

密輸ゲームにおける情報秘匿の密輸者に対する取締側の合理的意思決定

防衛大学校・情報工学科 宝崎 隆祐
Ryusuke Hohzaki
Department of Computer Science
National Defense Academy

1 はじめに

1960年代にランド社の Dresher[1] が始めた Inspection ゲームの一つの分野が密輸ゲームである。これまで筆者達は、その確率ゲームモデル [4]、プレイヤーの情報が完全に秘匿されたモデル [5]、密輸者戦略を密輸量とするモデル [2] など、密輸ゲームの拡張を試みてきた。最近では、密輸量戦略のモデルに、プレイヤーの情報獲得における非対称性を組み入れ、情報の価値に関する分析を行った [6]。従来の研究では、密輸者戦略の形態として密輸を決行するか否かの二者択一であるモデルが大半であり、前回行った情報の非対称性をこのような従来型のモデルに適用した場合の分析を行うことが本研究の目的である。

2 モデルの前提と定式化

パトロールを実施する取締者と密輸を行う密輸者との間で行われる次のような2人ゼロ和の多段ゲームを考える。

- A1. ステージ数が残り日数により表された全体で N 日の多段ゲームを考える。時間は、ステージ $N, N-1, \dots, 1$ と経過する。
- A2. 初期ステージ N 以降、取締者は最大で K 回のパトロール機会を、密輸者は最大 L 回の密輸の機会をもつ。
- A3. 取締者は各ステージにおいてパトロールを実施する (P) か否か (NP) の2つの手を持ち、密輸者は密輸を決行する (S) か否か (NS) を決めるが、実施・決行のアクションは1日1回を限度とすることから、パトロール許容回数、密輸可能回数が残り日数を越えた場合、超過分は破棄される。また、パトロール機会及び密輸機会が尽きたプレイヤーはアクションを起こせない。
- A4. パトロールの実施日に密輸が決行された場合、密輸者が拿捕 (摘発) されるか、密輸が成功するか、あるいは何も生起しないかのいずれかが生起し、前者の確率は p_1 、後者の確率は p_2 であり、 $p_1 + p_2 \leq 1$ とする。パトロールが実施されない場合、決行された密輸は確実に成功する。
- A5. 密輸者が拿捕された場合、取締側は $\alpha > 0$ の利益を受けてゲームは終了する。密輸が成功した場合、密輸者は1の利益を得る。ゲームの支払はゼロ和であり、取締側の利益で定義する。ただし、パトロール実施中にあって密輸が決行されないように、 $\gamma \equiv \alpha p_1 - p_2 > 0$ であるとする。
- A6. ある日において摘発がなければ次の日のゲームに移る。その時密輸者は取締者が前日取った戦略を知ることができるのに対し、密輸者の過去の戦略は取締者には秘匿される。ただし、ゲームの初期状態 (N, K, L) は両プレイヤーの共有知識である。
- A7. 密輸者の摘発、あるいは残り日数が尽きたときにゲームは終了する。

取締者がパトロール可能回数 k を、密輸者が密輸可能回数 l をもつあるステージ n の状態を (n, k, l) で表す。このステージの冒頭においては、密輸者は (n, k, l) を知っているが、取締者は (n, k) のみ

認識可能であり、密輸者の密輸回数については信念という形の子想をもつ。ステージ n における取締者の信念を $q_n = \{q_n(l), l = \underline{l}_n, \underline{l}_n + 1, \dots, \bar{l}_n\}$ で表す。 $q_n(l)$ は密輸者の残り密輸可能回数が l である確率であり、 $\sum_{l=\underline{l}_n}^{\bar{l}_n} q_n(l) = 1$, $q_n(l) \geq 0$ を満たす。密輸可能回数の下限 \underline{l}_n は初期ステージから毎日密輸が実行されたとして推測でき、上限 \bar{l}_n は全く密輸を執行しないとして次のように合理的に推測できる。

$$\underline{l}_n = \max\{L - N + n, 0\}, \bar{l}_n = \min\{L, n\} \quad (1)$$

ただし、前提 (A6) で仮定された初期ステージにおける知識から

$$q_N(L) = 1, q_N(l) = 0 \quad (l \neq L) \quad (2)$$

であるが、 $\underline{l}_N = L$, $\bar{l}_N = L$ は式 (1) 式からでも導出できる。

ここで状態 (n, k, l) において両プレイヤーがもつ戦略を定義しよう。取締者の戦略 P , NP の選択確率を x_n , $1 - x_n$ とする。残り密輸可能回数 $l \in [\underline{l}_n, \bar{l}_n]$ をもつ密輸者（これをタイプ l の密輸者という）の戦略 S , NS の選択確率を $y_n(l)$, $1 - y_n(l)$ とし、すべてのタイプの密輸者の戦略全体を $y_n \equiv \{y_n(l), l \in [\underline{l}_n, \bar{l}_n]\}$ で表す。ただし、 $k = 0$ または $l = 0$ の場合は、取締者または密輸者はそれぞれ戦略 NP , NS しか取れないから、 $x_n = 0$ または $y_n(l) = 0$ である。

状態 (n, k, l) でのステージゲームの状況を説明したのが、次の表 1 である。

表 1. 支払に関する表

Belief		$q_n(\underline{l}_n)$		$q_n(l)$		$q_n(\bar{l}_n)$
$C \setminus S$...	$y_n(l), 1 - y_n(l)$...	
		S, NS	...	S, NS		S, NS
x_n	P		...	(1), (2)	...	
$1 - x_n$	NP		...	(3), (4)	...	

