

# 点検しきい値を考慮した不完全定期点検 Imperfect Periodic Inspection with Inspection Threshold

鳥取大学大学院工学研究科 \*村田 崇 (Takashi Murata)

鳥取大学大学院工学研究科 \*\*佐藤 毅 (Takashi Satow)

\*:Graduate School of Engineering, Tottori University

\*\* :Graduate School of Engineering, Tottori University

## 1 はじめに

コンピュータシステムに代表される社会基盤を支えるシステムは、大規模かつ複雑化している。システム運用者はシステム要求性能を維持し、安全に運用しなければならない。そのため、システムの維持管理において点検・検査は、システムの状態把握、劣化予測等に有益な情報を与える重要な活動と考えられる。Barlow & Proschan(1965)により発表された論文 [1] は点検問題にかかわる代表的な研究として知られ、点検活動と予防保全活動を組み合わせた維持管理問題として定式化し解析的な議論を行っている。従来の点検問題では、真の状態を把握することができる完全点検を仮定することが多く、Christer & Wang は完全点検下における点検時期決定に関する状態依存型点検方策を提案している [2]。Grall 等も同様に、無限計画期間における単位時間あたりの総期待保全費用を評価規範下の目的関数として単一ユニット点検取替方策を提案している [3]。タイヤ摩耗に代表される物理的劣化量において、比較的容易に観測することが可能な場合において点検時にシステム状態を完全に把握できるという彼らの仮定は容認される。しかし、地中に埋設された水道ネットワークや疾患に罹患しているか否かなど観測環境が劣悪な場合、状態を客観的に数値化することが難しい場合は、点検時に観測対象の状態を完全に把握できない。そこで、正常状態を異常状態、もしくは異常状態を正常状態と誤ってしまう不完全点検に対する最適点検方策について海生・尾崎 [4] は提案した。しかし、真の状態を完全には把握できない不完全点検下において、誤った点検結果に基づく意思決定により生じるリスクは削減すべきである。また同様に、意思決定に影響を及ぼさない点検に関しても実施を避けるべきである。このような背景を下に誤った点検結果に基づく意思決定によるリスク削減を目的とし、点検を実施すべき領域を示す上下限からなる境界値として点検しきい値を提案する。本研究では、点検しきい値の有効性検証を目的とし、点検しきい値の有無による総期待保全費用の大小関係について議論する。

## 2 点検しきい値の有効性

点検しきい値は、意思決定に影響を及ぼさない不必要な点検を排除する。しかし、不必要な点検と考えられる点検排除によりリスク削減が実際に可能なのか、つまり点検しきい値の有効性について検証されていない。そこで、2状態システムの不完全定期点検を対象に、点検しきい値の有無による総期待保全費用の大小関係について議論する。なお、リスクを費用として考える。

### 2.1 仮定と定義

感度  $p$ 、特異度  $q$  を持つシステムの 2 値出力型不完全定期点検を考える。2 値出力型とは、点検対象が正常、または故障の 2 値を点検結果として出力する意味である。システムの故障時刻を表す確率変数を  $Z$ 、シ

システム運用開始から任意の時刻  $t(\geq 0)$  経過後の故障確率は  $F(t) = P\{Z \leq t\}$  となる。また、故障時間分布関数は  $F(t) = 1 - \bar{F}(t)$  である。時刻  $t(\geq 0)$  におけるシステムの点検出力関数を次式として定義する。

$$Y_t = \begin{cases} 0: \text{システムの点検出力が故障の場合,} \\ 1: \text{システムの点検出力が正常の場合.} \end{cases} \quad (1)$$

点検結果が故障の場合、システム取替を実施する。点検結果が正常の場合、システム運用を継続する。ここで、感度は故障状態のシステムを点検したとき故障と正しく判断する条件付き確率であり、次式として表す。

$$p = P\{Y_t = 0 \mid Z \leq t\}. \quad (2)$$

特異度は正常状態のシステムを点検したとき正常と正しく判断する条件付き確率であり、次式として表す。

$$q = P\{Y_t = 1 \mid Z > t\}. \quad (3)$$

## 2.2 点検しきい値

システムは取り替えを要求される故障確率が事前に設定され、その確率値を取替しきい値とよび  $R(0 < R < 1)$  と表す。意思決定時における故障確率が  $R$  未満ならばシステム運用を継続し、 $R$  以上ならばシステム取替を実施する。しかし、不完全点検のため点検結果がシステムの真の状態を表しているとは限らない。そこで、点検結果より再評価したシステム状態確率（予測値）を用いに同様な意思決定を行う。任意の点検時刻  $\forall t(> 0)$  において

