Faculty of Science,

Tokyo University of Science

1. 木構造に付随する完全正規直交系と生成作用素

以図のような階層構造が備わった可算個の頂点からなる集合 $T = \{\dots, a, b, c, \dots\}$ を考える：



このとき T は

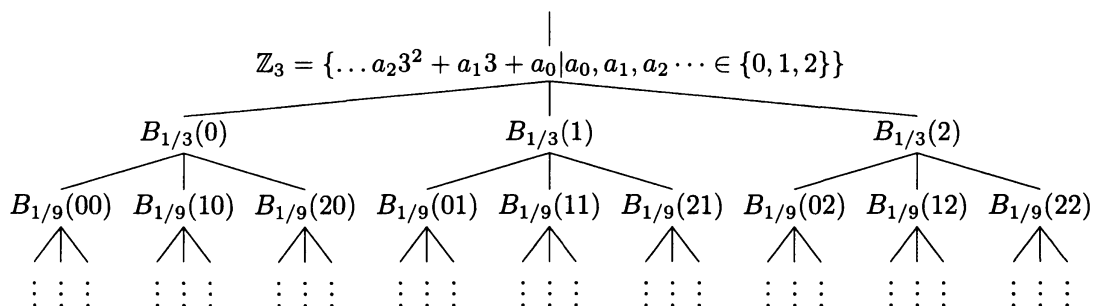
$$T_0 = \{\dots, a, \dots\},$$

$$T_1 = \{\dots, b, c, d, \dots\},$$

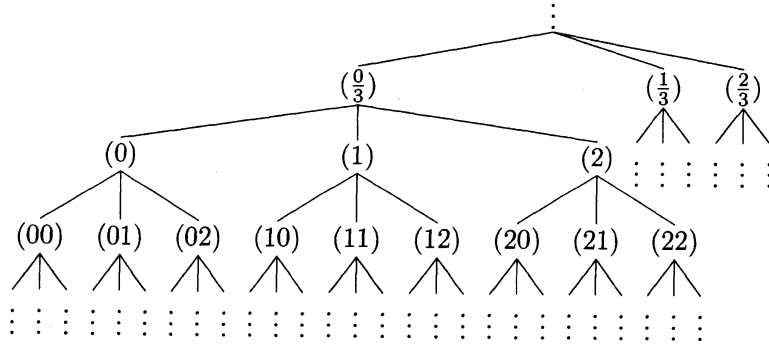
$$T_2 = \{\dots, e, f, \dots, j, k, \dots\}$$

のような共通部分をもなたい部分集合 $\{T_m \mid m \in \mathbb{Z}\}$ に分割される。ここで写像 $\pi : T \rightarrow T$ が $y \in T$ に対して辺 “—” によって y と結ばれる一段階浅い階層にある頂点 x を対応させるものとして定まる。例えば $\pi(b) = a$ である。

3 進整数環 \mathbb{Z}_3 に対応する木構造 $T_{\mathbb{Z}_3}$ は



のように記述される. ここで $B_{1/3}(a_0) = \{\dots a_2 3^2 + a_1 3 + a_0 \mid a_1, a_2 \dots \in \{0, 1, 2\}\}$, $B_{1/9}(a_1 a_0) = \{\dots a_2 3^2 + a_1 3 + a_0 \mid a_2 \dots \in \{0, 1, 2\}\}$ なる球を表す表記を導入した. 限られたスペースに, より複雑な木構造を記述するため $B_{1/3}$ や $1/9$ を省略することにする. このようにすることで 3 進体 $\mathbb{Q}_3 = \{\dots a_2 3^2 + a_1 3 + a_0 + \frac{a_{-1}}{3} + \dots + \frac{a_{-m}}{3^m} \mid a_{-m}, \dots, a_{-1}, a_0, a_1, a_2 \dots \in \{0, 1, 2\}, m \in \mathbb{Z}\}$ に付随する木構造が次のように描かれる:



ここで, \mathbb{Z}_3 は $(\frac{0}{3})$ によって表わされている. 一般に, T に属する頂点の列 $\{a_i\}_{i=0}^\infty$ のうち各 i について $\pi(a_{i+1}) = a_i$ をみたすものを T の端点といいその全体を Σ^+ で記す事にする. より正確に Σ^+ を捕捉するためは, 同値類を用いた概念付けが必要となる. つまり, 上述の列 $\{a_i\}_{i=0}^\infty$ と各 i について $\pi(b_{i+1}) = b_i$ をみたす T の頂点の列 $\{b_i\}_{i=0}^\infty$ が同値であるとは, ある整数 k と十分大きい整数 i について $a_i = b_{i+k}$ がみたされることと定め, この同値類の全体を Σ^+ とおくことが必要である.

Example (p 進体 \mathbb{Q}_p に付随する木構造 $T_{\mathbb{Q}_p}$). p 進体 \mathbb{Q}_p における球の全体を $T_{\mathbb{Q}_p}$ とおき, 各球 B についてハール測度に基づくその測度を $\text{Vol}(B)$ と記す. このとき $B, B' \in T_{\mathbb{Q}_p}$ どちらの関係 $B \sim B'$ を

$B \subset B', p\text{Vol}(B) = \text{Vol}(B')$ あるいは $B' \subset B, p\text{Vol}(B') = \text{Vol}(B)$ であるとき $B \sim B'$ と定める.