$v(n, k, l; q_n)$ を、状態 (n, k, l) を認識し、取締者の信念 q_n を予想する密輸者がこのステージ以降の両プレイヤーの合理的な均衡戦略の結果期待できる支払とすると、両プレイヤーの戦略の組合せ (X, Y) , $X \in \{P, NP\}$, $Y \in \{S, NS\}$ に応じてこれ以降得られる期待支払 $R_l(X, Y)$ は次式で与えられる。もちろん、 $k = 0$ あるいは $l = 0$ の場合には、プレイヤーの取り得る戦略が限定されることは前述したとおりである。

$$R_l(P, S) = \gamma + (1 - p_1)v(n - 1, k - 1, l - 1; \Gamma_P(q_n)) \quad (3)$$

$$R_l(P, NS) = v(n - 1, k - 1, l; \Gamma_P(q_n)) \quad (4)$$

$$R_l(NP, S) = -1 + v(n - 1, k, l - 1; \Gamma_N(q_n)) \quad (5)$$

$$R_l(NP, NS) = v(n - 1, k, l; \Gamma_N(q_n)) \quad (6)$$

ただし、 $\Gamma_P(q_n)$, $\Gamma_N(q_n)$ は、現ステージで採ったパトロール戦略 P , NP のそれぞれに依存して、取締者が次ステージで更新する信念である。

ここで値 $v(n, k, l; q_n)$ の初期条件、境界条件を確認しておく。

(i) 日数が尽きたならば、支払は発生しない。

$$v(0, k, l; q_n) = 0 \quad (7)$$

(ii) $k > n$ または $l > n$ ならば、超過分の機会は失われる。

$$v(n, k, l; q_n) = v(n, n, l; q_n) \quad (k > n \text{ ならば}), \quad v(n, k, l; q_n) = v(n, k, n; q_n) \quad (l > n \text{ ならば}) \quad (8)$$

(iii) $k = 0$ ならば、それを知る密輸者は確実に密輸を成功させる。

$$v(n, 0, l; q_n) = -l \quad (n > 0, l \leq n) \quad (9)$$

(iv) 密輸が実行できなければ、支払は決して発生しない。

$$v(n, k, 0; q_n) = 0 \quad (10)$$

状態 (n, k) で信念 q_n をもつ取締役者が、このステージ n での両プレイヤーの戦略 x_n, y_n に依存して、これ以降得られると考える期待支払 $P(x_n, y_n)$ は次式で表され、取締役者は $\{y_n(l)\}$ を知らずにこれを大きくしようとする。

$$P(x_n, y_n) = \sum_{l=\underline{l}_n, l \neq 0}^{\bar{l}_n} q_n(l) \{x_n \{y_n(l)R_l(P, S) + (1 - y_n(l))R_l(P, NS)\} \\ + (1 - x_n) \{y_n(l)R_l(NP, S) + (1 - y_n(l))R_l(NP, NS)\}\} \quad (11)$$

また、状態 (n, k, l) を認識し、取締役者の信念 q_n を予想するタイプ l ($l \in [\underline{l}_n, \bar{l}_n], l \neq 0$) の密輸者が期待するこれ以降での期待支払は次式となり、密輸者は x_n を知らずにこれを小さくしたいと考える。

$$V(x_n, y_n(l)) = x_n \{y_n(l)R_l(P, S) + (1 - y_n(l))R_l(P, NS)\} \\ + (1 - x_n) \{y_n(l)R_l(NP, S) + (1 - y_n(l))R_l(NP, NS)\} \quad (12)$$

式 (11) において $l=0$ を除いたのは、この場合以後のステージで密輸者は戦略 NS しか取り得ず密輸は決して実行されないから、 $R_l(\cdot, \cdot) = 0$ となって支払に何の影響もないからである。以上のことを踏まえ、ステージ n で考慮すべき残り密輸可能回数の範囲を $\Lambda_n \equiv \{l \mid \underline{l}_n \leq l \leq \bar{l}_n, l \neq 0\}$ で表すこととする。

すべての $l \in \Lambda_n$ について $y_n(l)$ に関する (12) 式の最小化は、変数 y_n に関して (11) 式を最小化することと同値となり、密輸者は期待支払 $P(x_n, y_n)$ を小さくしたい最小化プレイヤーと考えることができる。以上から、状態 (n, k, l) でのステージゲームは、期待支払 $P(x_n, y_n)$ に対しマキシマイザーである取締役者とミニマイザーである密輸者との間の 2 人ゼロ和ゲームとなる。つまり、 $\min_{y_n} \max_{x_n} P(x_n, y_n)$ を求め、そのミニマックス値を与える最適戦略 x_n^*, y_n^* を導出することが、ステージゲームを解くことになる。このとき、(12) 式から、密輸者の期待できる均衡解による支払は次式となる。

$$v(n, k, l; q_n) = \min \{x_n^* R_l(P, S) + (1 - x_n^*) R_l(NP, S), x_n^* R_l(P, NS) + (1 - x_n^*) R_l(NP, NS)\} \quad (13)$$

ここでの我々の問題は、ゲームの値である初期状態 N, K, L に対する値 $v(N, K, L; q_N)$ を求め、初期状態から最終ステージ $n=1$ に至る任意の状態 $(n, k, l; q_n)$ での最適戦略 x_n^*, y_n^* を求めることである。

3 ベイジアン・ナッシュ均衡解の導出と信念の更新

期待支払 (11) 式は変数 $x_n, y_n = \{y_n(l)\}$ について双線形な式であるから、そのミニマックス値、マックスミニ値は次のように容易に求められる。まず期待支払の x_n に関する最大化問題は

$$\max_{0 \leq x_n \leq 1} P(x_n, y_n) = \max \left\{ \sum_{l \in \Lambda_n} q_n(l) \{y_n(l)R_l(P, S) + (1 - y_n(l))R_l(P, NS)\}, \right. \\ \left. \sum_{l \in \Lambda_n} q_n(l) \{y_n(l)R_l(NP, S) + (1 - y_n(l))R_l(NP, NS)\} \right\} \quad (14)$$

のように変形できるから、この問題 (14) を更に y_n に関して最小化してミニマックス値を求めると、次の線形計画問題 (P_S) と同じとなる。これにより、ゲームの値と密輸者の最適戦略 y_n^* を求

