

図入り教材の作成における Symbolic Thinking の重要性について

木更津工業高等専門学校・基礎学系 山下 哲 (Satoshi Yamashita)
Faculty of Fundamental Research,
Kisarazu National College of Technology

1 はじめに

高専・大学初年級（以下カレッジ級）の数学の授業において、数学的概念の導入時に、教科書だけでは数学的概念を理解させ、それを印象付けることが難しい。また、板書で印象付けようとする、学生はノート写しに精一杯で肝心の数学的概念の理解は疎かになってしまう。このような現状を踏まえると、数学的概念の導入時に図入り数学教材による効果的な印象付けが必要となる。そこで、 $\text{T}_\text{E}\text{X}$ と数式処理システム (Computer Algebra System, 略して CAS) を用いて容易に図入り教材を作成するために、CAS のマクロパッケージ $\text{K}_\text{E}\text{Tpic}$ を 2006 年に開発した [1]。

本稿では、図入り教材の作成において、Symbolic Thinking, すなわち「数学的な作図手順に従ってコマンドを実行することで、図の全体像を明確に認識しながら質的な改良に集中できること」の重要性を $\text{K}_\text{E}\text{Tpic}$ による図入り教材作成事例により明らかにする。まず、第 2 節で、図入り教材の作成方法について言及し、図入り教材の作成に何故 $\text{T}_\text{E}\text{X}$ を使うのか考察する。第 3 節では、 $\text{K}_\text{E}\text{Tpic}$ による図入り教材作成事例を紹介しながら、Symbolic Thinking の重要性について明示する。最後に、第 4 節で、図入り教材を作成するための要件を列挙し、それらを満たすために必要な能力または工夫を提示し、今後の課題について述べる。

2 図入り教材の作成に何故 $\text{T}_\text{E}\text{X}$ を使うのか

前節で、カレッジ級の数学の授業において数学的概念を導入する際、効果的な図入り教材が必要であることを述べた。それでは、実際に、図入り教材をどのように作成しているのだろうか。

まず、文章を作成するためにエディタが必要となるが、カレッジ級の数学教員によく利用されているものに Word と $\text{T}_\text{E}\text{X}$ がある。2009 年に実施した「授業での図の利用に関するアンケート」では、数学研究者及び大学初年級数学教員の 80% 以上が $\text{T}_\text{E}\text{X}$ を使用、高専の数学教員の約 50% が Word を使用（残りのほとんどが $\text{T}_\text{E}\text{X}$ 使用）、高校教員のほとんどが StudyAid.D.B を使用していることがわかった [2]。高校教員の使用している StudyAid.D.B は、高校の数学教科書の類題を集めたデータベースも兼ねており、雛形で作業することにより、教科書と同じ見栄えの課題が作成できるという利点がある。

機能	手書き	Word	TeX+KpTpic
数式表示	◎	△	◎
描画	△	△	◎
記号作成	◎	△	◎
表作成	◎	△	◎
ページレイアウト	◎	○	◎

◎；大変良い
○；良い
△；やや難

表 1. 図入り教材作成機能における Word と TeX+KpTpic の比較

ただし、数学的概念の導入教材のようなデータベースにないオリジナル教材を作成することは難しい。一方、高専の数学教員が使用している Word ならば、数学的概念の導入教材を作成することは可能であり、数式表示と仕上がりの良さに拘れば、大学教員のほとんどが使用している TeX の方がさらに良い。しかし、Word や TeX でさえも、教材のページレイアウトを微調整することが難しいという欠点がある。

次に、図を作成するための作図用ソフトが必要となる。InDesign などのお絵描きソフトでは、平面描画は描けるが、正確な大きさで作成することは難しい。空間描画については、平面図形の組み合わせで描画しなければならないため、円錐ですら正確に作図することが困難である。正確な図を作成しようとする、Maple や Mathematica などの数式処理システム (Computer Algebra System, 略して CAS) が必要となる。また、動的な図を見せるなら、シンデレラや GeoGebra などの動的幾何学ソフトウェア (Dynamic Geometry Software, 略して DGS) が必要となる。印刷配付教材に限定すれば、CAS で十分であろう。