写像 π が $B \subset B'$ と $p\text{Vol}(B) = \text{Vol}(B')$ をみたす球 B' をとることにより $\pi(B) = B'$ として定める. また Σ^+ と \mathbb{Q}_p の間の同相写像が定まる. 実際, 端点 $\xi \in \Sigma^+$ が $B_0 \supset B_1 \supset \dots$ をみたす球の列 $\{B_0, B_1, \dots\}$ により定まるものであるとき, 一点 $\{a\} \subset \mathbb{Q}_p$ が $\{a\} = \bigcap_i B_i$ によって与えられる. すなわち $\xi \mapsto a$ は Σ^+ から \mathbb{Q}_p への全単写を与えるが, これは同相写像となっている.

各点 $x \in T$ に対して $S_x = \{y \in T \mid \text{ある非負整数 } k \text{ について } \pi^k(y) = x\}$ とおくことにより $\Sigma_x^+ = \{\xi \in \Sigma^+ \mid \xi \text{ に対して } a_0, a_1, \dots \in S_x \text{ をみたす代表列 } \{a_i\}_{i=0}^\infty \text{ とれる}\}$ が定まる. Σ_x^+ を枝と呼ぶ事にする. ここで, 関数の台や積分範囲を認識する際は下図右側の Σ_x^+ の部分集合を枝にもつような分岐構造を用いるほうが木構造の中での範囲の占める部分が捉えやすくなるであろうが, 関数の変数や行列の成分表示のための添字などとしては, 左側の図のような木構造を念頭におきつつ分岐点に現れるアルファベットを用いるほうが, それらの値の変化が捉えやすくなるであろう. 下図の左右の木構造に本質的差異は全くないが, 表現したい対象に応じて適宜このような使い分けはしてよいこととする.



主な主張を述べるために次の記号を導入する：

- $C^m(\Sigma^+) = \{y \in T_{m+1} \text{ により定まる各 } \Sigma_y^+ \text{ 上で定数値をとる関数}\},$
- $C(\Sigma_x^+) = \{\Sigma_x^+ \text{ の外で零となる関数}\}$ ただし $x \in T,$
- $C_x = C(\Sigma_x^+) \cap C^m(\Sigma^+)$ ここで $x \in T_m,$
- $C_{\pi^k(x)}^x = C_{\pi^k(x)} \cup \dots \cup C_x$ によって張られる $C_{\pi^k(x)}$ の線形部分空間, ここに k は正の整数.

さらに, Σ^+ を台とするラドン測度 μ があるとし $L^2(\Sigma^+; \mu)$ の完全正規直交系 Φ で以下の二つの性質を持つものがあるとする：

$$(i) \Phi_x = \{\varphi \in \Phi \cap C_x \mid (\varphi, 1_{\Sigma^+})_{L^2(\Sigma^+; \mu)} = 0\} \text{ について } \#\Phi_x = \#\{y \in T \mid \pi(y) = x\} - 1,$$

$$(ii) \Phi = \bigcup_{x \in T} \Phi_x,$$

[1] では, 直観的に把握しやすい Markov 過程が Kolmogorov の方程式を解く事によって得られることが見いだされており, そこで得られた Markov 過程には Dirichlet 空間が付随することも示されている. この方法で得られる確率過程の生成作用素の固有関数族は Φ で与えられ, 分岐点毎に与えられた Dirichlet 空間 $\{(\mathcal{E}_x, C_x)\}_{x \in T}$ で $\Phi_x \subset C_x$ を満たすものが設定可能である事も読み取れる. ここで C_x は Φ_x と $1_{\Sigma_x^+}$ によって張られた部分空間とも見なせる. 逆に [4] ではこのような族によって Markov 過程が構成できることが指摘され, 推移確率に対する評価などの確率論的な考察や, 木構造上の Dirichlet 空間論を深化させる形での, 理想境界上の関数の積分量と内包された空間上の調和関数のディリクレ積分との対応性の議論など, ポテンシャル論的な考察を含める形でも研究がなされている. この小論では, これらの既存の研究に倣い $L^2(\Sigma^+; \mu)$ 上の正則 Dirichlet 空間 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ が $\Phi \subset \mathcal{F}$ をみたすとした場合の一般論を整備し, 分岐点毎に与えられた Dirichlet 空間から, 整備された枠を最大限生かしつつ, Markov 過程を構成することを試みる.

2. 既存の仮定から導ける Dirichlet 形式の性質

この節では, $L^2(\Sigma^+; \mu)$ 上の Dirichlet 空間 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ と分岐点毎に与えられた $\{(\mathcal{E}_x, C_x)\}_{x \in T}$ との関係性を Φ_x によって張られる部分空間 $C_{x,0}$ への直交射影 P_x を用いて明確化する.

以下では, $\mathcal{E}(P_x u, 1_{\Sigma_{\pi^l(x)}^+}) = 0$ が各 $x \in T$ と非負整数 l について成立するとする.

ただし, π^0 は T 上の恒等写像を表すとする.

以下の考察では Σ^+ 上の局所可積分関数 u に対して, $\frac{1}{\mu(\Sigma_x^+)} \int_{\Sigma_x^+} u(\eta) \mu(d\eta)$ を $(u)_{\mu,x}$ で表す.

最初に前節の仮定に加えてこれらの条件をみたす $L^2(\Sigma^+; \mu)$ 上の Dirichlet 空間 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ が与えられている場合の $\{\mathcal{E}_x\}_{x \in T}$ の構成を与える.