めることができる。

$$(P_S) \quad \min_{\eta, \{y_n(l), l \in \Lambda_n\}} \eta$$

$$s.t. \quad \sum_{l \in \Lambda_n} q_n(l) \{y_n(l)R_l(P, S) + (1 - y_n(l))R_l(P, NS)\} \leq \eta, \quad (15)$$

$$\sum_{l \in \Lambda_n} q_n(l) \{y_n(l)R_l(NP, S) + (1 - y_n(l))R_l(NP, NS)\} \leq \eta, \quad (16)$$

$$0 \leq y_n(l) \leq 1, \quad l \in \Lambda_n$$

また,

$$\min_{\{0 \leq y_n(l) \leq 1, l \in \Lambda_n\}} P(x_n, y_n)$$

$$= \sum_{l \in \Lambda_n} q_n(l) \min \{x_n R_l(P, S) + (1 - x_n) R_l(NP, S), x_n R_l(P, NS) + (1 - x_n) R_l(NP, NS)\}$$

の変形に対し, さらに x_n に関する最大化を施せば次の線形計画問題を得ることができる。

$$(P_C) \quad \max_{x_n, \{\nu(l), l \in \Lambda_n\}} \sum_{l \in \Lambda_n} q_n(l) \nu(l)$$

$$s.t. \quad x_n R_l(P, S) + (1 - x_n) R_l(NP, S) \geq \nu(l), \quad l \in \Lambda_n, \quad (17)$$

$$x_n R_l(P, NS) + (1 - x_n) R_l(NP, NS) \geq \nu(l), \quad l \in \Lambda_n, \quad (18)$$

$$0 \leq x_n \leq 1$$

この線形計画問題 (P_C) を解けば, マックスミニ値と最適なパトロール戦略 x_n^* を得ることができる。ここで, (17), (18) 式と (13) 式を比較すれば, 問題 (P_C) の最適な $\nu(l)$ の値により $v(n, k, l; q_n)$ が得られることが分かる。

$$v(n, k, l; q_n) = \nu^*(l), \quad l \in \Lambda_n \quad (19)$$

通常の行列ゲームにおけるミニマックス最適化とマックスミニ最適化の間で成り立つように, 問題 (P_S) と (P_C) の間には双対の関係があり, (17) 式及び (18) 式的双対変数をそれぞれ $z_1(l) \geq 0$, $z_2(l) \geq 0$ とすれば, 最適値の間には $y_n^*(l) = z_1^*(l)/q_n(l)$, $1 - y_n^*(l) = z_2^*(l)/q_n(l)$ の関係があり, また, (15) 式及び (16) 式的双対変数の最適値はそれぞれ x_n^* と $1 - x_n^*$ に他ならないから, 問題 (P_S) あるいは (P_C) のどちらかを解けば, 両プレイヤーの最適戦略 x_n^* , y_n^* と $v(n, k, l; q_n)$ を求めることができる。

問題 (P_S) または (P_C) の中にある $R_l(\cdot)$ は, 式 (3)~(6) によって, 次ステージ $n-1$ での値 $v(n-1, \cdot)$ を用いて計算できる。したがって, (7) 式で与えられる $n=0$ での初期値から出発し, 境界条件である (8), (9), (10) 式等を使いながら, 問題 (P_S) または (P_C) を $n=1, \dots, N$ としつつ逐次的に解いていけば, 最終的なゲームの値 $v(N, K, L; q_N)$ を得ることが理論的には可能である。ただし, 信念の更新を考慮する必要があり, 実際のゲームの値にたどり着くにはアルゴリズム的な工夫を要する。

さて, これから信念の更新演算子 Γ_P と Γ_N について議論することにしよう。取締者は現ステージ n で採用する自らの戦略 P または NP により, 次ステージ $n-1$ の冒頭において信念を更新する。このとき, 現ステージにおいて密輸者の残り密輸可能回数が l になる標準的なケースには, 次の2つがある。密輸決行により前ステージでの回数 $l+1$ 回が減少するケース, 及び前ステージにおける l 回が密輸未決行で l に維持されるケースである。しかしながら, 次のような特殊ケースがある。

- (a) $n-1 \geq L$ の場合: ステージ $n-1$ で $l = \bar{l}_{n-1} = \min\{L, n-1\} = L$ となるのは, 前ステージ n での回数 $\bar{l}_n = L$ が密輸未実施により維持されるケースのみである。

- (b) $L \geq n$ の場合: ステージ $n-1$ で $l = \bar{l}_{n-1} = \min\{L, n-1\} = n-1$ となるのは, 上記の標準的な2つのケースの他に, 前ステージ n での回数 $\bar{l}_n = n$ から密輸未実施により1回の密輸機会が破棄されるケースがある.
- (c) $L-N+n > 0$ の場合: 現ステージ $n-1$ で $l = \underline{l}_{n-1} = \max\{0, L-N+(n-1)\} = L-N+n-1$ となるのは, 密輸決行により前ステージ n での回数 $\underline{l}_n = L-N+n$ が1減少するケースのみである.

ステージ n での信念 q_n のステージ $n-1$ における更新は, 上記のような推移の可能性と密輸者の最適戦略 y_n^* を考慮して計算すればよい. ただし, 推移確率としての特殊な例として, $L-N+n \leq 0$ の場合に, 前ステージ n における回数 $\underline{l}_n = \max\{0, L-N+n\} = 0$ から現ステージ $n-1$ での回数 $l = \underline{l}_{n-1} = \max\{0, L-N+(n-1)\} = 0$ への推移は, 確率1で生じる. 何故なら, $l=0$ ならば密輸者は密輸未決行 (NS) しか取り得ないからである. 以上の考察のほか, ステージ $n-1$ での信念の更新には, 前ステージ n で拿捕が発生しなかったという条件が付けられる. 現ステージでの取締者の戦略 P に対しては拿捕があり得るのに対し, 戦略 NP に対しては拿捕の可能性はゼロであることを考慮して, 更新演算子 Γ_P 及び Γ_N は次により評価できる.