では、TeX と CAS さえ用意すれば、オリジナルの図入り教材を容易に作成できるのだろうか。CAS で作成した図を EPS などの画像ファイルとして出力し、`\includegraphics` で TeX 文書に挿入すれば図入り教材はできるが、以下のような作業するには高度な技術を要し、容易に実現できることではない。

- 図の描画範囲や挿入する図の大きさを思い通りに設定できる。
- 図中に文字や記号を自在に記入できる。
- 図中の文字や記号のフォントを TeX 文書のフォントと揃えることができる。

そこで、これらを容易に実現するために、我々は 2006 年から KpTpic を開発してきた。KpTpic には、TeX 文書と同じフォントで文字や記号を思い通り記入した図ファイルを作成する機能以外にも、文章や図を思い通りに配置でき、図中にコメント文を挿入できるページレイアウト機能、TeX に装備されていない新しい記号などを作成するための TeX マクロ作成機能、思い通りの幅で罫線を引いた表を作成でき、表中に図も挿入できる表作成機能も開発され、図入り教材作成のための TeX 総合支援ツールとして進化してきた。以上をまとめると、表 1 のようになる。ちなみに、表 1 では、旧式である手書きも比較してみた。表 1 から、TeX+KpTpic が手書きに近い感覚で機能できることがわかる。

3 KE_Tpicによる教材の図の作成例

図1は、「逆関数のグラフは，もとの関数のグラフを直線 $y = x$ に関して対称移動して得られる」という性質を図示した教材の一例である．この教材の図3.1で，直線 $y = x$ に関する対称移動を図示しているが，空間内の移動をイメージしなければならないため，わかりづらい図になっている．そこで，この変形をコマ送りで見せる提示補助教材があれば，空間内の移動をイメージしやすくなると考えられる．本稿では，KE_Tpicによるこの提示補助教材の作成方法を示し，そのプログラムを確認することで Symbolic Thinking の重要性を明示しよう．本節で使用する CAS は Scilab とする．

まず，図3.1のもとの関数 $y = x^2$ のグラフを，空間内の xy 平面上に描かれたグラフとして作成するには，Scilab で次のようにプログラムすればよい．