Proposition 1. 前説の仮定および上記条件をみたす $L^2(\Sigma^+; \mu)$ 上の Dirichlet 空間 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ に対し, \mathcal{C}_x を定義域とする対称な Dirichlet 形式 \mathcal{E}_x が各 $x \in T$ ごとに定まる.

Proof. 次のように対称な二次形式を定めれば良い

$$\mathcal{E}_x(u, v) = \mathcal{E}(u, v) - (u)_{\mu, x}(v)_{\mu, x} \mathcal{E}(1_{\Sigma_x^+}, 1_{\Sigma_x^+}).$$

実際このとき, 次の3つの条件が容易に検証される:

- (i) $\mathcal{E}_x(u, u) \geq 0$ for any $u \in \mathcal{C}_x$,
- (ii) 異なる $y, z \in T$ が $\pi(y) = \pi(z) = x$ を満たすとき $\mathcal{E}_x(1_{\Sigma_y^+}, 1_{\Sigma_z^+}) \leq 0$,
- (iii) Σ_x^+ 上で $v = 1$ のとき全ての $u \in \mathcal{C}_x$ に対し $\mathcal{E}(u, v) = 0$. □

以下では, 異なる $x, y \in T$ に対する $\phi \in \Phi_x, \psi \in \Phi_y$ について $\mathcal{E}(\phi, \psi) = 0$ となるという既存の研究に見られる直交性を仮定すると, 跳躍測度 J にどのような条件が課されることになるかをみる.

Theorem 2. 異なる T の点からなる組 (y, z) の全てに対し $\phi \in \Phi_x, \psi \in \Phi_y$ ならば $\mathcal{E}(\phi, \psi) = 0$ となるための必要十分条件は, 測度 $J(d\eta, d\zeta)$ が直積測度 $\mu(d\eta)\mu(d\zeta)$ に対して絶対連続となり, $\pi(y) = \pi(z)$ をみたす異なる T の点の組 (y, z) に対し, その密度関数の値が変数 $\eta \in \Sigma_y^+, \zeta \in \Sigma_z^+$ に依存しない値をもつことである.

Proof. 最初に $\pi(x) = \pi(y)$ をみたす異なる x, y について

$$J(\Sigma_z^+, \Sigma_y^+) - \frac{\mu(\Sigma_z^+)}{\mu(\Sigma_x^+)} J(\Sigma_x^+, \Sigma_y^+) = -\mathcal{E}(1_{\Sigma_z^+} - (1_{\Sigma_z^+})_{\mu, x}, 1_{\Sigma_y^+})$$

が任意の $\pi(z) = x$ をみたす $z \in T$ について成立することに注目する. この定理の証明の基本方針は, 主張にあるような \mathcal{E} に関する直交性を仮定すると, 枝 Σ_x^+ からの分岐によって枝 Σ_z^+ が出現している場合, 上式左辺に見られるような Σ_x^+ から Σ_z^+ への枝への置き換えによる測度 J の値の変化が $\mu(\Sigma_z^+)/\mu(\Sigma_x^+)$ とどう関係づけられるかを特定すること. 逆に, 主張にあるような測度 J の絶対連続性を仮定する事により, 上述の意味での \mathcal{E} に関する直交性を導くことである.

最初に異なる $x, y \in T$ に対して, $\varphi \in \mathcal{C}_{x,0}, \psi \in \mathcal{C}_{y,0}$ であるかぎり $\mathcal{E}(\varphi, \psi) = 0$ が成立すると仮定する. $1_{\Sigma_x^+}, 1_{\Sigma_y^+} \in \mathcal{F}$ であるので, $\Sigma_x^+ \cap \Sigma_y^+ = \emptyset$ であれば, $J(\Sigma_x^+, \Sigma_y^+) = -\mathcal{E}(1_{\Sigma_x^+}, 1_{\Sigma_y^+})$ となることは容易に確認される. よって, 我々のこれまでの仮定から $\pi(z) = x$ をみたす z について導かれる等式 $\mathcal{E}(P_x 1_{\Sigma_z^+}, 1_{\Sigma_y^+}) = 0$ と, $\pi(x) = \pi(y)$ をみたす異なる x, y について $\frac{1}{\mu(\Sigma_x^+)} 1_{\Sigma_x^+} - \frac{1}{\mu(\Sigma_y^+)} 1_{\Sigma_y^+} \in \mathcal{C}_{\pi(x),0}$ が言えることから $\mathcal{E}(P_x 1_{\Sigma_z^+}, 1_{\Sigma_y^+}) = 0$ が導ける. これにより

$$\begin{aligned} J(\Sigma_z^+, \Sigma_y^+) - \frac{\mu(\Sigma_z^+)}{\mu(\Sigma_x^+)} J(\Sigma_x^+, \Sigma_y^+) &= -\mathcal{E}(1_{\Sigma_z^+} - (1_{\Sigma_z^+})_{\mu, x}, 1_{\Sigma_y^+}) \\ &= -\mathcal{E}(P_x 1_{\Sigma_z^+}, 1_{\Sigma_y^+}) = 0, \end{aligned}$$

が任意の $\pi(z) = x$ をみたす $z \in T$ について成立する.