- (i) $\underline{l}_{n-1} < l < \bar{l}_{n-1}$ なる l に対し,

$$\Gamma_P(q_n)(l) = \frac{q_n(l+1)y_n^*(l+1)(1-p_1) + q_n(l)(1-y_n^*(l))}{\sum_{s=\underline{l}_n}^{\bar{l}_n} q_n(s)(1-y_n^*(s)p_1)},$$

$$\Gamma_N(q_n)(l) = q_n(l+1)y_n^*(l+1) + q_n(l)(1-y_n^*(l))$$

- (ii) $\bar{l}_{n-1} = L$ の場合の $l = L$ に対し,

$$\Gamma_P(q_n)(l) = \frac{q_n(l)(1-y_n^*(l))}{\sum_{s=\underline{l}_n}^{\bar{l}_n} q_n(s)(1-y_n^*(s)p_1)}, \quad \Gamma_N(q_n)(l) = q_n(l)(1-y_n^*(l))$$

- (iii) $\bar{l}_n = n$ の場合の $l = \bar{l}_{n-1} = n-1$ に対し,

$$\Gamma_P(q_n)(l) = \frac{q_n(l+1)(1-y_n^*(l+1)p_1) + q_n(l)(1-y_n^*(l))}{\sum_{s=\underline{l}_n}^{\bar{l}_n} q_n(s)(1-y_n^*(s)p_1)},$$

$$\Gamma_N(q_n)(l) = q_n(l+1) + q_n(l)(1-y_n^*(l))$$

- (iv) $\underline{l}_n > 0$ かつ $\bar{l}_{n-1} > \underline{l}_{n-1}$ の場合の $l = \underline{l}_{n-1} = \underline{l}_n - 1$ に対し,

$$\Gamma_P(q_n)(l) = \frac{q_n(l+1)y_n^*(l+1)(1-p_1)}{\sum_{s=\underline{l}_n}^{\bar{l}_n} q_n(s)(1-y_n^*(s)p_1)}, \quad \Gamma_N(q_n)(l) = q_n(l+1)y_n^*(l+1)$$

- (v) $\underline{l}_n = 0$ の場合の $l = \underline{l}_{n-1} = 0$ に対し,

$$\Gamma_P(q_n)(l) = \frac{q_n(0) + q_n(1)y_n^*(1)(1-p_1)}{q_n(0) + \sum_{s=1}^{\bar{l}_n} q_n(s)(1-y_n^*(s)p_1)}, \quad \Gamma_N(q_n)(l) = q_n(0) + q_n(1)y_n^*(1)$$

最後に, 信念の初期値としての (2) 式を再度記しておく.

$$q_N(L) = 1, \quad q_N(l) = 0 \quad (l = 0, 1, \dots, L-1) \quad (20)$$

以上のように, ステージ N での初期値 (20) 式から始まり, ステージ n での信念 q_n は, そのステージにおける密輸者の最適戦略 y_n^* を用いて, 次のステージ $n-1$ で信念 $\Gamma_P(q_n)$, $\Gamma_N(q_n)$ へ更新される. つまり, 信念の更新は $n = N, N-1, \dots, 1$ の順序でなされる.

ベイジアン・ナッシュ均衡解は, その合理性の条件として「逐次合理性」と「信念と均衡解との整合性」が必要とされる. この問題に限定すれば, 前者は定式化 (P_S) または (P_C) を解くことによりステージゲームでの最適戦略及び v 値を求めることに相当し, 後者は Γ_P 及び Γ_N の演算子

として上で提示したケース (i) から (v) までの式に基づき信念 q_n を更新することに相当する。ステージゲームの均衡解は $n = 1, 2, \dots, N$ の順序で計算されるのに対し、信念の更新が反対の順序 $n = N, N-1, \dots, 1$ でなされることに計算の困難さが予見されるものの、特殊な例や小さなステージ数の問題に関しては、「逐次合理性」と「信念と均衡解との整合性」を満たす均衡解を解析的に見いだすことは少しの苦勞により達成できる。次の節では、そのような幾つかの特殊例を見ていく。なお、一般の場合の均衡解を求める数値解法アルゴリズムについては、参考文献 [3] を参照願いたい。

4 特殊例における均衡解

ここでは、幾つかの特殊例について解析的な均衡解を提示するが、その導出と証明については参考文献 [3] に譲ることとする。

補助定理 1 (i) ゲームの値 $v(N, K, L; q_N)$ も含め、 v 値は非正である。

$$v(n, k, l; q_n) \leq 0 \quad (21)$$

(ii) $k = n$ である状態 (n, n, l) では、任意の l 及び q_n に対し $v(n, n, l; q_n) = 0$ である。最適なパトロール戦略は $x_n^* \geq 1/(\gamma + 1)$ なる任意の x_n^* であり、密輸者は決して密輸をしない ($y_n^* = 0$) のが最適である。

実際のところ、 $n = k$ となれば、取締者は以後のステージにおいて常にパトロールを実施することができ、それに対し密輸者は常に NS を取らざるを得ないから、密輸者の期待できる値は $v(n, n, l; q_n) = 0$ となる。その際、パトロール確率を必ずしも 1 でなく、 $1/(\gamma + 1)$ 以上とすることで密輸が抑止されることを補助定理 1 は示している。

補助定理 2 $L = 1$ の場合、 $n > k$ である任意の状態 $(n, k, 1)$ に関し、

$$v(n, k, 1; q_n) = - \binom{n-1}{k} / \sum_{s=0}^k \gamma^{k-s} \binom{n}{s} \quad (22)$$

となる。

補助定理 2 の状況では、すべてのステージにおける密輸者の残り密輸回数は $l = 0$ または 1 と予想される。しかし、 $l = 0$ の密輸者は密輸を決して決行できず、それに対し取締者が P, NP のどちらの戦略を取ろうとも利益はゼロで支払には何の影響もない。したがって、取締者は常に $l = 1$ のタイプの密輸者を想定して戦略を考えればよく、問題 $(P_S), (P_C)$ は容易に解くことができる。