**$F(t) < R$  かつ点検結果が故障の場合：** 故障予測値が  $R$  未満ならば取替実施しない。

**$F(t) \geq R$  かつ点検結果が正常の場合：** 1 から正常予測値を引いた値が  $R$  以上ならば取替実施する。

両ケースのように点検情報の無い場合における意思決定と点検結果を踏まえた予測値に基づく意思決定に変化がない場合の点検を無効と定義する。点検しきい値とは、無効となる境界値の上限・下限であり、それぞれ点検上限値・点検下限値とよぶ。この点検しきい値は取替しきい値から以下の手順で導出できる。はじめに、点検結果が故障である条件のもと、真の状態が故障状態である条件付き確率（故障予測値）を求める。故障予測値は次式として表せる。

$$\begin{aligned} FPV(p, q, t) &= \frac{P\{Z \leq t, Y_t = 0\}}{P\{Y_t = 0\}} \\ &= \frac{pF(t)}{pF(t) + (1 - q)\bar{F}(t)}. \end{aligned} \quad (4)$$

次に点検結果が正常である条件のもと、真の状態が正常状態である条件付き確率（正常予測値）を求める。正常予測値は次式として表せる。

$$\begin{aligned} NPV(p, q, t) &= \frac{P\{Z > t, Y_t = 1\}}{P\{Y_t = 1\}} \\ &= \frac{q\bar{F}(t)}{q\bar{F}(t) + (1 - p)F(t)}. \end{aligned} \quad (5)$$

点検下限値は、故障予測値と取替しきい値が等しくなる時間として求めることができる。故障予測値は時間に対する狭義単調関数であることから、取替しきい値と等しくなる時間はユニークに存在するため、点検下限値を次式として定義する。

$$LIT(p, q) := \{t \mid FPV(p, q, t) = R\}. \quad (6)$$

点検上限値は、1 から正常予測値を引いた値が取替しきい値と等しくなる時間として求めることができる。正常予測値も時間に対する狭義単調関数であることから、取替しきい値と等しくなる時間はユニークに存在するため、点検上限値を次式として定義する。

$$UIT(p, q) := \{t \mid 1 - NPV(p, q, t) = R\}. \quad (7)$$

図1は、 $p = q = 0.8, R = 0.7, F(t) = 1 - \exp[-t]$ における点検しきい値の概略図を表している。

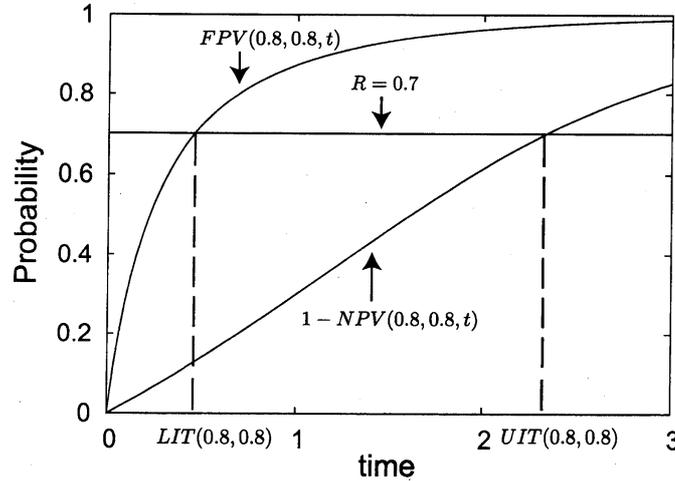


図1: 点検しきい値の概略図

## 2.3 従来型不完全定期点検モデル（点検しきい値を考慮しない）

### 2.3.1 モデルの設定

点検しきい値を考慮しない従来型不完全定期点検モデルの定式化にあたり、以下の仮定をおく。

- 点検開始時刻  $\tau$  から点検を実施する。
- 点検間隔は一定 ( $\tau$ ) である。
- システム故障は点検においてのみ明らかになる。
- $Y_{j\tau} = 0$  ( $j = 1, 2, 3, \dots$ ) (点検結果:故障) の場合、システム取替を実施する。
- $Y_{j\tau} = 1$  ( $j = 1, 2, 3, \dots$ ) (点検結果:正常) の場合、システムを継続運用する。
- 故障時刻から取替実施までの時間を損失期間とする。その間、故障状態のシステム運用により単位時間あたりの損失費用  $c_1$  が発生する。
- システムは新品の同等品に取り替えされる。つまり、取替時点が再生点となる。
- 連続する再生点間を1再生サイクルとよぶ。
- 点検および取り替えは、それぞれ  $c_2, c_3$  ( $c_2 < c_3$ ) の費用を要する。
- 点検および取り替えに要する時間は無視 (=0) する。

