

フレーリッヒ模型の数学的側面

北海道大学・数学科 宮尾 忠宏
 Tadahiro Miyao
 Department of Mathematics,
 Hokkaido University

1 フレーリッヒ模型の定義

1.1 背景と基本的な定義

フレーリッヒ模型とは、イオン結晶中を運動する電子を記述する模型である。1937年に H. Fröhlich が提唱して以来、固体物理学において活発に研究されてきた。具体的なモデルの定義は後で与えるが、理解の一助に直感的な議論を簡単に述べておく。フレーリッヒ模型は、電子と結晶の光学フォノンの相互作用系を記述する。この相互作用の為に、電子の周囲にあるイオン結晶格子は歪むことになる。従って、結晶中を電子が動くと、その周囲の格子歪も電子と一緒についてくる。或いは、電子が格子歪を引きずると言っても良いだろう。つまり、イオン結晶中では電子とその周囲の格子歪は切り離して考えることが出来ない。そこで電子と周囲の格子歪を合わせて一つの対象と見なすことは自然であると言えるだろう。この電子と格子歪の複合体を一般にポーラロンと呼ぶ。フレーリッヒ模型を解析することは、ポーラロンの性質を調べることと同義である。

イオン結晶中の 1 電子を記述するフレーリッヒ模型は、形式的には次式で与えられる

$$H = -\frac{1}{2}\Delta - \sqrt{\alpha}\lambda_0 \int_{\mathbb{R}^3} dk \frac{1}{|k|} [e^{ik \cdot x} a(k) + e^{-ik \cdot x} a(k)^*] + N_f, \quad (1.1)$$

$$N_f = \int_{\mathbb{R}^3} dk a(k)^* a(k), \quad \lambda_0 = 2^{1/4}(2\pi)^{-1}. \quad (1.2)$$

$a(k), a(k)^*$ は、フォノンの生成・消滅作用素であり、つぎの交換関係を満たす：

$$[a(k), a(k')^*] = \delta(k - k'), \quad [a(k), a(k')] = 0 = [a(k)^*, a(k')^*].$$

α は電子-格子間の相互作用の強さを表す結合定数である。 H の作用する状態のヒルベルト空間は $L^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathfrak{F}$ で与えられる。ここで、 \mathfrak{F} は $L^2(\mathbb{R}^3)$ 上のフォック空間であり、 $\mathfrak{F} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \otimes_s^n L^2(\mathbb{R}^3)$ で定義される。記号 \otimes_s^n は n 重対称テンソル積を意味する。

まず最初に、 H の数学的な定義を明らかにする必要がある。というのも、電子-格子相互作用項の中にある $1/|k|$ は、2乗可積分ではなく、従って、相互作用項はヒルベルト空間上の線形作用素として ill-defined である。ここで、 $\int_{\mathbb{R}^3} dk f(k) a(k)$ が数学的に意味を持つのは、 f が 2乗可積分である場合であることに注意。物理学の文献でよく見かける、上述のハミルトニアン H をどのように解釈すればよいのであろうか？このことを説明するために、紫外切断が入ったハミルトニアンを導入する：

$$H_{\Lambda} = -\frac{1}{2}\Delta - \sqrt{\alpha}\lambda_0 \int_{|k| \leq \Lambda} dk \frac{1}{|k|} [e^{ik \cdot x} a(k) + e^{-ik \cdot x} a(k)^*] + N_f$$

積分領域を Λ でカットしたために、 H_{Λ} 中の相互作用項は数学的に意味をもつ。さらに、Kato-Rellich の定理を応用することにより、 H_{Λ} は $\text{dom}(-\Delta) \cap \text{dom}(N_f)$ 上で、すべての $\alpha, \Lambda \geq 0$ に対

して、下に有界な自己共役作用素であることが分かる。次に、 $\Lambda \rightarrow \infty$ という極限操作を行う。すると、次の結果が得られる。

Proposition[24]

$L^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathfrak{F}$ 上の下に有界な自己共役作用素 H が存在し、 $\Lambda \rightarrow \infty$ の極限で H_Λ は H に norm resolvent 収束する。

この命題で存在が保証されている自己共役作用素 H を形式的に (1.1) と書くことにする。ここでのポイントは、相互作用項のみ着目していると、 $\Lambda \rightarrow \infty$ の極限では数学的に意味付し難い項が出てきてしまうのだが、相互作用のみならず格子と電子の運動エネルギー項まで含めて考えると、極限 H の存在が示されるということである。直感的に言うと、相互作用項に生じる、ある種の「発散」を運動エネルギー項に押し付けるわけである。このような描像を数学的に表現すると、命題の証明になる。

