数理解析研究所講究録
第 1855 巻 2013 年 229-235

Rotation invariant α-stable process から導かれる SDE のオイラー丸山近似の収束について

Takahiro Tsuchiya*[1] and Hiroya Hashimoto[2],

[1] Department of Computer Science and Engineering,
The University of Aizu,
Tsuruga, Ikki-machi, Aizu-Wakamatsu City, Fukushima 965-0826, Japan
[2] BKC Research Organization of Social Sciences,
Ritsumeikan University,
1-1-1 Noji-higashi, Kusatsu, Shiga 525-8577, Japan

ABSTRACT. Wiener 過程から駆動される確率微分方程式について, Delbaen et. al. [3] はドリフト項が正で拡散項が (1/2)-Hölder 連続性が成り立つ時に山田の手法 [23] を用いることで Euler-丸山近似の L^1-supnorm で収束し, さらにその収束の速さを明示的に評価できることを示した. さらに収束の速さは拡散項が支配的であることが知られている. 本論文では Rotation invariant α-stable 過程から駆動される飛躍型の確率微分方程式に焦点をあて, その Euler-丸山近似の強収束について考える. 拡散項が $(\frac{\alpha}{2}+\gamma)$-Hölder 連続性を有する場合について, その収束の速さを評価する.

1. INTRODUCTION

1.1. Probability theorey. 次の一次元確率微分方程式を考える.

$$X(t)=X(0)+\int_{0}^{t}b(X(s))ds+\int_{0}^{t}\sigma(X(s))dW_{s}. \tag{1}$$

ドリフト項 b と拡散項 σ が Lipschitz 連続性を持つときにピカール近似によって解が構成出来ることを伊藤が [13] において示した. そして Euler 近似の手法を用いて解が得られることを示したのは丸山 [18] による. すなわち解 X に対して, ある時間の分割 $(t_{k})_{k=0,1,\cdots,n}$ に対して $X_{n}(0):=X(0)$,

$$X_{n}(t):=X_{n}(\eta_{n}(t))+\int_{\eta_{n}(t)}^{t}b(X_{n}(\eta_{n}(s)))ds+\int_{\eta_{n}(t)}^{t}\sigma(X_{n}(\eta_{n}(s)))dW_{s},$$

と定義できるときに X_{n} を Euler-丸山近似と呼ぶことにする. ただし, $\eta_{n}\equiv\eta$ は $t\in[t_{k-1},t_{k})$ であれば $\eta_{n}(t)=t_{k}$ とする.

さて確率微分方程式 (1) の係数が Lipschitz 連続性より一般のクラスへの拡張は, 弱解の意味において Stroock と Varadhan による [20] など, 他にも多数あるが本論文では強解に焦点を当てて考える. 渡邉・山田は [22] において弱解と強解, および一意性との関連を分析した. 荒っぽく言えば “解の道ごとの一意性” に “弱い意味での解の存在” が保証されれば, その解は与えられた確率空間で実現できる強い解になる. さらに山田・渡邉 [24] の論文において, 解の道ごとの一意性が成り立つクラスが連続率の概念を用いて特徴付けられた. その連続率が崩れると時間変換を用いて異なる弱解が構成できることから, 連続性の条件が極めてシャープである事も明らかにした. この条件を山田渡邉の条件という.

ところで “解の道ごとの一意性が成り立つときに Euler-丸山近似によって解を構成することが出来るか?”, この問は山田 [23] によって考えられ, 一次元の確率微分

*E-mail: suci@probab.com
This research is partially supported by the University of Aizu Competitive Research Funding for FY 2012.

方程式で係数が山田渡邉の条件を満せば解が構成できることを示した．また解の構築について“滑らかな拡散項 σ_n から対応する解 X_n を考えて，その解の性質がどこまで広がられるか?”という解の安定性問題は川端・山田 [15] によって提案され，一次元の場合に山田渡邉の条件のもとで示されている．さらに Euler-丸山近似と解の安定性問題は様々な人々の手で拡張され，多次元の確率微分方程式にまで昇華させた金子・中尾 [14] の仕事によって完成されたといえる．また関連する問題を Veretennikov が [21] で行なっており，“道ごとの一意性が成立する条件の下で解を構成できないか?”という視点から考察を重ねた．Gyönly et al. は [5] そのフィロソフィーを受け継いで，拡散項とドリフト項が不連続であっても，Euler-丸山近似によって解の構成ができることを明示した．以上からドリフト項と拡散項において，このようにして係数が不連続な場合であっても，道ごとの一意性が成り立てば解の存在が保証されることがわかった．