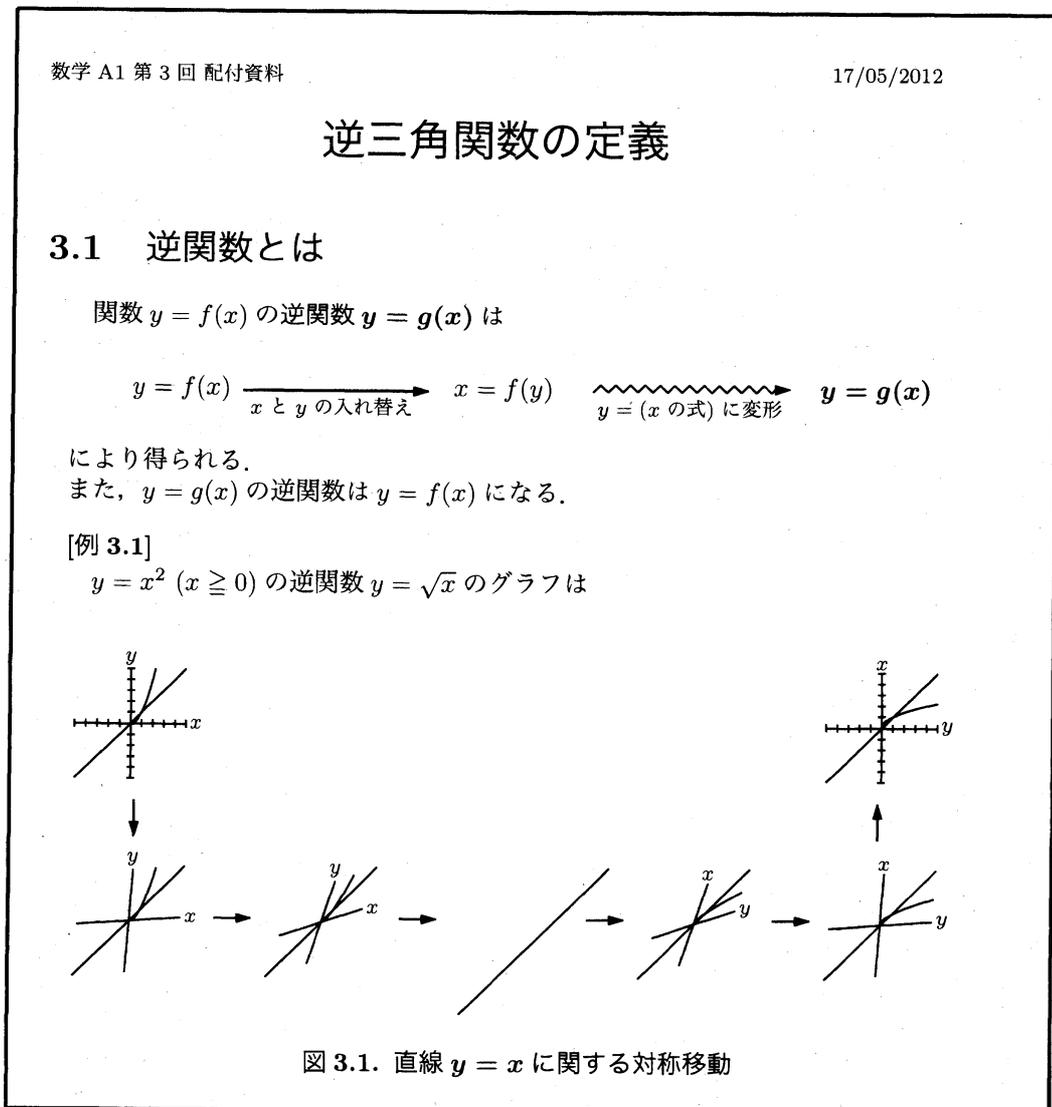


図 1. 逆関数のグラフに関する教材例

```

Ax0=Spaceline([[ -5,-5,0],[5,5,0]]); //xy 平面内の直線  $y = x$ 
G1=Spacecurve('t,t^2,0','t=[0,sqrt(5)]'); //xy 平面内の曲線  $y = x^2$ 
X1=Spaceline([[ -5,0,0],[5,0,0]]); //x 軸
Y1=Spaceline([[0,-5,0],[0,5,0]]); //y 軸
TX1=Tickmarkdata([-5,0,0],[5,0,0],10); //x 軸上の目盛り線
TY1=Tickmarkdata([0,-5,0],[0,5,0],10); //y 軸上の目盛り線
PL1=lstcat(Ax0,G1,X1,Y1,TX1,TY1); //6 つの線を一まとめの図形にする
PX=[5,0,0];PY=[0,5,0]; //x 軸, y 軸の名前を表示する位置

```

このプログラムをみると、各コマンドから図形が容易に想像できるため、プログラミングしながら図の作成に集中できる。つまり、Symbolic Thinking しやすいコマンドでプログラムが構成されていることがわかる。変域や関数などの設定条件を簡単に変更できるようにするには、ローカル変数を使用して定義しておくといよい。