ここでは $(\frac{1}{\mu(\Sigma_x^+)} \int_{\Sigma_x^+} u(\eta) \mu(d\eta)) 1_{\Sigma_x^+}$ に対して記号 $(u)_{\mu, x}$ を用いている. 以下でも特に断らない限りこの関数を表すものとする. このとき, $u \in \mathcal{C}_x$ に対して $P_x u = u - (u)_{\mu, x}$ なる記述も許容される.

この手順を繰り返すことで, $\Sigma_{z''}^+ \subset \Sigma_x^+$ である限り,

$$J(\Sigma_{z''}^+, \Sigma_y^+) = \frac{\mu(\Sigma_{z''}^+)}{\mu(\Sigma_x^+)} J(\Sigma_x^+, \Sigma_y^+)$$

が $\pi(x) = \pi(y)$ をみたく異なる x, y について示され, よって $J(d\xi, d\eta)$ に関する絶対連続性が導かれる. 逆に, 上述の式の成立から, 逆の流れをたどることにより, $\pi(z) = x \neq y = \pi(w)$ なる状況下での $P_x 1_{\Sigma_x^+} = 1_{\Sigma_x^+} - (1_{\Sigma_x^+})_{\mu, x}$ と $P_y 1_{\Sigma_w^+} = 1_{\Sigma_w^+} - (1_{\Sigma_w^+})_{\mu, y}$ に関する直交性 $\mathcal{E}(P_x 1_{\Sigma_x^+}, P_y 1_{\Sigma_w^+}) = 0$ の成立を導くことができる. \square

測度 $J(d\xi, d\eta)$ が直積測度 $\mu(d\xi)\mu(d\eta)$ に対して絶対連続となるように既存の研究では定式化されていたが, その密度関数が η, ζ を含む最小の枝 Σ_x^+ (すなわち $\eta, \zeta \in \Sigma_x^+$ であり, $\pi(y) = x$ ならば $\eta \notin \Sigma_y^+$ または $\zeta \notin \Sigma_y^+$ であることにより規定される枝 Σ_x^+) 上で定数となる関数として記述されるものに考察の対象が限られていた. この定理が示唆するところは, そのような対象に考察を限定することは必ずしも必然性があるとはいえないということである. この認識に基づき, より広いクラスの Hunt 過程の構成のための Dirichlet 形式の枠組みの提示が可能なことを以下の節で述べる. このような跳躍測度の絶対連続性をもつような $L^2(\Sigma^+; \mu)$ 上の Dirichlet 空間 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ の可閉性の検証は容易である. 実際, 以下の設定に於ける可閉性の検証に困難さが伴わないことは [4] と共通の事情によるものである. その示し方についてはここでは触れないこととする.

3. 各分岐点ごとに与えられた Dirichlet 形式からの Σ^+ 上の Dirichlet 空間の構成

写像 $\lambda : \bar{T} \rightarrow [0, \infty)$ を $\lim_{n \rightarrow \infty} \max\{\lambda(\nu) \mid \nu \in N(\delta_n)\} = 0$ がみたされるようにとる. ここで, $\{\delta_n\}$ は $\delta_0 \in T_0$ かつ, 各自然数 n に対して $\pi(\delta_n) = \delta_{n+1}$ をみたく T の任意固定列であり, $N(x) = \{x\} \times \{1, \dots, n(x)\}$ により $\bar{T} = \bigcup_{x \in \bar{T}} N(x)$ と定めている. ここで正規直交系 Φ_x は $\Phi_x = \{\varphi_\nu \mid \nu \in N(x)\}$ なる記述を許容することを思い出しつつ, $\{\varphi_\nu\}$ によって張られる部分空間 E_ν への $L^2(\Sigma^+; \mu)$ 内の直交射影を P_ν によって表すと

$$\mathcal{E}_x(u, v) = \sum_{\nu \in N(x)} \lambda(\nu) (P_\nu u, P_\nu v)_{L^2(\Sigma^+; \mu)},$$

は $L^2(\Sigma^+; \mu)$ を定義域にもつ対称二次形式である. 定義域を C_x に制限すると $\mathcal{E}_x(u, v)$ は実対称行列 H_x による表示をもつ Dirichlet 形式であることが分かる. この行列表示を正確に述べると, 任意の $\psi \in C_x$ に対して

$$H_x^\mu \begin{pmatrix} \vdots \\ \psi \\ \vdots \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \vdots \\ \varphi_{x,1} \\ \vdots \end{pmatrix} \lambda(x, 1) (\varphi_{x,1}, \psi)_{L^2(\Sigma^+; \mu)} - \begin{pmatrix} \vdots \\ \varphi_{x,2} \\ \vdots \end{pmatrix} \lambda(x, 2) (\varphi_{x,2}, \psi)_{L^2(\Sigma^+; \mu)} \\ \dots - \begin{pmatrix} \vdots \\ \varphi_{x,n(x)} \\ \vdots \end{pmatrix} \lambda(x, n(x)) (\varphi_{x,n(x)}, \psi)_{L^2(\Sigma^+; \mu)}$$

をみたく行列 $(H_x^\mu)_{x_i, x_j} = ((H_x)_{x_i, x_j} \mu(\Sigma_{x_j}^+))$ が H_x に左式の意味での荷重 μ を与えることによって得られるが, この行列により $\mathcal{E}_x(u, v) = -(u, H_x^\mu v)_{L^2(\Sigma^+; \mu)}$ なる表示が可能となるということである. ここに設定した環境下では, H_x は $\sum_{j=1}^{n(x)+1} (H_x)_{x_i, x_j} \mu(\Sigma_{x_j}^+) = 0$ をみたく非正定値対称行列であることと, H_x は対角成分のみに負の成分をもつものであることが含意される.