次に「解の道ごとの一意性」が成り立つ条件について記述する．係数が連続である場合は先の山田渡邉 [24] によって解決している．一方で不連続な拡散項は数学的に豊かなクラスであるといえる．例えば $\sigma(x) = \alpha^{-1}1_{(x\geq 0)} + (1-\alpha)^{-1}1_{(x<0)}$ であって $\alpha \in (0,1)$ で与えられドリフトはない, i.e. $b \equiv 0$, 確率微分方程式 (1) の解を考える．この解は scale 関数と speed 測度によって, Skew Brownian 運動との対応が知られている，例えば [7]. このクラスについて中尾が [19] において，拡散項 σ が正で有界変動関数であれば，解の道ごとの一意性が成り立つことを示した．そして Le Gall は局所時間との関係性から連続な semi-martingale の二次変動が有界であれば，解は道ごとの一意性を持つことを示した．この Le Gall の特徴付けは，先の山田渡邉 [24] の連続率によるクラスや，中尾によって発見された条件の一般化になっている．さらに拡散項の有界変動性の仮定を除外して良いことも示した．ゆえに，確率微分方程式における道ごとの一意性が成り立つための条件をこの論文では中尾-Le Gall 条件と呼ぶことにする，これらの仕事は道ごとの一意性が成立するクラスであって，その存在が既に言えているので強い解になる．以上から係数が連続な場合は山田渡邉条件，不連続な場合は中尾-Le Gall 条件において強い解が一意的に存在することが示された．

1.2. **Applied Mathematics.** Euler-丸山近似については応用の分野で幅広く用いられており，典型的な研究対象は Lipschitz 条件が満たされている場合であり，近似の方法まで遡って多くの文献がある．例えば Kloeden and Platen [16] を見よ．特に応用的な観点から解とその近似の差であるノルム $\|X_n - X\|$ に興味がある．最近は特に強い意味での収束，

$$\|X_n - X\| = \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |X(t) - X_n(t)|\right],$$

を non-Lipschitz の場合において応用数学分野で研究が盛んにされている．これは応用される確率微分方程式の係数が局所的な Lipschitz 条件のみしか満たさない場合が少なくないことにある．そこで Higman et al. は [11] において，局所 Lipschitz 条件のもとで Euler-丸山近似が収束するためには，解 X とその近似 X_n について $(2<)p$ 次の可積分性，L^p 性が必要であることを示した．さらに大域的片側 Lipschitz 条件の場合は，解 X とその近似 X_n は自然に L^p 性を満たすことも明らかにした．ところが Kloeden et al. によるごく最近の結果 [12] において，ドリフト項が線形増大性より増大性が大きい場合，super-linear growth と呼ぶ，その解 X が L^p 性を有していても，Euler-丸山近似 X_n の期待値は L^p ノルムで無限大になることを示した．

1.3. **Mathematical finance.** この近似の問題について，数理ファイナンスでは特に収束の速さが重要な問題となる．まず次の以下の確率微分方程式を考える，

$$dX(t) = (2\beta X(t) + \delta(t))\,dt + g(X(t))dW(t), \tag{2}$$

ただし $(W(t))_{t\geq 0}$ は Wiener 過程で，$X(0)\geq 0, \beta\leq 0$. また δ は正値の 2 乗可積分な適合的な可測関数で $\int_0^t \delta^2(s)ds < +\infty$ a.s. が任意の $t\geq 0$ で成立すると仮定する．また g は (1/2)-Hölder 連続性を持つとする，$|g(x)-g(y)|\leq K|x-y|^{\frac{1}{2}}$, $K>0$. この解は一意的で強解となり，また比較定理が成り立つので，解は $\mathbb{R}_+ := [0,\infty)$ を動く事が知られている．この確率微分方程式 (2) は数理ファイナンスにおいて瞬間金利を記述する際などに重要な役割を果たす．