次に、20 回転で対称移動するような座標軸とグラフのプロットデータを作成するには、Scilab で次のようにプログラムすればよい。

```

N=20; //スライド数
RPL=list(); //回転する一まとめの図形のリスト
RX=list(); //回転する x 軸の名前の位置のリスト
RY=list(); //回転する y 軸の名前の位置のリスト
for I=1:N
    V0=[1,-1,0]; //xy 平面内における対称軸  $y = x$  の法線ベクトル
    Th=%pi/N; //Th は 1 回転の角の大きさ
    Vi=[cos(Th*I)/sqrt(2),-cos(Th*I)/sqrt(2),sin(Th*I)]; //I 番目の法線ベクトル
    Ri=Rotate3data(PL1,V0,Vi);RPL(I)=Ri; //I 番目の回転した図形
    RiX=Rotate3pt(PX,V0,Vi);RX(I)=RiX; //I 番目の x 軸の名前の位置
    RiY=Rotate3pt(PY,V0,Vi);RY(I)=RiY; //I 番目の y 軸の名前の位置
end

```

回転した図形を z 軸の正の方向から見た平行投影図にするために、Scilab で次のようにプログラムすればよい。

```

Setangle(0,-90); //投影方向の指定 (緯度 0°, 経度 -90°)
PRPL=list();PRX=list();PRY=list();
for I=1:N
    PRi=Projpara(RPL(I));PRPL(I)=PRi; //I 番目の平行投影図
    PRiX=Parapt(RX(I));PRX(I)=PRiX; //I 番目の x 軸の名前の位置
    PRiY=Parapt(RY(I));PRY(I)=PRiY; //I 番目の y 軸の名前の位置
end

```

最後に、20 回分の図ファイルを順に書き出すために、Scilab で次のようにプログラムすればよい。

```

for I=1:N

```

```

Openfile(Filename+string(evstr('I'))+'.tex'); //図ファイルの名前
Beginpicture('0.5cm');
FontSize('s'); //図ファイルの文字や記号の大きさ
Drawline(PRPL(I)); //図形の線を引く
Expr(PRX(I),'e','x');Expr(PRY(I),'n','y'); //x軸とy軸の名前をかく
Endpicture(0);
Closefile();
end

```

このように、 $\text{K}\epsilon\text{T}\pi\text{c}$ のコマンドは図形をイメージしやすく、Symbolic Thinkingしやすいプログラムになっている。作成した20枚の平行投影図をPDFで表示しコマ送りで見せれば、印刷配付教材の図3.1と全く同じものが少しずつ回転していく様子が見える。

4 まとめと今後の課題

一般に、図入り教材を作成するための要件には、以下が挙げられる。

- (1) 数学的概念がわかりやすい導入方法の開発
- (2) 導入授業に即した図のアイデア
- (3) アイデア通りの図を作成できる技術力

これらの要件を満たすには、(1)では教材研究、(2)では授業研究、(3)では $\text{K}\epsilon\text{T}\pi\text{c}$ のような図入り教材を作成するためのシステムが必要である。また、第3節から、 $\text{K}\epsilon\text{T}\pi\text{c}$ による図入り教材の作成がSymbolic Thinkingしやすい、すなわち「数学的な作図手順に従ってコマンドを実行することで、図の全体像を明確に認識しながら質的な改良に集中しやすい」ことがわかった。つまり、 $\text{K}\epsilon\text{T}\pi\text{c}$ は図入り教材を作成するためのシステムとして適しているといえる。

では、 $\text{K}\epsilon\text{T}\pi\text{c}$ で図入り教材を作成するための要件を満たすには、どのような工夫や能力が必要となるのだろうか。主なものは次のようになる。

- インタビューやアンケートによる導入方法の分析
- 授業見学による導入授業の分析
- 図作成用ドキュメントによるプログラミング能力の分析 (documentation approach)

今後は、これらの分析結果に基づいて $\text{K}\epsilon\text{T}\pi\text{c}$ を改良していくことで、より良い図入り教材作成システムを構築できるようになる。

参考文献

- [1] CASTeX 応用研究会：「 $\text{K}\epsilon\text{T}\pi\text{c}$ で楽々 $\text{T}\epsilon\text{X}$ グラフ」, イーテキスト研究所, 2011.
- [2] 高遠節夫, 山下哲, 金子真隆, 北原清志：「授業での図の利用に関するアンケート調査について」, 東邦大学教養紀要第42号, pp.31-40, 2011.