この節では, いわば各分岐点ごとのランダムネスを記述する族 $\{(\mathcal{E}_x, C_x)\}_{x \in T}$ に基づいて Hunt 過程を構成する. この目的のために $L^2(\Sigma^+; \mu)$ 上の対称二次形式

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\delta_n}^m(u, v) &= \mathcal{E}_{\delta_n}(u, v) \\ &+ \sum_{y \in T_{n+1}, \pi(y)=\delta_n} (\mathcal{E}_y(u, v) + \dots) \\ &+ \sum_{y'' \in T_{m-1}, \pi(y'')=y'} (\mathcal{E}_{y''}(u, v) + \sum_{y''' \in T_m, \pi(y''')=y''} \mathcal{E}_{y'''}(u, v)) \dots \end{aligned} \quad (1)$$

を導入する. この対称二次形式は $\mathcal{E}_{\delta_n}^m(u, v) = \mathcal{E}_{\delta_n}^{m+1}(u, v)$ が $u, v \in C^m(\Sigma^+)$ について成立するという意味で整合的である. Dirichlet 形式 $\{(\mathcal{E}_x, C_x)\}_{x \in T}$ の族を全て反映させた Hunt 過程を構成するためには $n \rightarrow \infty$ とする必要があるが, この手続きの有効性を保障する条件を写像 λ と測度 μ によって分かりやすく与えるために, 以下の式によって与えられる関数族 $\{I^{(m)}\}_{m \in \mathbb{Z}}$ を導入する:

$$I^{(m)}(y, z) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left((H_{[y,z]})_{y,z} - \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\lambda}(\pi^i([y,z])) \left(\frac{1}{\mu(\Sigma_{\pi^{i-1}([y,z])}^+)} - \frac{1}{\mu(\Sigma_{\pi^i([y,z])}^+)} \right) \right) & \text{if } y, z \in T_{m+1}, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\lambda}([y,z])}{\mu(\Sigma_{[y,z]}^+)} - \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\lambda}(\pi^i([y,z])) \left(\frac{1}{\mu(\Sigma_{\pi^{i-1}([y,z])}^+)} - \frac{1}{\mu(\Sigma_{\pi^i([y,z])}^+)} \right) \right) & \text{if } y, z \in T_{m+\ell} \\ 0 & \text{for some } \ell \leq 0, \\ & \text{otherwise} \end{cases}$$

ここで, $[y, z]$ は $\Sigma_y^+, \Sigma_z^+ \subset \Sigma_x^+$ をみたす最小の枝 Σ_x^+ を定める x , すなわちこの包含関係をみたし, $\pi(w) = x$ なる w については $\Sigma_y^+, \Sigma_z^+ \subset \Sigma_w^+$ とはならないような $x \in T$ として定義されている. 以下では, これらの個々の関数は $D_T = \{(x, y) \in T \times T \mid \pi(x) = \pi(y), x \neq y\}$ で定義されているものとして, 右辺の和がいずれも収束し, 負の値を取らないように定まっていると仮定する. 以下の論理展開の中でこの条件記述に間接的な関わりをみせる Dirichlet 形式 $\sum_{\nu \in N(x)} \lambda(x)(P_\nu u, P_\nu v)_{L^2(\Sigma^+; \mu)}$ を $\bar{\lambda}(x) = \max_{\nu \in N(x)} \lambda(\nu)$ によって定まるものとして同時並行的に導入し, それを $\bar{\mathcal{E}}_x(u, v)$ によって表す. これに対応する形でさらに D_T で定義された関数列の族 $\{I_k^{(m)} \mid m \in \mathbb{Z}, k = 1, 2, \dots\}$ を

$$I_k^{(m)}(y, z) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left((H_{[y,z]})_{y,z} - \sum_{i=1}^k \bar{\lambda}(\pi^i([y,z])) \left(\frac{1}{\mu(\Sigma_{\pi^{i-1}([y,z])}^+)} - \frac{1}{\mu(\Sigma_{\pi^i([y,z])}^+)} \right) \right) & \text{if } y, z \in T_{m+1}, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\lambda}([y,z])}{\mu(\Sigma_{[y,z]}^+)} - \sum_{i=1}^k \bar{\lambda}(\pi^i([y,z])) \left(\frac{1}{\mu(\Sigma_{\pi^{i-1}([y,z])}^+)} - \frac{1}{\mu(\Sigma_{\pi^i([y,z])}^+)} \right) \right) & \text{if } y, z \in T_{m+\ell} \text{ for} \\ 0 & \text{some } 1 - k \leq \ell \leq 0, \\ & \text{otherwise} \end{cases}$$

によって定めると, 上に課した $I^{(m)}$ に関する非負実数値条件のもとではこれも非負値関数列の族となることがわかる.