さて $n\in\mathbb{N}$ とし，区間 $[0,T]$ の n 等分割を考え，それを $\Delta_n = \{t_k = kT/n\}_{k=0,\cdots,n}$ とする．Delbaen et al. らは [3] においてここで Euler-丸山近似 $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を考える時に $g_+(x) := g(x1_{(x>0)})$ を採用した．もし $\sup_{u\in[0,\infty)}\delta(u)\in L^1$ であれば上記の意味での Euler-丸山近似 $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の解の収束は L^1-supnorm において収束し，加えてその収束のオーダーは，後に紹介する山田の方法 [23] を用いて，ある定数 $c>0$ で

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|X(t)-X_n(t)|\right]\leq \frac{c}{\sqrt{n}}$$

と評価できることを示した．すなわち，ランダム性を持つ正のドリフト項で，拡散項は (1/2)-Hölder 連続性を持てば Lipschitz 条件を課した場合と同じ近似の収束が得られる事を示した．

この結果に関連する興味深い報告に Alfosi による論文 [1] がある．彼らはドリフト項がより具体的に定数 $c\geq 0$ を用いて，

$$dX(t) = (2\beta X(t)+c)\,dt + g(X(t))dW(t), \tag{3}$$

で与えられる確率微分方程式を考え，特にドリフト項が拡散項に比較して小さい場合は収束が遅くなることを数値計算で観察し，実際に Lipschitz 条件を有する非負のドリフトでは

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|X(t)-X_n(t)|\right]\leq \frac{c}{\sqrt{\log n}},\ c>0$$

であることを示した．この違いは解が 0 付近にある時に，拡散項の連続率に伴って収束が鈍くなること理解できる．また彼らは Euler-丸山近似を構成する際に $g_{||}(x) := g(|x|)$ として採用していることに注意する．

そして Gyöngy et. al. [6] は拡散項の連続性について次のような特徴付けを行った．

$$dX(t) = b(t,X(t))dt + \sigma(t,X(t))dW(t), \tag{4}$$

を考える．ここで b は Lipschitz 連続関数で σ は $(\frac{1}{2}+\gamma)$-Hölder 連続性を満たするとする: $|\sigma(t,x)-\sigma(t,y)|\leq K|x-y|^{\frac{1}{2}+\gamma}$, $K>0$. ただし $\gamma\in[0,\frac{1}{2})$. 彼らは [6] において L^1-norm における収束の速さが上から山田の方法を用いて

$$E[|X_n(t)-X(t)|]\leq \begin{cases} C/(\log n), & \gamma=0 \\ C/n^{\gamma}, & \gamma>0 \end{cases} \tag{5}$$

C は正の定数として評価でき，それを用いて L^p-supnorm などの評価を得ている．この報告によって，ドリフト項が Lipschitz 連続であれば，収束の速さは拡散項が支配的で，しかも (1/2)-Hölder 連続性のところで収束が鈍くなる可能性を示唆している．

以上から確率微分方程式において，Euler-丸山近似の収束の早さを L^1-norm などの強い意味で捉えるときは，拡散項の収束が本質的に効いてきて，かつその連続性に大きく依存している可能性があると考えられる．

2. SαS DRIVEN SDEs

確率微分方程式は Wiener 過程から駆動さるものを考え，それがより一般のクラス，ジャンプがある場合にその収束の早さにどのような影響があるかを考えたい．特に

ジャンプの度合いをパラメータ α で表現できる Rotation invariant α-stable 過程[2]について収束の早さを評価を知りたい.

また Z による確率積分をマルチンゲールとして捉えたいので $1<\alpha<2$ としておく. すなわち, Rotation invariant α-stable 過程 $(Z(t))_{t\geq 0}$ から導かれる確率微分方程式,

$$dX(t)=\sigma(X(t-))dZ(t), \tag{6}$$

に焦点を当てて考える. 確率積分の意味などは [2] に従うものとする.

$T>0$ に対し, $t_{k-1}=T(k-1)/n,\ k=1,2,\cdots,n+1$ に関する等分割 $\Delta\equiv\Delta_n$ に対し, 確率微分方程式 (6) の Euler-丸山近似を $X_n(0):=X(0)$,

$$X_n(t):=X_n(\eta_n(t))+\int_{\eta_n(t)}^{t}\sigma(X_n(\eta_n(s)))dZ_s, \tag{7}$$

として帰納的に定める. ただし, $\eta_n\equiv\eta$ は $t\in[t_{k-1},t_k),\ k=1,2,\cdots,n$ である時に $\eta_n(t)=t_k$ とする関数. この時の X_n を Euler-丸山近似と呼び,

$$dX_n(t)=\sigma(X_n(\eta_n(t))dZ(t),$$

と書くことにする. まず次の Hölder 連続性条件が満たされるとする.