### 2.3.2 期待損失期間

故障状態のシステムの運用継続により生じる期待損失期間を導出する。  
故障状態のシステムを取替実施するまでの運用継続により生じる期待損失期間  $A(p, q, \tau)$  は次式として表せる。

$$A(p, q, \tau) = p \sum_{j=0}^{\infty} q^j \sum_{i=j+1}^{\infty} (1-p)^{i-(j+1)} \int_{j\tau}^{(j+1)\tau} (i\tau - t) dF(t). \quad (8)$$

### 2.3.3 期待点検回数

はじめに、故障状態のシステムを取替実施するまでの期待点検回数を導出する。  
故障状態のシステムを取替実施するまでの期待点検回数は次式として表せる。

$$B(p, q, \tau) = p \sum_{j=0}^{\infty} q^j \sum_{i=j+1}^{\infty} i(1-p)^{i-(j+1)} \int_{j\tau}^{(j+1)\tau} dF(t). \quad (9)$$

次に、正常状態のシステムを誤り点検により取替実施する場合の期待点検回数を導出する。  
正常状態のシステムが誤り点検により取替実施される場合、期待点検回数は次式として表せる。

$$D(p, q, \tau) = (1-q) \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^j i q^{i-1} \int_{j\tau}^{(j+1)\tau} dF(t). \quad (10)$$

式(9),(10)より、取替実施までの期待点検回数  $E(p, q, \tau)$  は次式として表せる。

$$E(p, q, \tau) = B(p, q, \tau) + D(p, q, \tau). \quad (11)$$

### 2.3.4 総期待保全費用

1再生サイクルにおける総期待保全費用を期待損失費用、期待点検費用、取替費用の合計値として定義する。  
総期待保全費用  $G(p, q, \tau)$  は次式として表せる。

$$G(p, q, \tau) = c_1 A(p, q, \tau) + c_2 E(p, q, \tau) + c_3. \quad (12)$$

## 2.4 提案型不完全定期点検モデル（点検しきいを考慮する）

### 2.4.1 モデルの設定

点検しきい値を考慮する提案型不完全定期点検モデルの定式化にあたり、以下の仮定をおく。

- 点検開始時刻  $L$  から点検終了時刻  $U$  まで点検を実施する。
- 点検は単位時間毎に実施される。
- システム故障は点検においてのみ明らかになる。
- $Y_t = 0$ （点検結果:故障）の場合、システムを取替実施する。
- $Y_t = 1$ （点検結果:正常）の場合、システムを継続運用する。
- 故障時刻から取替実施までの時間を損失期間とする。その間、故障状態のシステム運用により単位時間あたりの損失費用  $c_1$  が発生する。

- システムは新品の同等品に取り替えされる。つまり、取替時点が再生点となる。
- 連続する再生点間を1再生サイクルとよぶ。
- 点検および取替は、それぞれ  $c_2, c_3$  ( $c_2 < c_3$ ) の費用を要する。
- 点検により時刻  $U$  までに故障が発見されない場合、時刻  $U + T$  において強制取替を実施する。
- 点検および取替に要する時間は無視する。

#### 2.4.2 点検開始時刻および点検終了時刻

点検を一定間隔（単位時間）に実施するため、点検開始時刻  $L$  および点検終了時刻  $U$  を次式として定める。

$$L = [LIT(p, q)]. \quad (13)$$

$$U = [UIT(p, q)]. \quad (14)$$

ここで、記号  $[ ]$  は天井関数を表し  $[x]$  は実数  $x$  に対し、 $x$  以上の最小の整数として定義される。また、記号  $\lfloor \rfloor$  はガウス記号を表し  $n$  を整数値とした場合、 $\lfloor x \rfloor = n \iff n \leq x < n + 1$  である。

#### 2.4.3 期待損失期間

はじめに、故障状態のシステムの運用継続により生じる期待損失期間を導出する。故障状態のシステムの運用継続により生じる場合、期待損失期間は次式として表せる。

$$H(p, q) = p \sum_{j=0}^{U-L} q^j \sum_{i=j}^{U-L} (1-p)^{i-j} \int_{L_1(j-1)}^{L_1(j)} (L_1(i) - t) dF(t). \quad (15)$$