1.2 全運動量を固定したハミルトニアン

全運動量作用素 P_{tot} は次式で与えられる：

$$P_{\text{tot}} = -i\nabla + P_f, \quad P_f = \int_{\mathbb{R}^3} dk k a(k)^* a(k)$$

系の全運動量は保存するために、次の性質を満たすユニタリ作用素 U を具体的に構成できる：

$$U P_{\text{tot}} U^* = \int_{\mathbb{R}^3}^\oplus P dP, \quad U H U^* = \int_{\mathbb{R}^3}^\oplus H(P) dP. \quad (1.3)$$

ここで、

$$H(P) = \frac{1}{2}(P - P_f)^2 - \sqrt{\alpha}\lambda_0 \int_{\mathbb{R}^3} dk \frac{1}{|k|} [a(k) + a(k)^*] + N_f \quad (1.4)$$

である。(1.3)の前の式より、記号 P は系の取り得る全運動量の値を表している。このことと、後ろの式より $H(P)$ は「全運動量を固定した系を記述するハミルトニアン」と解釈できる。(1.4)の読み方は、 H のときと同様である。すなわち、 $H(P)$ は紫外切断の入ったハミルトニアンの norm resolvent 極限である。 $H(P)$ はヒルベルト空間 \mathfrak{F} に作用する下に有界な自己共役作用素である。

2 $H(P)$ のスペクトルの性質

まず、記号を用意する：

$$E(P) = \inf \text{spec}(H(P)), \quad (2.5)$$

$$\Sigma(P) = \inf \text{ess.spec}(H(P)). \quad (2.6)$$

ここで、 $\text{spec}H(P)$, $\text{ess.spec}(H(P))$ は、それぞれ $H(P)$ のスペクトルと本質的スペクトルを表す。これら諸量の間には次の関係がある。

Theorem[11, 12, 26]

(i) $\Sigma(P) - E(P) = E(0) + 1 - E(P)$.

(ii) $E(P) \leq E(0) + \frac{P^2}{2}$.

この二つの関係より、次の系が直ちに従う。

Corollary

不等式 $\Sigma(P) - E(P) \geq 1 - \frac{P^2}{2}$ が成立する。従って、 $E(P)$ は $|P| < \sqrt{2}$ のとき、 $H(P)$ の固有値、即ち基底状態である。

上述の定理より、基底状態の存在がわかった。次の定理は、基底状態はもし存在すれば一意であることを主張する。

Theorem [11, 12, 20]

もし、 $E(P)$ が固有値ならば、それは一意である (i.e., $\dim \ker(H(P) - E(P)) = 1$)。

この定理の証明には、拡張された Perron-Frobenius の定理を用いる。

3 強結合領域 $\alpha \rightarrow \infty$

相互作用定数 α が非常に大きい場合 (強結合領域) の物理量はどのようにふるまうのであろうか? ここでは、この質問に対するいくつかの結果を紹介する。そのために、Pekar 汎関数を導入する:

$$\mathcal{E}(\varphi) = \frac{1}{2} \int dx |\nabla_x \varphi(x)|^2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \int dx dy \frac{|\varphi(x)|^2 |\varphi(y)|^2}{|x-y|},$$

$\varphi \in H^1(\mathbb{R}^3) = \{\varphi \in L^2(\mathbb{R}^3) \mid \|\nabla \varphi\| < \infty\}$. 次の結果は、 α が非常に大きい場合、 H のエネルギーは Pekar 汎関数を用いて表現することが出来ることを教える。

Theorem [4, 18]

$E = \inf \text{spec}(H)$ とする。また、 $C_P = \inf\{\mathcal{E}(\varphi) \mid \varphi \in H^1(\mathbb{R}^3), \|\varphi\| = 1\}$ とする。このとき、

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha^2} E = C_P$$

が成り立つ。

因みに、ここで現れた Pekar 汎関数の minimizer については、次の結果が知られている。

Theorem [17]

