

数学教員の養成における数学ソフトウェアの活用

日本大学・理工学部 山本修一 (Shuichi Yamamoto)
College of Science and Technology,
Nihon University

1 はじめに

今数学の教育現場では、問題の解き方の暗記から離れ、数学の果たす役割を感じ取れるような“質の高い教育”が要求されてきている。実際に、新しく施行される高等学校学習指導要領（参考文献 [3]）では、数学的な見方や考え方のよさを『数学のよさ』に変更し、数学の概念や原理・法則のよさ、数学的な表現や処理の仕方のよさ、数学の実用性や汎用性など数学の特長や数学的活動や思索することの楽しさなどを含めた『数学のよさ』を、数学的活動を通して認識し、それらを積極的に活用して数学的根拠に基づいて判断する態度を育てることを求めている。また、「コンピュータ活用は、数学を学習する意義を認識させることにつながる」という新しい見解も示している。

このような観点からも教員がパソコンや数学ソフトウェアを活用する意義は大きく、将来教員になる学生にこれらを活用した教育支援がいかにかに有効であるかを実感させることは非常に重要だと考えている。

この報告では、授業形態としてパソコン活用が思ったように教育現場に普及していない現状やまだまだパソコン操作が十分でない学生もいることを鑑み、ソフトウェアを活用するときに生徒、学生が実行する操作やプログラムが単純であることを考慮した。

すなわち教員を目指す学生を対象に

- (1) マウスだけの操作（Web 活用など）、または
- (2) 打ちこむプログラムを短く簡単にする（ソフトウェアの活用）

という授業形態で行った授業によって数学ソフトウェアを活用した教育支援の有効性について学生自身それを実感したかを検証する。

まず、ソフトウェア Mathematica を活用してグラフやアニメーションを見せる教材を作成し、それを WEB 教材として活用する事例を紹介し、将来教員になったときにパソコンや数学ソフトウェアの活用が喚起されたかを学生のアンケート調査で検証する。

さらに、この視点から数学ソフトウェアは 5 年前と比較しても格段に進化していて、教育支援の範囲もより拡大していることを事例によって示す。

次に、学生に Mathematica のインストールされたノートパソコンを持参させて実施した半期授業の中で、グラフやアニメーションを見せるのとは異なる新しい活用事例を提示し、これに対して学生のアンケート調査からこの活用効果を検証する。

また、パソコンや数学ソフトウェアを活用したこの授業全体の感想から、数学教員を目指す学生がこれらの教育支援が有効であると感じたかを検証する。

2 WEB活用の事例

2007年に実施した国立大学の教育学部の3年生を対象に、1コマ90分で実施したWEB活用の授業とその後のソフトウェアの進化を考えた活用法について考察する。

WEB活用の授業では Mathematica で作成した教材 (NBP ファイル) とフリーなソフトウェア MathReader を活用した。授業は情報処理教室を利用し、教師の操作する画面が前方のスクリーンに映し出され、それを見ながら学生が操作できるような環境で行った。

授業は、学生に各自のパソコンを用いて授業で使用する教材ファイル等をインターネットを通してダウンロードさせることから始め、三角関数の性質：(i) 三角関数のグラフの和と積、(ii) フーリエ級数展開、(iii) 波との関連づけ、をそれぞれグラフで理解させるパートと動き (アニメーション) によって理解させるパートに分けて学べるように工夫した。

この授業の目的は、MathReader を活用してグラフやグラフのアニメーションを各自のパソコン上で再現させることによって、(1) 三角関数によって一般の関数を近似できること、(2) 三角関数が波動と密接に関係していること、を直感的に理解させ、視覚的な体験を通してこの内容を理解させることができるかを検証することである。また同時に将来先生を目指す学生に、こんなことがパソコンを用いればできるようになっていることを実感させることであった。

具体的には

(i) では三角関数 $y = \sin x$ と $y = \cos x$ のグラフに対して、その和と積がそれぞれ x における値 (グラフの高さ) の和と積によって決まることを、グラフを見ながら確認させる。この手続きで描かれたグラフが、どのような式で表されるかを尋ねる。

また、 $y = \sin kx$ のグラフを、 $k = 1, 2, \dots$ の順にクリックだけで操作できるアニメーションを見せて、グラフの周期が短くなるように描かれていくことを観察させる。

(ii) ではフーリエ級数展開そのものをグラフで見せることから始める。すなわち、正弦関数の和

$$2 \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} \sin kx}{k}$$

で定められた関数のグラフを、自然数 n が変化するアニメーションによって観察させる。 n の値が大きくなっていくとき、のこぎりの形をしたグラフが、たくさんの三角関数が足し合わさって近似されていくことを実感させる。