Assumption 1 (Hölder). 正の数 $K>0$ および $\gamma\in[0,1-\frac{1}{\alpha}]$ があって,

$$|\sigma(x)-\sigma(y)|\leq|x-y|^{\frac{1}{\alpha}+\gamma}.$$

が任意の $x,y\in\mathbb{R}$ について成立するとする. このとき, σ は $(\frac{1}{\alpha}+\gamma)$-*Hölder* 連続, もしくは誤解のないときは単に *Hölder* 連続という.

このもとで Euler-丸山近似 $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を考えると確率微分方程式 (6) の解の存在して強解になることが (厳密にはもう少し一般的なクラスで)[8] において示される. また道ごとの一意性については小松 [17] による. 本論文では, その収束の速さを Delbaen et. al. が用いた山田の方法を少し修正したものを考える.

Lemma 1. $\epsilon>0,\ \delta>1$ に対して滑らかな関数 $\psi_{\delta\epsilon}$ を以下が満たされるように満たすように選べる,

$$\psi_{\delta\epsilon}(x)=\begin{cases}0 & :|x|\geq\epsilon\\ \text{between 0 and }(x\log\delta)^{-1} & :\ \epsilon\delta^{-1}<|x|<\epsilon\\ 0 & :|x|\leq\epsilon\delta^{-1}\end{cases},$$

であり, $\int_{\epsilon\delta^{-1}}^{\epsilon}\psi_{\delta\epsilon}(y)dy=1$. すると $u(x)=|x|^{\alpha-1}$ に対して $u_{\delta\epsilon}=u*\psi_{\delta\epsilon}$ と定義すると全ての $x\in\mathbb{R}$ に対して

$$|x|^{\alpha-1}\leq u_{\delta\epsilon}(x)+\epsilon^{\alpha-1}, \tag{8}$$

が成立する.

Lemma 2. $r<\alpha$ とする. 有界で可測で *adapted* な $(Y(t))_{t\in[0,T]}$, $Y^T:=\sup_{t\in[0,T]}Y(t)\in L^\infty$ に対して, *Rotation invariant α-stable* 過程による確率積分 $(\int_0^t Y(s-)dZ(s))_{t\in[0,T]}$ は $s,t\in[0,T]$, $s\leq t$ に対して, ある定数 C が存在して

$$\left(\mathbb{E}\left|\int_s^t Y(u-)dZ_u\right|^r\right)^{1/r}\leq C|t-s|^{\frac{1}{\alpha}}.$$

を満たす.

---

[2] Rotation invariant stable 分布を持つ確率過程であるが, 一次元の場合は対称 α-安定過程, symmetric α-stable process, say SαS, と一致するので両者を同じ意味で用いることがある.

Proof. Emery の不等式 [4] を用いて示される．例えば橋本 [8] をみよ． □

これらと伊藤公式および Emery の不等式を用いることで (5) に対応する $L^{(\alpha-1)}$-norm の評価を得ることができる．

Theorem 1. $(\frac{1}{\alpha}+\gamma)$-*Hölder* 連続が成り立つとする．この時に $\sup_x |\sigma(x)| \le M_1$, $E[|X(0)|] < M_2$ であれば $n_1 \in \mathbb{N}$ と定数 $C = C(K, T, M_1, M_2)$ が存在し，$n \ge n_1$ に対して，

$$E[|X_n(t) - X(t)|^{\alpha-1}] \le \begin{cases} C/(\log n)^{\alpha-1}, & \gamma = 0 \\ C/n^{\gamma}, & \gamma > 0, \end{cases} \tag{9}$$

が成立する．

Proof. まず

$$Y_n(t) = X_n(t) - X(t), \quad U_n(t) := |X_n(t) - X_n(\eta_n(t))|$$

と定義する．伊藤公式から

$$u_{\delta,\epsilon}(Y_n(t)) - u_{\delta,\epsilon}(Y_n(0)) = L_\alpha \int_0^t J_{\delta,\epsilon}(s)ds + M_{\delta,\epsilon}(t)$$

ここで $L_\alpha = -2\pi\alpha^{-1}\cot(\alpha\pi/2)$ である (例えば [17] をみよ．) $M_{\delta,\epsilon}$ は local martingale.