Pekar 汎関数 $\mathcal{E}(\cdot)$ は、球対称で一意的な minimizer ϕ_0 を持つ。

この結果は後で用いる。

4 有効質量

イオン結晶中の電子は、格子の歪を引きずることにより質量が増加することが予想される。格子歪の影響まで含めた電子の質量を、有効質量と呼ぶ。有効質量の数学的な定義は次式で与えられる:

$$\frac{1}{m^*} = \left. \frac{\partial^2}{\partial P_1^2} E(P) \right|_{P=0}.$$

有効質量は α が小さい場合 (弱結合) には、摂動計算等を用いて容易に計算できる。結果だけ述べると、

$$m^* = 1 + \frac{1}{6}\alpha + \mathcal{O}(\alpha^2), \quad \alpha \rightarrow 0.$$

具体的な計算については [10, 7] 等を参照。

では、有効質量は α が非常に大きい場合にはどのように振る舞うのであろうか？ 実はこの問題は未だに解けてはいない。しかしながら、次の予想が Spohn により提案されている。

Spohn 予想 [25]:

ϕ_0 を Pekar 汎関数の minimizer とする。このとき、

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{m^*}{\alpha^4} = \frac{1}{3} \int_{\mathbb{R}^3} dx \phi_0(x)^4.$$

5 イオン結晶中の 2 電子 ～バイポーラロン～

これまでの、イオン結晶中の 1 電子を考えてきた。以降は、イオン結晶中の 2 電子について考える。素直な問題の拡張に思えるかもしれないが、以下に概説するように、状況は 1 電子の場合よりもずっと複雑になる。2 電子系の難しさを理解するために、まず、真空中の 2 電子を考える。電子間にはクーロン反発力が働くために、エネルギー的に安定な状態は、電子が可能な限り離れた場合である。次に、2 電子をイオン結晶の中においてみる。すると、先程と同様に電子間にはクーロン斥力が働く。一方、電子-格子間相互作用は 2 電子の間に引力を及ぼす。従って、2 電子間には (i) クーロン斥力と (ii) 電子-格子相互作用による引力の 2 種類の力が働くことになる。もし、引力が斥力に打ち勝てば、2 電子はペアを形成することが予想される。そのうえ、1 電子の場合と同様に、この電子対は周囲の格子の歪を引きずることもまた想像できる。格子歪を引きずって動く 2 電子対をバイポーラロンと呼ぶ。

5.1 2 電子フレリッヒ模型

イオン結晶中の 2 電子を記述する模型として、ここでもフレリッヒ模型を採用する：

$$H_2 = \sum_{j=1,2} \left\{ -\frac{1}{2} \Delta_j - \sqrt{\alpha} \lambda_0 \int_{\mathbb{R}^3} dk \frac{1}{|k|} [e^{ik \cdot x_j} a(k) + e^{-ik \cdot x_j} a(k)^*] \right\} + \frac{U\alpha}{|x_1 - x_2|} + N_f \quad (5.7)$$

H_2 が作用するヒルベルト空間は、 $L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \otimes \mathfrak{F}$ である。 $U \geq 0$ は電子間のクーロン斥力の強さを表すパラメータであり、物理的には、 $U \geq \sqrt{2}$ を満たす。式 (5.7) は 1 電子の場合と同様に、紫外切断を除く極限で定義されていると読む。

5.2 全運動量を固定されたフレリッヒ ハミルトニアン

2 電子系の場合も、全運動量を固定したハミルトニアンを考えることが出来る。ただし、1 電子系の場合と比べて、少々複雑である。

まず、2 電子の座標系 $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ を重心系 $(x_c, x) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ に移す。ここで、 x_c は質量重心で、 $x_c = \frac{x_1 + x_2}{2}$ と与えられる。また、 x は相対座標であり、 $x = x_1 - x_2$ で与えられる。この座標変換のもとで、フレリッヒ ハミルトニアンは次のようになる：

$$H_2 = -\frac{1}{4} \Delta_{x_c} - \Delta_x + \frac{U\alpha}{|x|} - 2\sqrt{\alpha} \lambda_0 \Phi(x_c, x) + N_f.$$

ここで、

$$\Phi(x_c, x) = \int dk \frac{1}{|k|} \cos \frac{k \cdot x}{2} [e^{ik \cdot x_c} a(k) + e^{-ik \cdot x_c} a(k)^*].$$

次に全運動量作用素を導入する：

$$\begin{aligned} P_{\text{tot}} &= -i\nabla_{x_1} - i\nabla_{x_2} + P_f \\ &= -i\nabla_{x_c} + P_f. \end{aligned}$$