最初に, 個々の $\mathcal{E}_{\delta_n}^m$ が Dirichlet 形式であることを検証するために, Proposition 1 の (1) から (3) の条件を \mathcal{E}_x の代わりに $\mathcal{E}_{\delta_n}^m$ に置き換えて示す必要がある. (1) については, 対称二次形式の値が $n \rightarrow \infty$ なる極限操作によっても発散せず有限値確定性があることを示す必要がある. それに関しては最後に述べる定理の証明でその示し方の概略を述べる事にする. ところで, (3) を示す際には行列 $(H_{[y,z]})_{y,z}$ の対角成分を扱う事と併せて, 上記関数列に属する関数の $y = z$ に於ける値を補う必要がでてくる. この場合, Σ を取る際に表れる各項は $[y, z]$ にのみ依存し, $[y, z] = \pi(y) = \pi(z)$ を実現する異なる y, z の取り方に依存しない. このことは, まさに後出の Remark で扱う非対角成分が同一値であるような行列の対角成分の値設定と合致した扱い方をすれば解決することを示している. これは注意深い考察により [4] からの咀嚼も可能な事柄であるため, ここからは (2) を示すための方法の概略を述べる.

異なる Σ^+ の点の組 η, ζ に対し, T の異なる点の組 (y, z) で $\eta \in \Sigma_y^+, \zeta \in \Sigma_z^+$, $\pi(y) = \pi(z)$ なるものを $\Pi(\eta, \zeta)$ と記す.

このとき, $u, v \in C_{\pi(x)}^x$ に対して

$$F_1^{(u,v)}(\eta, \zeta) = \frac{1}{2} \left(H_{[\Pi(\eta, \zeta)]}(\Pi(\eta, \zeta)) - \left(\frac{\bar{\lambda}(\pi([y, z]))}{\mu(\Sigma_{[y,z]}^+)} - \frac{\bar{\lambda}(\pi([y, z]))}{\mu(\Sigma_{\pi([y,z])}^+)} \right) \right) (u(\eta) - u(\zeta))(v(\eta) - v(\zeta)).$$

とおく. この関数の有効性を $x \in T_0$ を選びつつ一言で言うと, $F_1^{(u,v)}(\eta, \zeta) = I_1^{(0)}(\Pi(\eta, \zeta))(u(\eta) - u(\zeta))(v(\eta) - v(\zeta))$ とおくことにより, $\mathcal{E}_{\pi(x)}^x$ に関する (2) の検証のために関数 $I_1^{(0)}$ の非負性を生かすことができるのである. 実際, 最初に対称二次形式 $\tilde{\mathcal{E}}_{\pi(x)}^x(u, v) = \mathcal{E}_x(u, v) + \bar{\mathcal{E}}_{\pi(x)}(u, v)$ についての表現

$$\tilde{\mathcal{E}}_{\pi(x)}^x(u, v) = \int_{\Sigma_{\pi(x)}^+} \int_{\Sigma_{\pi(x)}^+} F_1^{(u,v)}(\eta, \zeta) \mu(d\eta) \mu(d\zeta)$$

が得られることに注目できる. この等式自体は,

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma_x^+ \times (\Sigma_{\pi(x)}^+ \setminus \Sigma_x^+)} F_1^{(\varphi_\nu, v)}(\xi, \eta) \mu(d\xi) \mu(d\eta) &= \frac{1}{2} \sum_{y \in S^+ \setminus \{\pi(x)\}} \frac{\bar{\lambda}([x, y])}{\mu(\Sigma_{[x,y]}^+)} (\varphi_\nu, v)_{L^2(\Sigma^+; \mu)} \mu(\Sigma_y^+) \\ &= \frac{1}{2} \left(\bar{\lambda}(\pi(x)) - \frac{\bar{\lambda}(\pi(x))}{\mu(\Sigma_{\pi(x)}^+)} \mu(\Sigma_x^+) \right) (\varphi_\nu, v)_{L^2(\Sigma^+; \mu)} \end{aligned}$$

が任意の $\varphi_\nu \in \Phi_x$ について言えることなどからわかる. $\mathcal{E}_{\pi(x)}^x$ に関する (2) の検証に話を戻すと, 異なる T の点 z, z' で $\pi(z) = \pi(z') = x$ を満たすものについては, $I_1^{(0)}$ の非負性より $\tilde{\mathcal{E}}_{\pi(x)}^x(1_{\Sigma_z^+}, 1_{\Sigma_{z'}^+}) \leq 0$ であるが, この不等式と

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\pi(x)}^x(u, v) &= \mathcal{E}_{\pi(x)}^x(u - (u)_{\mu,x} + (u)_{\mu,x}, v - (v)_{\mu,x} + (v)_{\mu,x}) \\ &= \mathcal{E}_{\pi(x)}^x(u - (u)_{\mu,x}, v - (v)_{\mu,x}) + \mathcal{E}_{\pi(x)}^x(u - (u)_{\mu,x}, (v)_{\mu,x}) \\ &\quad + \mathcal{E}_{\pi(x)}^x((v)_{\mu,x}, (u)_{\mu,x}) + \mathcal{E}_{\pi(x)}^x((u)_{\mu,x}, (v)_{\mu,x}) \\ &= \mathcal{E}_{\pi(x)}^x((u)_{\mu,x}, (v)_{\mu,x}) + \mathcal{E}_{\pi(x)}^x(u - (u)_{\mu,x}, v - (v)_{\mu,x}) \\ &= \mathcal{E}_{\pi(x)}^x((u)_{\mu,x}, (v)_{\mu,x}) + \mathcal{E}_{\pi(x)}^x(u - (u)_{\mu,x}, v - (v)_{\mu,x}) \\ &= \mathcal{E}_{\pi(x)}^x((u)_{\mu,x}, (v)_{\mu,x}) + \mathcal{E}_x(u, v) \end{aligned}$$