[$N = 3$ の場合の均衡解と v 値]

ステージ数 $N = 3$ でのすべての初期状態 (K, L) ($0 \leq K, L \leq 3$) についても、3 節の条件を満たす解析的な解を提示できるが、 $L = 3$ の場合や $L = 1$ の場合は補助定理 1 及び 2 で示されているから、 $L = 2$ の場合のみ記述する。

$(N, L) = (3, 2)$ の場合： $n = 1, 2, 3$ と逐次的に均衡解を求めてゆく。

(1) ステージ $n = 1$ ： $v(1, 1, l; q) = 0, v(1, 0, l; q) = -l$ ($l \leq 1$) である。

(2) ステージ $n = 2$ ： $\Lambda_2 = \{1, 2\}$ である。

(i) $k = 2$ のとき： $v(2, 2, l; q) = 0$ ($l = 1, 2$) である。

(ii) $k = 1$ のとき：

(a) $-q(1) + (\gamma + p_1)q(2) > 0$ ならば、

$$x_2^* = \frac{1}{\gamma + 1 + p_1},$$

$$v(2, 1, 1; q) = -\frac{1}{\gamma + 1 + p_1}, v(2, 1, 2; q) = -\frac{1}{\gamma + 1 + p_1}$$

(b) $-q(1) + (\gamma + p_1)q(2) < 0$ ならば,

$$x_2^* = \frac{1}{\gamma + 2}, v(2, 1, 1; q) = -\frac{1}{\gamma + 2}, v(2, 1, 2; q) = -\frac{2 - p_1}{\gamma + 2}$$

(c) $-q(1) + (\gamma + p_1)q(2) = 0$ ならば,

$$x_2^* = \forall x \in \left[\frac{1}{\gamma + 2}, \frac{1}{\gamma + 1 + p_1} \right],$$

$$v(2, 1, 1; q) = -x_2^*, v(2, 1, 2; q) = (\gamma + p_1)x_2^* - 1$$

$$q(1) + q(2) = 1$$
 を考えれば, 上記の (c) のケースは,

$$q(1) = \frac{\gamma + p_1}{\gamma + 1 + p_1}, q(2) = \frac{1}{\gamma + 1 + p_1}$$
 の信念をもつ場合に限定される.

(3) ステージ $n = N = 3 : \Lambda_3 = \{2\}$ である.

(i) $K = 3$ のとき: $v(3, 3, 2; q) = 0$ である.

(ii) $K = 2$ のとき: $(n, k) = (2, 1)$ の解の分類に従って, 次のように場合分けされる.

(a) $-\Gamma_P(q)(1) + (\gamma + p_1)\Gamma_P(q)(2) > 0$ ならば,

$$x_3^* = \frac{\gamma + 1 + p_1}{(\gamma + 1)^2 + p_1(\gamma + 1) + p_1}, y_3^* = \frac{1}{(\gamma + 1)^2 + p_1(\gamma + 1) + p_1},$$

$$v(3, 2, 2; q) = -\frac{1}{(\gamma + 1)^2 + p_1(\gamma + 1) + p_1}$$

(b) $-\Gamma_P(q)(1) + (\gamma + p_1)\Gamma_P(q)(2) < 0$ ならば,

$$x_3^* = \frac{\gamma + 2}{(\gamma + 1)(\gamma + 2) + 1}, y_3^* = \frac{2 - p_1}{(\gamma + 1)(\gamma + 2) + 1},$$

$$v(3, 2, 2; q) = -\frac{2 - p_1}{(\gamma + 1)(\gamma + 2) + 1}$$

(c) $-\Gamma_P(q)(1) + (\gamma + p_1)\Gamma_P(q)(2) = 0$ ならば, 次のステージで状態 $(n, k) = (2, 1)$ になった場合は, 取締者は区間 $[1/(\gamma + 2), 1/(\gamma + 1 + p_1)]$ のある z をパトロール実施確率として採用するものと決める.

$$x_3^* = \frac{1}{\gamma + 2 - (\gamma + 1)z}, y_3^* = \frac{1 - (\gamma + p_1)z}{(\gamma + 1)(1 - z) + 1},$$

$$v(3, 2, 2; q) = -\frac{1 - (\gamma + p_1)z}{\gamma + 2 - (\gamma + 1)z}$$

ここで取締者は $v(3, 2, 2; q)$ を最大にする $z^* = \arg \max_z v(3, 2, 2; q)$ を選択する.

上の分類には, 問題 (P_S) を解いて得た密輸者の最適戦略 y_3^* を記した. この y_3^* を使用して信念 q の更新 Γ_P 及び Γ_N を計算した後, 分類 (a), (b) 及び (c) における更新信念の条件式が成立するためのパラメータ γ, p_1 の関係式を求めた. その結果を以下に記載する. 上記の分類 (c) において, 密輸者の戦略 y_3^* がステージ $n = 2$ における取締者の自由意思に任せられる戦略 z を含むことの妥当性に疑問があるであろうが, 実際の計算結果では一意に決まる. 以下の式では, $\gamma^2 + (1 + p_1)\gamma + 2p_1 - 1 = 0$ の解を $\hat{\gamma}$ として用いる.

$$\hat{\gamma} \equiv \frac{1}{2} \left\{ -(1 + p_1) + \sqrt{(5 - p_1)(1 - p_1)} \right\}$$

$(N, K, L) = (3, 2, 2)$ のケース: 上の (a), (b), (c) の条件式を整理して再記する.