さて、ユニタリー作用素 U を

$$U = \mathcal{F}_{x_c} \exp\{ix_c \cdot P_f\}$$

と定義する。ここで、 \mathcal{F}_{x_c} は変数 x_c に関するフーリエ変換である。この U により、 P_{tot} と H_2 は次のように変換される：

$$UP_{\text{tot}}U^* = \int_{\mathbb{R}^3}^{\oplus} P \, dP, \quad (5.8)$$

$$UH_2U^* = \int_{\mathbb{R}^3}^{\oplus} H_2(P) \, dP. \quad (5.9)$$

ここで、

$$H_2(P) = \frac{1}{4}(P + i\nabla_x - P_f)^2 - \Delta_x - 2\sqrt{\alpha}\lambda_0\Phi(0, x) + \frac{U\alpha}{|x|} + N_f.$$

$H_2(P)$ を運動量を P で固定したフレイリッヒ ハミルトニアンという。 $H_2(P)$ の作用するヒルベルト空間は $L^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathfrak{F}$ で与えられる。

6 バイポーラロンの安定性

束縛エネルギーを

$$E_{\text{bin}}(\alpha, U) = 2E - \inf \text{spec}(H_2)$$

で定義する。すると、すべての $\alpha, U \geq 0$ に対して、 $E_{\text{bin}} \geq 0$ となる。もし、

$$E_{\text{bin}} > 0$$

ならば、束縛条件が成立するという。

Theorem [19]

束縛条件を仮定する： $E_{\text{bin}}(\alpha, U) > 0$ のとき、

$$|P| < 2 \min\{\sqrt{E_{\text{bin}}(U, \alpha)}, 1\},$$

が満たされるならば、 $H_2(P)$ は基底状態を持つ。

$H_2(P)$ が基底状態をもつとき、バイポーラロンは固定された全運動量 P で安定であるという。上述の定理より、バイポーラロンの安定性は、束縛条件に帰着される。残念ながら、束縛条件を証明することは簡単ではない。というのも、 $E_{\text{bin}}(\alpha = 0, U) = 0$ であるために、条件 $E_{\text{bin}}(\alpha, U) > 0$ を証明するには非摂動論的手法が要求されるからである。しかしながら、 α が非常に大きい場合（強結合極限）、実際に束縛条件を証明することができる。このことを次に見てみよう。

7 強結合領域におけるバイポーラロン形成

Pekar-Tomasevich 汎関数を次式で定義する：

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{bp}}^U(\varphi) &= \frac{1}{2} \int dx_1 dx_2 |\nabla_{x_1} \varphi(x_1, x_2)|^2 + \frac{1}{2} \int dx_1 dx_2 |\nabla_{x_2} \varphi(x_1, x_2)|^2 \\ &+ U \int dx_1 dx_2 \frac{|\varphi(x_1, x_2)|^2}{|x_1 - x_2|} \\ &- \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i,j=1,2} \int dx_1 dx_2 dy_1 dy_2 \frac{|\varphi(x_1, x_2)|^2 |\varphi(y_1, y_2)|^2}{|x_i - y_j|}. \end{aligned}$$

ここで、 $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^6)$ とする。この汎関数を用いて、次の重要な量を導入する：

$$C_{\text{PT}}(U) = \inf \left\{ \mathcal{E}_{\text{bp}}^U(\varphi) \mid \varphi \in H^1(\mathbb{R}^6), \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^6)} = 1 \right\}.$$

Proposition [1, 19]

すべての $U \geq 0$ に対して、

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{E_{\text{bin}}(\alpha, U)}{\alpha^2} = 2C_{\text{P}} - C_{\text{PT}}(U)$$

が成り立つ。

この命題から、もし $2C_{\text{P}} - C_{\text{PT}}(U) > 0$ ならば、十分大きな α (強結合領域) に対して、束縛条件 $E_{\text{bin}}(\alpha, U) > 0$ が成り立つことがわかる。

次の定理は、 $2C_{\text{P}} - C_{\text{PT}}(U) > 0$ が実際に成立することを主張する。

Theorem [19]

- (i) すべての $U \geq 0$ に対して、 $2C_{\text{P}} - C_{\text{PT}}(U) \geq 0$ が成り立つ。さらに、 $2C_{\text{P}} - C_{\text{PT}}(U)$ は U に関して連続かつ単調減少である。
- (ii) $U_c = \sup\{U \in [0, \infty) \mid 2C_{\text{P}} - C_{\text{PT}}(U) > 0\}$ とする。このとき、 $\sqrt{2} < U_c$ である。