において $u = 1_{\Sigma_z^+}, v = 1_{\Sigma_{z'}^+}$ とおいて得られる式との組み合わせにより $\mathcal{E}_{\pi(x)}^x(1_{\Sigma_z^+}, 1_{\Sigma_{z'}^+}) \leq \bar{\mathcal{E}}_{\pi(x)}^x((1_{\Sigma_z^+})_{\mu,x}, (1_{\Sigma_{z'}^+})_{\mu,x}) + \mathcal{E}_x(1_{\Sigma_z^+}, 1_{\Sigma_{z'}^+}) = \tilde{\mathcal{E}}_{\pi(x)}^x(1_{\Sigma_z^+}, 1_{\Sigma_{z'}^+}) \leq 0$ が導かれるのである. 記号 $(u)_{\mu,x}$ については引き続き $(\frac{1}{\mu(\Sigma_x^+)} \int_{\Sigma_x^+} u(\eta) \mu(d\eta)) 1_{\Sigma_x^+}$ を表すために用いているが, 上述の議論では, $u \in C_x$ に対して $P_x u = u - (u)_{\mu,x}$ なる記述が許容されること, および $\mathcal{E}_{\pi(x)}^x$ には前節の意味での直

交性が備わっていることも用いている。

Remark. [4]においては、各 $x \in T$ について、行列 $(H_{[y,x]})_{y,z}$ が $\pi(y) = \pi(z) = x$ をみたす異なる y, z に対して $(H_{[y,x]})_{y,z} = \frac{\lambda(x)}{\mu(\Sigma_x^+)}$ によって与えられる場合が扱われているが、これは我々の設定と整合的であることを検証することができる。これは一般的にも同様に検証できることなので、ここでは $\mu(\Sigma_x^+) = 1$ がみたされ、かつ $\pi^{-1}(\{x\})$ が3点集合 $\{y, z, w\}$ となる特別な場合の検証方法を述べる。正の実数 $\alpha = \mu(\Sigma_y^+), \beta = \mu(\Sigma_z^+), \gamma = \mu(\Sigma_w^+)$ を導入し、ベクトルの成分を y, z, w に対応する順番で上から書き並べることにより $\varphi_{x,1} = \varphi_x =$

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha(\beta+\gamma)}} \begin{pmatrix} \beta+\gamma \\ -\alpha \\ -\alpha \end{pmatrix}, \varphi_{x,2} = \frac{1}{\sqrt{(\beta+\gamma)\beta\gamma}} \begin{pmatrix} 0 \\ -\gamma \\ \beta \end{pmatrix}$$

を $C_{0,x}$ の基底としてとることができるが、後者のベクトルは $\varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{\beta(\alpha+\gamma)}} \begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha+\gamma \\ -\beta \end{pmatrix}, \varphi_3 = \frac{1}{\sqrt{\gamma(\alpha+\beta)}} \begin{pmatrix} -\gamma \\ -\gamma \\ \beta+\alpha \end{pmatrix}$ の一次結合で表され

る。行列 $H_x = \lambda(x) \begin{pmatrix} -(\beta+\gamma)/\alpha & 1 & 1 \\ 1 & -(\alpha+\gamma)/\beta & 1 \\ 1 & 1 & -(\alpha+\beta)/\gamma \end{pmatrix}$ については直接計算により

$H_x^\mu \varphi_i = \lambda(x) \varphi_i$ ($i = 1, 2, 3$) が成立することから

$$H_x^\mu \begin{pmatrix} \vdots \\ \psi \\ \vdots \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \vdots \\ \varphi_{x,1} \\ \vdots \end{pmatrix} \lambda(x) (\varphi_{x,1}, \psi)_{L^2(\Sigma^+; \mu)} - \begin{pmatrix} \vdots \\ \varphi_{x,2} \\ \vdots \end{pmatrix} \lambda(x) (\varphi_{x,2}, \psi)_{L^2(\Sigma^+; \mu)}$$

が任意の $\psi \in C_x$ について成立することが導かれる。

次の主張では、記号 $(u)_{\mu,x}$ で再び $(\frac{1}{\mu(\Sigma_x^+)} \int_{\Sigma_x^+} u(\eta) \mu(d\eta))$ を表すことにする。

Theorem 3. $\{I^{(m)}\}_{m \in \mathbb{Z}}$ に属する各関数が非負実数値をとるものとして定まるならば、正則な $L^2(\Sigma^+; \mu)$ 上の Dirichlet 空間 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ が各 $x \in T$ に対して

$$\mathcal{E}_x(u, v) = \mathcal{E}(u, v) - (u)_{\mu,x} (v)_{\mu,x} \mathcal{E}(1_{\Sigma_x^+}, 1_{\Sigma_x^+})$$

なる性質が備わるものとして構成される。ただし、上記条件に於いて u, v は C_x の任意の要素である。

Proof. ここでは、どのような m に対しても各 $x \in T_{m+1}$ について $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}_{\delta_n}^m(1_{\Sigma_x^+}, 1_{\Sigma_x^+}) < \infty$ となることを検証する。 $\pi^{m+1}(x) = \delta_0$ としても一般性を失わないため、この有限値確定性を導くためには、