(a) $\gamma > \hat{\gamma}$ ならば,

$$x_3^* = \frac{\gamma + 1 + p_1}{(\gamma + 1)^2 + p_1(\gamma + 1) + p_1}, y_3^* = \frac{1}{(\gamma + 1)^2 + p_1(\gamma + 1) + p_1},$$

$$v(3, 2, 2; q) = -\frac{1}{(\gamma + 1)^2 + p_1(\gamma + 1) + p_1} \quad (23)$$

(b) $\gamma < \hat{\gamma}$ ならば,

$$x_3^* = \frac{\gamma + 2}{(\gamma + 1)(\gamma + 2) + 1}, y_3^* = \frac{2 - p_1}{(\gamma + 1)(\gamma + 2) + 1},$$

$$v(3, 2, 2; q) = -\frac{2 - p_1}{(\gamma + 1)(\gamma + 2) + 1} \quad (24)$$

(c) $\gamma = \hat{\gamma}$ ならば,

$$x_3^* = \frac{1}{\gamma + 2 - (\gamma + 1)z}, \quad y_3^* = \frac{1}{\gamma + 2}, \quad v(3, 2, 2; q) = -\frac{1}{\gamma + 2} \quad (25)$$

ただし, z は $1/(\gamma + 2) \leq z \leq 1/(\gamma + 1 + p_1)$ なる任意の値であり, ステージ $n = 2$ の状態 $(n, k) = (2, 1)$ においては, 取締者は z の確率でパトロールを実施する腹案を持つとする.

(iii) $K = 1$ のとき: $(n, k) = (2, 1)$ の解の分類に従って, 次のように場合分けされる.

(a) $-\Gamma_N(q)(1) + (\gamma + p_1)\Gamma_N(q)(2) > 0$ ならば,

$$x_3^* = \frac{1}{\gamma + 2 + p_1}, \quad y_3^* = \frac{1}{(\gamma + 1 + p_1)(\gamma + 2 + p_1)}, \quad v(3, 1, 2; q) = -\frac{3}{\gamma + 2 + p_1}$$

(b) $-\Gamma_N(q)(1) + (\gamma + p_1)\Gamma_N(q)(2) < 0$ ならば,

$$x_3^* = \frac{1}{\gamma + 3}, \quad y_3^* = \frac{1}{(\gamma + 3)(\gamma + 1 + p_1)}, \quad v(3, 1, 2; q) = -\frac{4 - p_1}{\gamma + 3}$$

(c) $-\Gamma_N(q)(1) + (\gamma + p_1)\Gamma_N(q)(2) = 0$ ならば, 次のステージで状態 $(n, k) = (2, 1)$ になった場合は, 取締者は区間 $[1/(\gamma + 2), 1/(\gamma + 1 + p_1)]$ のある z をパトロール実施確率として採用するものと決める.

$$x_3^* = \frac{z}{z + 1}, \quad y_3^* = \frac{1 + (\gamma + p_1)z}{(\gamma + 1 + p_1)(z + 1)}, \quad v(3, 1, 2; q) = -\frac{1 + (2 - \gamma - p_1)z}{z + 1}$$

分類 (a), (b) 及び (c) における更新信念の条件を y_3^* を用いて検証した結果, 以下の均衡解を得る. この場合も, 分類 (c) の y_3^* は一意に決まる.

$(N, K, L) = (3, 1, 2)$ のケース: 上の (a), (b), (c) の条件式を整理して再記する.

(a) $\gamma + p_1 > 1$ ならば,

$$x_3^* = \frac{1}{\gamma + 2 + p_1}, \quad y_3^* = \frac{2\gamma + 1 + 2p_1}{(\gamma + 1 + p_1)(\gamma + 2 + p_1)}, \quad v(3, 1, 2; q) = -\frac{3}{\gamma + 2 + p_1}$$

(b) $\gamma + p_1 < 1$ ならば,

$$x_3^* = \frac{1}{\gamma + 3}, \quad y_3^* = \frac{2\gamma + 2 + p_1}{(\gamma + 3)(\gamma + 1 + p_1)}, \quad v(3, 1, 2; q) = -\frac{4 - p_1}{\gamma + 3}$$

(c) $\gamma + p_1 = 1$ ならば,

$$x_3^* = \frac{z}{z + 1}, \quad y_3^* = \frac{1}{2}, \quad v(3, 1, 2; q) = -1$$

ただし, z は $1/(\gamma + 2) \leq z \leq 1/2$ なる任意の値であり, ステージ $n = 2$ の状態 $(n, k) = (2, 1)$ においては, 取締者は z の確率でパトロールを実施する腹案を持つとする.

5 数値例

ここでは, 上で提示したケース $(N, K, L) = (3, 2, 2)$ のゲームの値や初期ステージ $N = 3$ における最適戦略について分析を行う.

図 1 に初期の情報集合 $(N, K, L) = (3, 2, 2)$ から始まるゲーム・ツリーを示した. 各ステージでは, まず取締者の戦略 $\{P, NP\}$ を示す分岐を, その後密輸者の戦略 $\{S, NS\}$ を示す枝を描いており, この分岐の対が 1 回のステージゲームを構成する. 情報取得に関する前提から, 取締者は自らの戦略の履歴と摘発が生起しなかった事実のみを基に, 密輸者の残り密輸可能数を予想して戦略を決めなければならない. 密輸者は, 同じステージの同時手番による取締者の戦略のみを未知として戦略を決定する. 以上の手順により時系列的に作成される情報集合を, ステージ 3, 2 では楕円で, ステージ 1 ではノードを結ぶ実線で示しており, 楕円の中及び実線の横にそこで手番をもつプレイヤーの認識できる情報を表記した. すなわち, 取締者の情報集合には初期状態 (N, K, L) を除いて, ステージ番号と残りパトロール回数を示すペア (n, k) が, 密輸者に関しては, 残り密輸可能回数 l が付加された組 (n, k, l) が記されている. 各ステージでは, パトロール実施 (P) と密輸決行 (S) の組には, 偶然手番による摘発の生起のあり得ることを示す四角を付加した. そこで