$U_c > \sqrt{2}$ という結果は重要である。というのも、物理的には条件 $U \geq \sqrt{2}$ が要求されるからである。ところで、 U_c の値はあまり大きくはないことが予想される。何故ならば、 U が大きいと、2電子対は形成されず、 $2C_{\text{P}} - C_{\text{PT}}(U) = 0$ となることが予想されるからである。従って、 $U_c > \sqrt{2}$ が成り立つかどうかは実は微妙な問題である。また、この定理は次の意味でも自明ではない。 ϕ_0 を Pekar minimizer としよう。直接計算により、

$$\mathcal{E}_{\text{PT}}^{U=\sqrt{2}}(\phi_0 \otimes \phi_0) = 2C_{\text{P}}$$

が分かる。このことから、性質 $U_c > \sqrt{2}$ を示すには電子相関が重要であることが窺い知れるだろう。

以上の結果をまとめると、次を得る。

Corollary

U を $U < U_c$ となるようにとる。このとき、ある $\alpha_c < \infty$ が存在して、以下が成り立つ：すべての $\alpha > \alpha_c$ に対して、 $|P| < 2$ ならば $H_2(P)$ は基底状態を持つ。

8 バイポーラロンの非存在について

先の章で、結合定数 α がある程度大きく、かつ、電子間クーロン斥力がある程度小さい場合に束縛条件が実際に成り立つことを紹介した。ここでは、束縛条件が成立しない場合が実際に起こりうることを見ておこう。

Theorem [8]

ある $U^* < \infty$ が存在して、すべての $U > U^*$ に対して

$$E_{\text{bin}}(\alpha, U) = 0$$

が成り立つ。

U が大きくなると、電子間の引力よりも、斥力が支配的になるために電子対は形成されないことをこの定理は意味する。尚、原論文では N -ポーラロン系で上述の結果が証明されていることを注意しておく。

9 バイポーラロンは one-center であること

ここで、バイポーラロンの対称性について結果を紹介しよう。そのために、 $E_2 = \inf \text{spec}(H_2)$ とする。また、 H_2 のヒルベルト空間を

$$L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \otimes \mathfrak{F} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \otimes L_{\text{sym}}^2(\mathbb{R}^{3n})$$

と同一視する。各 $\Psi = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \Psi_n(x_1, x_2; k_1, \dots, k_n)$ に対し、ユニタリー作用素 R_g を

$$(R_g \Psi)_n(x_1, x_2; k_1, \dots, k_n) = \Psi_n(gx_1, gx_2; gk_1, \dots, gk_n), \quad g \in SO(3)$$

と定義する。

Theorem [20]

束縛条件 $E_{\text{bin}}(\alpha, U) > 0$ を仮定する。このとき、

$$E_2 = \inf \left\{ \langle \varphi, H_2 \varphi \rangle \mid \varphi \in \text{dom}(H_2), \|\varphi\| = 1, R_g \varphi = \varphi, \forall g \in O(3) \right\} \quad (9.10)$$

が成り立つ。

状態ベクトル Ψ は $R_g \Psi = \Psi, \forall g \in O(3)$ が成り立つとき、one-center であると呼ぶ。上述の定理は、最低エネルギー E_2 を one-center の状態ベクトルで記述できることを主張する。この定理は、電子の Fermi 統計性まで考慮したときには一般には成立しないことを注意しておく。

10 Pekar-Tomasevich 汎関数に関する open problem

Pekar-Tomasevich 汎関数については、判っていないことも多い。未解決問題のいくつかを列挙しておく。

Open problems

$2C_P - C_{PT}(U) > 0$ を仮定する.

(1) 汎関数 \mathcal{E}_{PT}^U は minimizer を持つか?

(2) もし \mathcal{E}_{PT}^U が minimizer を持てば, それは一意か?

(3) もし \mathcal{E}_{PT}^U が minimizer $\phi(x, y)$ を持てば, それは one-center か? つまり, $\phi(gx, gy) = \phi(x, y), \forall g \in O(3)$ は成立するか? (9.10) と比較せよ.

最近, Frank-Lieb-Seiringer[9] によりいくつかの問題について進展があったことを注意しておく.

11 その他の話題

フレーリッヒ ハミルトニアンに関する幾つかの結果を紹介してきた. ここでは紹介できなかった最近の結果を列挙しておく.

Stability of matter [8, 15].

散乱理論 [5].

エネルギーの単調性 [21, 22].