さらに

$$\begin{aligned} J_{\delta,\epsilon}(s) &= \psi_{\delta,\epsilon}(Y_n)\,|\sigma(s, X(s-)) - \sigma(s, X_n(\eta_n(s)-))|^\alpha \\ &\le \psi_{\delta,\epsilon}(Y_n)\,(2\,|\sigma(s, X(s-)) - \sigma(s, X_n(s-))|^\alpha + 2\,|\sigma(s, X_n(s-)) - \sigma(s, X_n(\eta_n(s)-))|^\alpha) \\ &\le 2\psi_{\delta,\epsilon}(Y_n)K^\alpha |Y_n(s-)|^{1+\alpha\gamma} + 2\psi_{\delta,\epsilon}(Y_n)K^\alpha |U_n(s-)|^{1+\alpha\gamma} \end{aligned}$$

が成立する．ψ の構成法から

$$\psi_{\delta,\epsilon}(y) \le \frac{2}{y\log\delta}\chi\left(\frac{\epsilon}{n} \le y \le \epsilon\right) \le \frac{2\delta}{\epsilon\log\delta}.$$

Lemma 1 を用いて

$$|Y_n(t)|^{\alpha-1} \le \epsilon^{\alpha-1} + 2L_\alpha\left(\frac{2}{\log\delta}\right)K^\alpha\epsilon^{\alpha\gamma}t + 2L_\alpha\left(\frac{2\delta}{\epsilon\log\delta}\right)K^\alpha\int_0^t |U_n(s-)|^{1+\alpha\gamma}ds + M_{\delta,\epsilon}(t)$$

さて $\gamma < 1 - \frac{1}{\alpha}$ であるので，$1 + \alpha\gamma < \alpha$ となる．そこで $\beta = 1 + \alpha\gamma$ とすると Lemma 2 から

$$E[|U_n(s-)|^{1+\alpha\gamma}] \le \frac{C}{n^{\beta/\alpha}}.$$

を得られる．

θ を

$$0 < \frac{\beta}{\alpha} - \theta < 1$$

を満たすように取れる．それを踏まえて次のように場合分けをして考える．

まず $\gamma = 0$ の場合：

$$\epsilon = \frac{1}{\log n} \text{ and } \delta = n^\theta,$$

とおいてやる．すると $n_1 \in \mathbb{N}$ であって

$$\frac{1}{\log n} \le \left(\frac{1}{\log n}\right)^{\alpha-1} \text{ and } \frac{n^\theta}{n^{\beta/\alpha}} \le \left(\frac{1}{\log n}\right)^{\alpha-1}$$

が成立するように取れる．ただし $n \geq n_1 \geq n_{\beta,\alpha}$. ゆえに $C \equiv C(T, L_\alpha, K)$ があって $n \geq n_1$ に対して

$$E[|Y_n(t)|^{\alpha-1}] \leq C \left(\frac{1}{\log n}\right)^{\alpha-1}$$

が成立する．

次に $0 < \gamma \leq 1 - \frac{1}{\alpha}$ の場合：

$$\epsilon = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \text{ and } \delta = 2.$$

として選ぶ．すると

$$\frac{1}{\alpha} + \gamma = \frac{\beta}{\alpha} < 1,$$

であるので

$$\frac{1}{n^{1-\frac{1}{\alpha}}} \leq \frac{1}{n^\gamma} \text{ and } \frac{n^{1/\alpha}}{n^{\beta/\alpha}} = \frac{1}{n^\gamma}$$

となる．ゆえに $C \equiv C(T, L_\alpha, K)$ があって

$$E[|Y_n(t)|^{\alpha-1}] \leq \frac{C}{n^\gamma}$$

が任意の $n \in \mathbb{N}$ で成り立つ．以上で題意を得る． □

なお，この拡張と一般化は論文 [9] にある．また中尾-Le Gall 条件における Wiener 過程から導かれる確率微分方程式における近似については [10] がある．