は確率 p_1 で摘発が起これりゲームが終了し、確率 $1-p_1$ で未摘発により次ステージへゲームが進む。最適戦略が純粋戦略となる枝は太い赤線で示したが、描画上の簡素化のため、最適解が自明なステージ 1 ではこの純粋戦略以外の枝は省略した。例えば、ステージ数 n とパトロール可能数 k が等しい $(n, k) = (2, 2)$ のような場合には、以後のステージにおける取締者の最適戦略は常に戦略 P を取ることであり、密輸者のそれは NS であり、取締者にとっては密輸者の情報 l は何ら必要無いが、例えば情報集合 $(n, k) = (2, 1)$ では、その手番が $l=1$ を持つのか、 $l=2$ を持つのかを示す信念 $q_2(1), q_2(2)$ が取締者の意思決定には重要である。

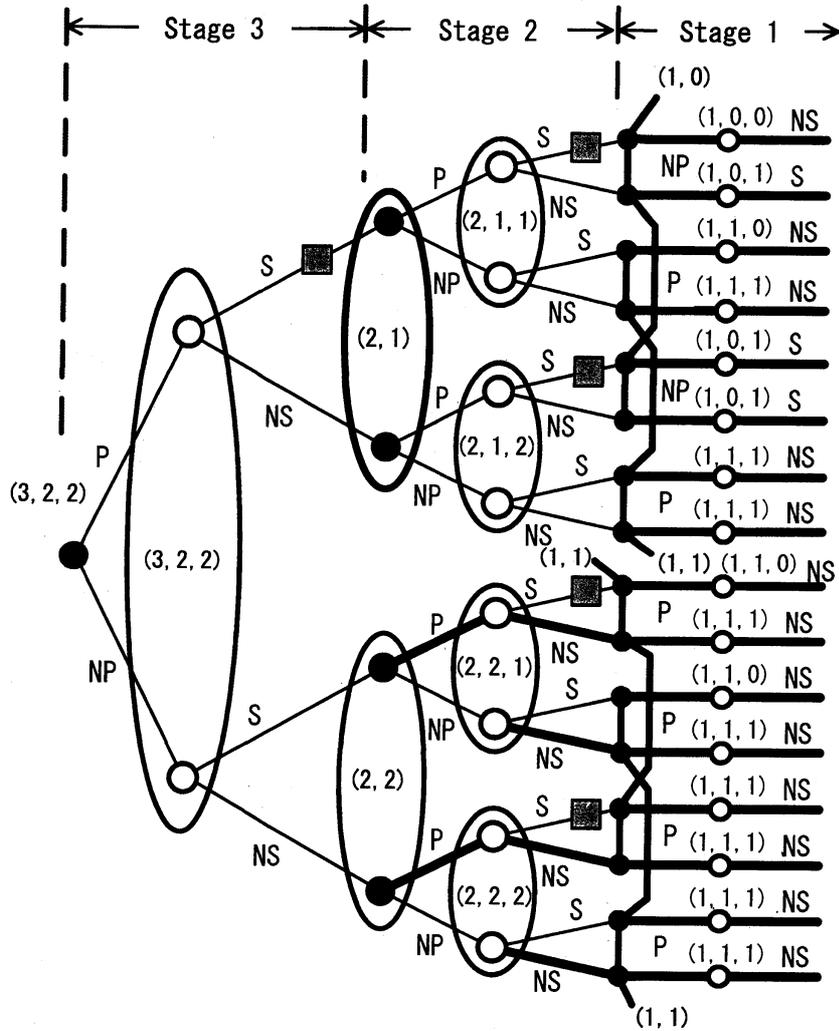


図 1: $(N, K, L) = (3, 2, 2)$ の場合のゲーム・ツリー

ここでは $\alpha = 3$ とし、パラメータ p_1, p_2 に対する均衡解の変化を問題にする。摘発確率 p_1 の増加とともに、ゲームの値 $v(3, 2, 2; q_3)$ が増加することやステージ $n = 3$ における密輸確率 y_3^* が減少することは定性的にも、式 (23)~(25) から明らかである。逆に、密輸成功確率 p_2 の増加とともに、ゲームの値が減少し、 y_3^* が増加することも明らかである。そこで、情報の少ない取締者が如何に合理的な信念と戦略を取るかに焦点を当て、最適なパトロール戦略 x_3^* の変化について次に考察しよう。

結果から先に提示しよう。 p_1-p_2 平面上に (23)~(25) 式の x_3^* を描いたものが図 2 であり、 $p_2 = 0.2$

として p_1 だけに対する x_3^* の変化を描いたのが図3である。取締者の利益は、(1) 摘発による直接利益 α と、(2) 密輸者に易々と密輸を成功させることによる 1 の損失をできるだけ阻止するという間接利益、の2つが考えられるが、どちらも密輸者の密輸決行日に合わせてパトロールを実施することが肝要となる。したがって、 y_3^* に対応する形で、 p_1 の増加とともにパトロール実施確率 x_3^* が減少するのが一般的な傾向である。しかし、図2、3で見られるとおりに、ある曲線、あるいはある点で最適パトロール戦略は不連続に変化する。

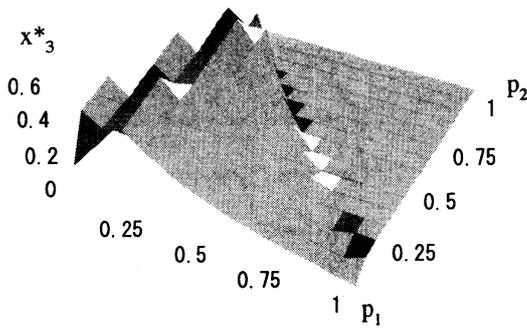


図 2: 最適パトロール戦略

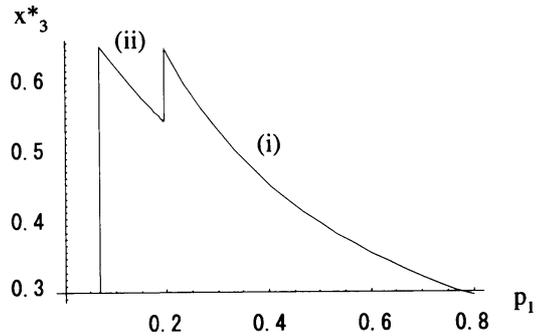


図 3: 最適パトロール戦略 ($p_2 = 0.2$ での断面)