その他 [1, 14, 16].

References

- [1] I. Anapolitanos and B. Landon, The ground state energy of the multi-polaron in the strong coupling limit, arXiv:1212.3571
- [2] R. D. Benguria and G. A. Bley, Exact asymptotic behavior of the Pekar-Tomasevich functional. J. Math. Phys. 52 (2011), 052110
- [3] J. Devreese, S. Alexandrov, Fröhlich Polaron and Bipolaron: Recent Developments, Rep. Prog. Phys. 72 (2009), 066501.
- [4] M. Donsker, S. R. S. Varadhan, Asymptotics for the polaron, Commun. Pure. Appl. Math. 36 (1983), 505-528.
- [5] W. Dybalski and J. S. Moller, The translation invariant massive Nelson model: III. Asymptotic completeness below the two-boson threshold, arXiv:1210.6645
- [6] R. P. Feynman, Slow electrons in a polar crystal. Phys. Rev. 97, (1955), 660-665.
- [7] R. P. Feynman, Statistical Mechanics: A Set Of Lectures (Advanced Book Classics) , Westview Press, 1998.

- [8] R. L. Frank, E. H. Lieb, R. Seiringer, L. E. Thomas, Stability and absence of binding for multi-polaron systems, *Publ. Math. IHES* 113, 39-67 (2011).
- [9] R. L. Frank, E. H. Lieb and R. Seiringer, Binding of Polarons and Atoms at Threshold, *Binding of polarons and atoms at threshold. Comm. Math. Phys.* 313 (2012), 405-424.
- [10] H. Fröhlich, *Electrons in lattice fields, Adv. Phys.* 3, (1954), 325.
- [11] J. Fröhlich, On the infrared problem in a model of scalar electrons and massless, scalar bosons. *Ann. Inst. H. Poincaré Sect. A (N.S.)* 19 (1973), 1–103.
- [12] J. Fröhlich, Existence of dressed one electron states in a class of persistent models, *Fortschr. Phys.* 22 (1974), 150-198.
- [13] B. Gerlach and H. Löwen, Analytical properties of polaron systems or: Do polaronic phase transitions exist or not? *Rev. Modern Phys.* 63 (1991), 63–90.
- [14] M. Griesemer, F. Hantsch and D. Wellig On the Magnetic Pekar Functional and the Existence of Bipolarons, *Rev. Math. Phys.* 24 (2012), 1250014, 13 pp.
- [15] M. Griesemer, J. S. Møller, Bounds on the Minimal Energy of Translation Invariant N -Polaron Systems, *Comm. Math. Phys.* 297 (2010), 283–297.
- [16] M. Lewin, N. Rougerie, On the binding of small polarons in a mean-field quantum crystal, [arXiv:1202.5103](https://arxiv.org/abs/1202.5103).
- [17] E. H. Lieb, Existence and uniqueness of the minimizing solution of Choquard’s nonlinear equation. *Studies in Appl. Math.* 57 (1976/77), 93-105.
- [18] E. H. Lieb, L. E. Thomas, Exact ground state energy of the strong-coupling polaron, *Commun. Math. Phys.* 183 (1997) 511-519. Erratum Exact ground state energy of the strong-coupling polaron, *Commun. Math. Phys.* 188 (1997) 499-500.
- [19] T. Miyao, H. Spohn, The bipolaron in the strong coupling limit, *Ann. Henri Poincaré* 8 (2007) 1333-1370.
- [20] T. Miyao, Nondegeneracy of ground states in nonrelativistic quantum field theory, *Journal of Operator Theory*, 64 (2010), 207-241.
- [21] T. Miyao, Monotonicity of the polaron energy, [arXiv:1211.0344](https://arxiv.org/abs/1211.0344)
- [22] T. Miyao, Monotonicity of the polaron energy II:General theory of operator monotonicity, [arXiv:1301.1100](https://arxiv.org/abs/1301.1100)
- [23] J. S. Møller, The polaron revisited. *Rev. Math. Phys.* 18 (2006), 485–517.
- [24] E. Nelson, Interaction of nonrelativistic particles with a quantized scalar field, *J. Math. Phys.*, 5 (1964), 1190-1197.
- [25] H. Spohn, Effective mass of the polaron: A functional integral approach, *Ann of Phys.* 175 (1987), 278-318.
- [26] H. Spohn, The polaron at large total momentum. *J. Phys. A* 21 (1988), no. 5, 1199–1211.