REFERENCES

1. Aurélien Alfonsi, *On the discretization schemes for the CIR (and Bessel squared) processes.*, Monte Carlo Methods Appl. **11** (2005), no. 4, 355–384.
2. Richard F. Bass, *Stochastic differential equations with jumps.*, Probab. Surv. **1** (2004), 1–19.
3. G. Deelstra and F. Delbaen, *Convergence of discretized stochastic (interest rate) processes with stochastic drift term*, Applied Stochastic Models and Data Analysis **14** (1998), no. 1, 77–84.
4. Michel Émery, *Équations différentielles stochastiques lipschitziennes : étude de la stabilité*, Séminaire de probabilités de Strasbourg **13** (1979), 281–293 (French).
5. István Gyöngy and Nicolai Krylov, *Existence of strong solutions for Itô's stochastic equations via approximations.*, Probab. Theory Relat. Fields **105** (1996), no. 2, 143–158.
6. István Gyöngy and Miklós Rásonyi, *A note on Euler approximations for SDEs with Hölder continuous diffusion coefficients.*, Stochastic Processes Appl. **121** (2011), no. 10, 2189–2200.
7. J.M. Harrison and L.A. Shepp, *On skew Brownian motion.*, Ann. Probab. **9** (1981), 309–313.
8. Hiroya Hashimoto, *Approximation and stability of solutions of SDEs driven by a symmetric α stable process with non-Lipschitz coefficients.*, To appear in Semin. Probab. (2013).
9. Hiroya Hashimoto and Takahiro Tsuchiya, *Approximation of solutions of sdes driven by a symmetric α stable process with non-lipschitz coefficients.*, Preparing to Submit (2013).
10. ———, *On convergent rates of sdes under nakao-le gall condition.*, Preparing to Submit (2013).
11. Desmond J. Higham, Xuerong Mao, and Andrew M. Stuart, *Strong convergence of Euler-type methods for nonlinear stochastic differential equations.*, SIAM J. Numer. Anal. **40** (2002), no. 3, 1041–1063.
12. Martin Hutzenthaler, Arnulf Jentzen, and Peter E. Kloeden, *Strong and weak divergence in finite time of Euler's method for stochastic differential equations with non-globally Lipschitz continuous coefficients.*, Proc. R. Soc. Lond., Ser. A, Math. Phys. Eng. Sci. **467** (2011), no. 2130, 1563–1576.
13. Kiyosi Itô, *Differential equations determining a markov process*, Journal of the Pan- Japanese Mathematical Colloquium **1077** (1942).

14. Hiroshi Kaneko and Shintaro Nakao, *A note on approximation for stochastic differential equations*, Séminaire de probabilités de Strasbourg **22** (1988), 155–162.
15. Shigetoku Kawabata and Toshio Yamada, *On some limit theorems for solutions of stochastic differential equations.*, Seminaire de probabilites XVI, Univ. Strasbourg 1980/81, Lect. Notes Math. 920, 412-441 (1982)., 1982.
16. Peter E. Kloeden and Eckhard Platen, *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations (Stochastic Modelling and Applied Probability)*, corrected ed., Springer, June 2011.
17. Takashi Komatsu, *On the pathwise uniqueness of solutions of one-dimensional stochastic differential equations of jump type.*, Proc. Japan Acad., Ser. A **58** (1982), 353–356.
18. Gisirō Maruyama, *Continuous markov processes and stochastic equations.*, Rendiconti del Circolo Matemàtico di Palermo. Serie II **4** (1955), 48–90.
19. Shintaro Nakao, *On the pathwise uniqueness of solutions of one-dimensional stochastic differential equations.*, Osaka J. Math. **9** (1972), 513–518.
20. Daniel W. Stroock and S. R. Srinivasa Varadhan, *Multidimensional diffusion processes*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1979.
21. A. J. Veretennikov, *On Strong Solutions and Explicit Formulas for Solutions of Stochastic Integral Equations*, Sbornik: Mathematics **39** (1981), 387–403.
22. Shinzo Watanabe and Toshio Yamada, *On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations. II.*, J. Math. Kyoto Univ. **11** (1971), 553-563.
23. Toshio Yamada, *Sur une construction des solutions d'equations differentielles stochastiques dans le cas non-lipschitzien*, **649** (1978), 114–131 (French).
24. Toshio Yamada and Shinzo Watanabe, *On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations*, Journal of Mathematics of Kyoto University **11** (1971), 155–167.