ステージ $n = 2$ においては $\Lambda_2 = \{1, 2\}$ となり、問題 (P_C) の目的関数 $\sum_{l \in \Lambda_2} q_2(l)\nu(l)$ の値は、更新信念 Γ_P を用いた曲線 $-\Gamma_P(q_3)(1) + (\gamma + p_1)\Gamma_P(q_3)(2) = 0$ の上で無差別となる。 $n = 3$ での最適戦略 y_3^* からパトロール実施 (P) による信念の更新 $\Gamma_P(q_N)$ を計算することにより、この無差別曲線は方程式

$$p_2^2 - \{(2\alpha + 1)p_1 + 1\} p_2 + \alpha(\alpha + 1)p_1^2 + (\alpha + 2)p_1 - 1 = 0 \tag{26}$$

で与えられ、この曲線上では戦略 x_2 が変化しても目的関数の値は変化しない。この曲線は、 p_1, p_2 に関する現実性条件 $p_1 + p_2 \leq 1$ と $\gamma = \alpha p_1 - p_2 > 0$ を満たす $p_1 - p_2$ 平面上の区域を、図4のように2つの領域 (i) と (ii) に分割する。

摘発確率 p_1 が大きい領域 (i) では密輸が決行され難くなり (最適密輸確率 y_3^* が小さくなり)、その結果ステージ $n = 2$ で $l = 2$ である信念 $\Gamma_P(q_3)(2)$ が大きくなると予想される。逆に比較的小さな p_1 、大きな p_2 をもつ領域 (ii) では、大きな $\Gamma_P(q_3)(1)$ の逆の信念を持つことが当然と言える。したがって、(i) の領域が (23) 式の (a) の場合の条件式をもち、領域 (ii) が (24) 式の (b) の場合の条件式をもちことが理解できる。

$p_2 = 0.2$ の設定をもつ図3の不連続は、 $p_2 = 0.2$ に対する方程式 (26) の解として点 $p_1 \approx 0.1953$ で起こる。この場所では、ステージ3での最適パトロール実施確率 x_3^* は、左の領域 (ii) から右の領域 (i) に遷る際に、 $(\gamma + 2)/((\gamma + 1)(\gamma + 2) + 1)$ から $(\gamma + 1 + p_1)/((\gamma + 1)^2 + p_1(\gamma + 1) + p_1)$ に増加する。大きな x_3^* をとることによりステージ3での密輸が抑止され、ステージ2において密輸者が $l = 2$ をもち易いとする信念が形成される。逆に小さな x_3^* をとる場合は、ステージ2での密輸者のタイプが $l = 1$ である確率が高いと見なす信念の方が合理的であり、この場合パラメータ p_1, p_2 の大きさからではなく、自らの戦略の取り方によりステージ2において合理的な信念を形成している。不連続曲線上での最適パトロール戦略 $x_3^* = 1/(\gamma + 2 - (\gamma + 1)z)$ は、ステージ2で状態 $(n, k) = (2, 1)$ に至った場合のパトロール実施確率を $1/(\gamma + 2) \leq z \leq 1/(\gamma + 1 + p_1)$ である z にとるという腹案の下での取締戦略であることも、情報を得ることのできない取締者の巧妙な思慮の結果であると言える。

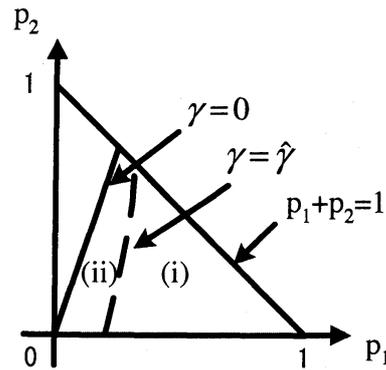


図 4: 合理的な信念の形成領域

6 おわりに

本研究では、取締者と密輸者の情報取得に非対称性があり、取締側に不利となっている密輸ゲームの分析を行った。ゲームの解はベイジアン・ナッシュ均衡解であり、幾つかの特殊ケースに関しては解析解を提示し、取締者の信念と均衡解との合理性についての分析を数値例を用いて行った。一般のケースにおける数値解法アルゴリズムも提案できるが、それについては記述を省略した。また、情報完備な従来モデルとの比較を通して、密輸者の情報の価値も定量的に分析できる。それらの詳細については文献 [3] を参照願いたい。

本研究のモデルでは、密輸者の過去の戦略情報を未知とした情報不完備なモデルを取り扱ったが、他の情報についても同様な手法を用い、密輸取締ゲームにおける情報の価値に関する包括的な評価と分析を押し進めて行く必要がある。さらに、プレイヤーの価値尺度が異なる非ゼロ和ゲームへ拡張することも必要である。

参考文献

- [1] M. Drescher, A sampling inspection problem in arms control agreements: A game-theoretic analysis, Memorandum RM-2972-ARPA, The RAND Corporation, Santa Monica, 1962.
- [2] R. Hohzaki, An inspection game with smuggler's decision on the amount of contraband, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **54**, 25–45, 2011.
- [3] R. Hohzaki, A smuggling game with the secrecy of smuggler's information, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **55**, 23–47, 2012.
- [4] R. Hohzaki, D. Kudoh, T. Komiya, An inspection game: Taking account of fulfillment probabilities of players' aims, *Naval Research Logistics*, **53**, 761–771, 2006.
- [5] R. Hohzaki and H. Maehara, A single-shot game of multi-period inspection, *European J. of Operational Research*, **207**, 1410–1418, 2010.
- [6] R. Hohzaki and R. Masuda, A smuggling game with asymmetrical information of players, *J of the Operational Research Society*, **63**, 1434–1446, 2012.