ただし、

$$L_1(x) = \begin{cases} L + x & : (x \geq 0), \\ 0 & : (x = -1). \end{cases} \quad (16)$$

次に、全ての点検において故障が発見されず、時刻  $U + T$  において強制的に取り替えを実施する場合の期待損失期間を導出する。全ての点検において故障が発見されず、時刻  $U + T$  において強制的に取り替えを実施する場合の期待損失期間は次式として表せる。

$$I(p, q, T) = \sum_{j=0}^{U-L+1} q^j (1-p)^{U-L+1-j} \int_{L_1(j-1)}^{L_2(j)} (U + T - t) dF(t). \quad (17)$$

式 (15), (17) をより、故障見逃しによる期待損失期間  $J(p, q, T)$  は次式として表せる。

$$J(p, q, T) = H(p, q) + I(p, q, T). \quad (18)$$

ただし、

$$L_2(x) = \begin{cases} L + x & : (x \geq U - L), \\ U + T & : (x = U - L). \end{cases} \quad (19)$$

#### 2.4.4 期待点検回数

はじめに、故障状態のシステムを取替実施するまでの期待点検回数を導出する。故障状態のシステムを取替実施するまでの期待点検回数は次式として表せる。

$$K(p, q) = p \sum_{j=0}^{U-L} q^j \sum_{i=j}^{U-L} (i+1)(1-p)^{i-j} \int_{L_1(j-1)}^{L_1(j)} dF(t). \quad (20)$$

次に、正常状態のシステムを誤り点検により取替実施する場合の期待点検回数を導出する。正常状態のシステムを誤り点検により取替実施する場合、期待点検回数は次式として表せる。

$$M(p, q) = (1-p) \sum_{j=1}^{U-L+1} \sum_{i=0}^{j-1} (i+1)q^i \int_{L_1(j-1)}^{L_2(j)} dF(t). \quad (21)$$

ただし、

$$L_3(x) = \begin{cases} L+x & : (x \leq U-L), \\ \infty & : (x > U-L). \end{cases} \quad (22)$$

$$(23)$$

最後に、全ての点検において故障が発見されずに、時刻  $U+T$  で強制的に取り替えされる場合の期待点検回数を導出する。全ての点検において故障が発見されずに、時刻  $U+T$  で強制的に取り替えされる場合の期待点検回数は次式として表せる。

$$N(p, q) = (U-L+1) \sum_{j=0}^{U-L+1} q^j (1-p)^{U-L+1-j} \int_{L_1(j-1)}^{L_2(j)} dF(t). \quad (24)$$

式(20),(21),(24)より、期待点検回数  $O(p, q)$  は次式として表せる。

$$O(p, q) = K(p, q) + M(p, q) + N(p, q). \quad (25)$$

#### 2.4.5 総期待保全費用

1再生サイクルにおける総期待保全費用を期待損失費用、期待点検費用、取替費用の合計値として定義する。総期待保全費用  $Q(p, q, T)$  は次式として表せる。

$$Q(p, q, T) = c_1 J(p, q, T) + c_2 O(p, q) + c_3. \quad (26)$$

### 3 数値例

本章では、点検しきい値の有効性を検証するために、点検しきい値を考慮する提案型不完全定期点検モデルの総期待保全費用と点検しきい値を考慮しない従来型不完全定期点検モデルの総期待保全費用の差分  $K(p, q, 3) - D(p, q, 1)$ 、および点検開始・終了時刻の数値例を以下に示す。総期待保全費用の差分が負値となる場合、点検しきい値は有効である。また、このような領域を点検しきい値の有効領域とおく。単位時間あたりの損失費用  $c_1 = 10$ 、一回あたりの点検費用  $c_2 = 2$ 、取替費用  $c_3 = 0$  とし、 $R = 0.7$  とする。システム故障分布をワイブル分布関数  $F(t) = 1 - \exp[-(t/\eta)^m]$  とする。ワイブル密度関数は  $f(t) = m/\eta(t/\eta)^{m-1} \exp[-(t/\eta)^m]$  である。図2は  $m = 1, \eta = 3, T = 3$  における点検しきい値を考慮する提案型不完全定期点検モデルの総期待保全費用を表している。図3は  $m = 1, \eta = 3$  における点検しきい値を考慮しない従来型不完全定期点検モデルの総期待保全費用を表している。総期待保全費用は  $p$  の増加より故障の見逃しが減るため減少傾向である。本不完全定期点検モデルは、正常状態のシステム取替による損失を考慮していない。ゆえに、総期