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{E}}_{\delta_n}^m(u, v) &= \bar{\mathcal{E}}_{\delta_n}(u, v) \\ &+ \sum_{y \in T_{n+1}, \pi(y) = \delta_n} (\bar{\mathcal{E}}_y(u, v) + \dots) \\ &+ \sum_{y'' \in T_{m-1}, \pi(y'') = y'} (\bar{\mathcal{E}}_{y''}(u, v) + \sum_{y''' \in T_m, \pi(y''') = y''} \bar{\mathcal{E}}_{y'''}(u, v)) \dots \end{aligned} \quad (2)$$

に対して, $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\mathcal{E}}_{\delta_n}^m(1_{\Sigma_x^+}, 1_{\Sigma_x^+}) < \infty$ が導かれれば良い. このために $k = n + m$ とおき,

$$\bar{I}_k^{(m)}(y, z) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\lambda}([y, z])}{\mu(\Sigma_{[y, z]}^+)} - \sum_{i=1}^k \bar{\lambda}(\pi^i([y, z])) \left(\frac{1}{\mu(\Sigma_{\pi^{i-1}([y, z])}^+)} - \frac{1}{\mu(\Sigma_{\pi^i([y, z])}^+)} \right) \right) & \text{if } y, z \in T_{m+1}, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\lambda}([y, z])}{\mu(\Sigma_{[y, z]}^+)} - \sum_{i=1}^{k-\ell-1} \bar{\lambda}(\pi^i([y, z])) \left(\frac{1}{\mu(\Sigma_{\pi^{i-1}([y, z])}^+)} - \frac{1}{\mu(\Sigma_{\pi^i([y, z])}^+)} \right) \right) & \text{if } y, z \in T_{m+\ell} \text{ for} \\ 0 & \text{some } 1 - k \leq \ell \leq 0, \\ & \text{otherwise} \end{cases}$$

を用いて, $\bar{F}_k^{(u, v)}(\eta, \zeta) = \bar{I}_k^{(m)}(\Pi(\eta, \zeta)(u(\eta) - u(\zeta))(v(\eta) - v(\zeta)))$ と定めれば, このとき,

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{E}}_{\delta_n}^m(1_{\Sigma_x^+}, 1_{\Sigma_x^+}) &= 2 \sum_{i=1}^k \int \int_{\Sigma_x^+ \times (\Sigma_{\pi^i(x)}^+ \setminus \Sigma_{\pi^{i-1}(x)}^+)} \bar{F}_k^{(1_{\Sigma_x^+}, 1_{\Sigma_x^+})}(\xi, \eta) \mu(d\xi) \mu(d\eta) \\ &= \mu(\Sigma_x^+) \left\{ \frac{\bar{\lambda}(\pi(x))}{\mu(\Sigma_{\pi(x)}^+)} + \sum_{\ell=2}^k \bar{\lambda}(\pi^\ell(x)) \left(\frac{1}{\mu(\Sigma_{\pi^{\ell-1}(x)}^+)} - \frac{1}{\mu(\Sigma_{\pi^\ell(x)}^+)} \right) \right\} \end{aligned}$$

である. これらの考察により, $I^{(m)}$ が実数値関数であることから $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\mathcal{E}}_{\delta_n}^m(1_{\Sigma_x^+}, 1_{\Sigma_x^+}) < \infty$ が導ける. この結果を踏まえれば, 連続関数の族 Φ についての包含関係 $\Phi \subset \mathcal{F}$ がわかるため, 正則性の検証も容易となる. 主張の中にある等式の導出は, \mathcal{E} に第 2 節の意味での直交性が備わっているため困難ではない. \square

Example. 各頂点 x に単一の固有値 $\bar{\lambda}(x)$ のみが付随し, \mathcal{D}_T 上の関数

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\lambda}([y, z])}{\mu(\Sigma_{[y, z]}^+)} - \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\lambda}(\pi^i([y, z])) \left(\frac{1}{\mu(\Sigma_{\pi^{i-1}([y, z])}^+)} - \frac{1}{\mu(\Sigma_{\pi^i([y, z])}^+)} \right) \right)$$

が正の値をとる場合を考える. これは $\bar{\lambda}(x)$ が $\bar{\lambda}(x) > \bar{\lambda}(\pi(x))$ を各 $x \in T$ においてみたすときなどに実現される場合がある. ここで考察されている場合は $x \in T$ に付随する複数の固有値がたまたま一致を見ている状況として捉える事ができる. そこで, 各頂点 x に付与された複数の固有値の一つに下方修正を施すと最大固有値は $\bar{\lambda}(x)$ として保たれ, さらに必要ならば下方修正の値の変化量を少なく抑制すれば, $I^{(m)}$ が \mathcal{D}_T 上非負値であるようにできる. このように各頂点に付与される固有値が同一でなくても Hunt 過程の構成が可能な場合がある事を知る.

References.

- [1] S. Albeverio and W. Karwowski, Jump processes on leaves of multibranching trees, J. Math. Phys. 49 (2008), 093503, 20pp.
- [2] Z.-Q. Chen and M. Fukushima, Symmetric Markov processes, time changes, and boundary-theory, Princeton University Press, Princeton, (2012).
- [3] J. Kigami, Dirichlet forms and associated kernels on the Cantor set induced by random walks on trees, Advances in Math. 225 (2010) 2674-2730.
- [4] J. Kigami, Transitions on a noncompact Cantor set and random walks on its defining tree, preprint (2011).