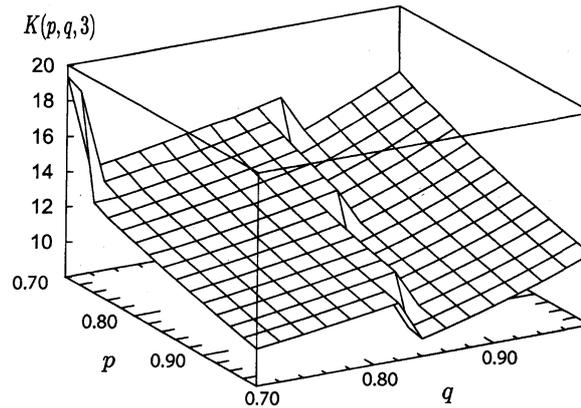


図 2: 不完全定期点検モデル (点検しきい値あり) の総期待保全費用

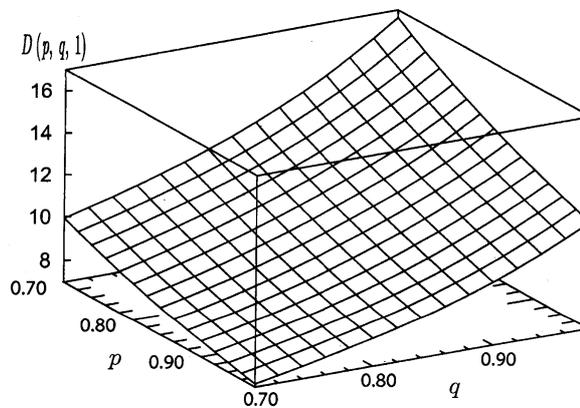


図 3: 不完全定期点検モデル (点検しきい値なし) の総期待保全費用

待保全費用は  $q$  の増加より期待点検回数が増えるため増加傾向にあることが図 2,3 から見てとれる. 表 1,2 は点検終了時刻  $U$  から強制取替時刻までの期間長  $T = 1$ , 期待故障時間  $E[Z] = 5$  である CFR (偶発故障期:  $m = 1.0, \eta = 5.0, E[Z] = 4.999$ ), IFR (摩耗故障期:  $m = 1.4, \eta = 5.5, E[Z] = 5.012$ ) システムに対する総期待保全費用の差分  $K(p, q, 1) - D(p, q, 1)$  と点検開始・終了時刻を表している. 表 1,2 より点検能力が高い場合, 点検下限値  $LIT(p, q, t)$  は減少傾向, 点検下限値  $UIT(p, q, t)$  は増加傾向であることがわかる. また, 図 4 は CFR および IFR システムに対する故障確率密度関数を表している. 図 4 より時間間隔  $(0,1]$  における故障確率が高い CFR システムに対し点検開始時刻が 1 の場合, 点検しきい値が有効である. 一方, 時間間隔  $(0,1]$  における故障確率が低い IFR システムに対し点検開始時刻が 2 の場合, 点検しきい値が有効である. 表 1,2 より点検しきい値の有効領域において感度  $p$  が低く特異度  $q$  が高い場合, つまり, 点検開始時刻  $L$ , 点検終了時刻  $U$  が小さい場合, 期待点検回数が減少するため点検しきい値が有効に働く. また, IFR システムは CFR システムに対し, 点検しきい値の有効領域における総期待保全費用の差分が小さいため, より点検しきい値が有効であることがわかる. 結論として, 点検しきい値の有効性は点検開始時刻  $L$ , 点検終了時刻  $U$  に依存する感度  $p$ , 特異度  $q$ , 故障時間分布の特徴に依存することがわかる.

表 1: CFR システムに対する総期待保全費用の差分と点検開始 ( $L$ )・終了 ( $U$ ) 時刻

$p \backslash q$	総期待保全費用の差分				点検開始 ( $L$ )・終了 ( $U$ ) 時刻			
	0.80	0.85	0.90	0.95	0.80	0.85	0.90	0.95
0.70	5.073	4.499	0.607	-1.405	3→9	3→10	2→10	1→10
0.75	5.054	1.283	0.788	-1.017	3→10	2→10	2→11	1→11
0.80	4.991	1.340	0.894	-0.742	3→11	2→11	2→12	1→12
0.85	4.908	1.405	0.955	-0.546	3→12	2→13	2→13	1→13
0.90	4.837	1.405	1.032	-0.316	3→14	2→15	2→15	1→15
0.95	1.614	1.387	1.071	-0.114	2→18	2→18	2→18	1→19

表 2: IFR システムに対する総期待保全費用の差分と点検開始 ( $L$ )・終了 ( $U$ ) 時刻

$p \backslash q$	総期待保全費用の差分				点検開始 ( $L$ )・終了 ( $U$ ) 時刻			
	0.80	0.85	0.90	0.95	0.80	0.85	0.90	0.95
0.70	6.364	2.294	1.183	-1.564	4→8	3→9	3→9	2→9
0.75	6.415	2.179	1.140	-1.471	4→9	3→9	3→9	2→9
0.80	6.338	2.244	1.352	-1.041	4→10	3→10	3→10	2→10
0.85	6.130	2.230	-0.071	-0.777	4→10	3→11	2→11	2→11
0.90	2.664	2.176	-0.016	-0.621	3→11	3→12	2→12	2→12
0.95	2.589	2.124	0.034	-0.468	3→13	3→14	2→14	2→14

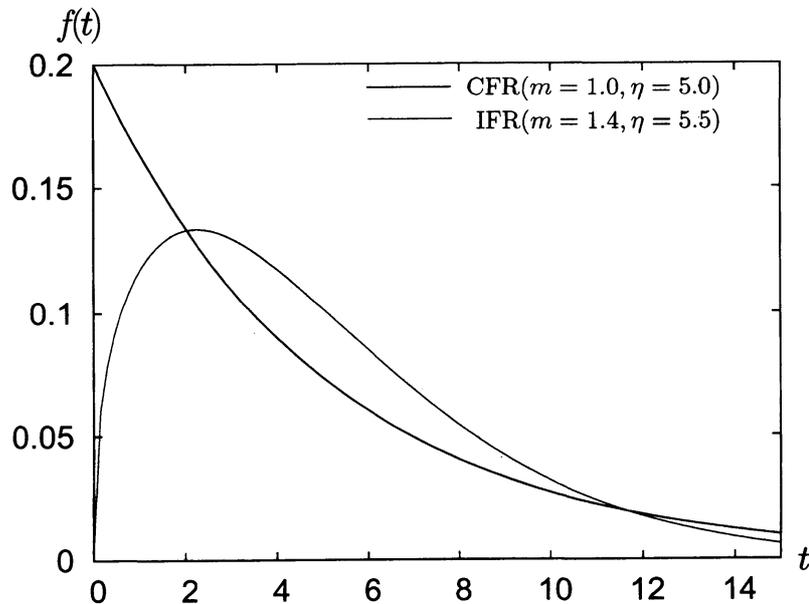


図 4: CFR および IFR システムに対する故障確率密度関数

## 4 まとめ

リスク削減を目的とした点検しきい値の有効性を検証するため、点検しきい値の有無による総期待保全費用の大小関係について数値例による考察を行った。点検しきい値の有効領域において感度  $p$  が低く特異度  $q$  が高い場合、つまり、点検開始時刻  $L$ 、点検終了時刻  $U$  が小さい場合、期待点検回数が減少するため点検しきい値が有効に働くことがわかった。また、IFR システムは CFR システムに対し、点検しきい値の有効領域における総期待保全費用の差分が小さいため、より点検しきい値が有効であることがわかった。結論として、点検しきい値の有効性は点検開始時刻  $L$ 、点検終了時刻  $U$  に依存する感度  $p$ 、特異度  $q$ 、故障時間分布の特徴に依存することがわかった。今後の課題として、本研究では取替しきい値  $R$  を任意に与えたが、総期待保全費用を最小にする  $R$  の導出方法が考えられる。また、点検しきい値の有効性を解析的に議論する。

## 参考文献

- [1] R.E. Barlow and F. Proschan, *Mathematical Theory of Reliability*. Wiley, New York, 1965.
- [2] A.H Christer and W. Wang, “A Simple Condition Monitoring Model for a Direct Monitoring Process”, *European Journal of Operational Research*, vol.82, pp.258-269, 1995.
- [3] A.Grall, L.Dieulle and C.Berenguer, “A Condition-Based Maintenance Policy with Non-Periodic Inspections for a Two-Unit Series System”, *Reliability engineering and system safety*, vol.87, pp.109-120, 2005.
- [4] N. Kaio and S. Osaki, “Optimal Inspection Policy With Two Types Of Imperfect Inspection Probabilities”, *Microelectronics reliability*, Vol.26, pp.117-128, 1986