(iii) では、 t を時間と考える。関数 $\sin(x+t)$ のグラフは、変数 t が $t = 1, 2, 3, \dots$ と増加すると左に移動する波になり、 $y = \sin x \cos t$ のグラフは、上下に振動する波になることを、アニメーションを通して理解させる。また、加法定理

$$\sin(x+t) = \sin x \cos t + \cos x \sin t$$

が2つの上下に振動する波が足し合わされて左に移動する波になる現象を引き起こすことを、アニメーションによってグラフの和の位置が実際に動いていく様子を観察させるという内容である。

さて、数学ソフトウェアは日々進化している。従って、活用方法も益々便利になっていることに注意したい。Mathematica の場合、Manipulate というアニメーションを作成する組み込み関数が用意された。

数学の性質を視覚的に関連付けて理解させようとするれば、当時と比べれば確実にその可能性の範囲が増している。例えば、先の授業では三角関数の積分の値

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin lx dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin lx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos lx dx = \begin{cases} 0 & (k \neq l) \\ \pi & (k = l) \end{cases}$$

を基礎にしてフーリエ係数まで言及できなかった。この積分の計算の値に言及すると、この計算にとられる学生は、対応できないとそこで興味を消失してしまう。

しかし、Manipulate を使うとこの積分の値を視覚的に関連付けて理解させることができる。例えば、Manipulate を使うと、関数 $\sin 2x \sin 4x$ のグラフ (図 1) はマウスで、Sin, Sin, $k=2, l=4$ と指定すれば即座にグラフが表示されて面積が 0 だとすぐわかる。また、グラフの形状から積分の値が π になる場合も見てとれる。

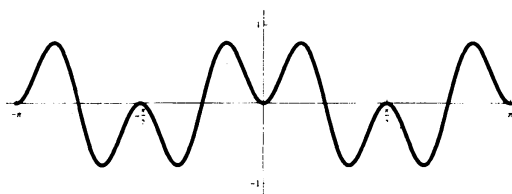


図 1

ここで大事なことはマウスで Sin や Cos を指定、さらに k, l の値をプラスキーでいろいろ変えていくと固定された一つの画面上にそのグラフが順次対応して表示されて、それを通して上の積分の性質が本当にそうだとグラフの形状を見て納得させることができる。これによりフーリエ係数まで理解させる授業が容易になると思われる。

また、2007 年度の授業の段階では、Mathematica で作成したアニメーションを、Mathematica がインストールされていないパソコン上で見せるためには以下の手順を踏む必要があった。授業者は、まず Mathematica でアニメーションを含むように作成した NB ファイルを Wolfram のホームページにアクセスし、NBP ファイルに変換してもらう手間が必要であった。この送付されてくる NBP ファイルを MathReader を用いて、ダブルクリックという操作で動きを見せることができた。

しかし、今は、フリーソフト CDFPlayer を利用することになる。さらに、Mathematica で作成したアニメーションを含む NB ファイルは自分のパソコンで容易に CDF ファイルに変換できる。CDF ファイルは CDFPlayer によっていつも見ることができ、パソコンに CDFPlayer がインストールされていれば、作成したアニメーションをソフトで見ると全く同じように見ることができ、操作も格段に進歩して、上の (iii) の加法定理を波の移動と関連付けたアニメーションでは、スピードに変化を付けて見ることが可能になったので非常にわかりやすく見ることができ、

このように、数学ソフトウェアの WEB 活用もしやすくなり、数学教育の観点からもその果たす役割に期待が持てるようになったと考えている。

3 数学科教育法の授業で

教職に関する科目（後期半期授業）では、3年生を対象に数学ソフトウェアがインストールされたノートパソコンを持参させて授業を行っている。

授業では、小学校から大学までの体系的なつながりを重視し、テーマを面積と関数にしぼり、それぞれで学ぶ内容を関連付けて行っている。その中で、新学習指導要領で強調される『数学のよさ』について、教員を目指す学生が自分自身それが「実感できる」ことを目標にしている。

最近の数学ソフトウェアの驚異的な進歩によって、自然現象と関連付けて『数学のよさ』を見出すことも可能になり、また、視覚的に関連付けて数学の概念や式をより深く理解できるようになっている。この深い理解が、『数学のよさ』をもっと喚起すると考えている。このような時代の変化を考慮して授業を展開している。

以下はこの授業のシラバスである。

1. ガイダンス
2. Mathematica で座標系，図形，関数のグラフを描く方法：Mathematica を使用
3. 小・中で学ぶ面積の教え方：教科書と学習指導要領を参考にして
4. アルキメデスによる円の長さの求め方：Mathematica で検証
5. 高校で学ぶ図形の面積とその方法：演習を通して解答の仕方を学ぶ
6. 積分の原理と原始関数のイメージ化：Mathematica で検証
7. モンテカルロー法による面積の求め方：Mathematica で検証
8. 小・中で学ぶ関数の考え方：教科書と学習指導要領を参考にして
9. 関数を1次関数や2次関数で局所的に近似する
10. 関数の変化をどのように捉えるか。微分の役割：Mathematica で検証
11. 高校で学ぶ関数の極値の求め方：演習を通して解答の仕方を学ぶ
12. Mathematica で関数の極値を求める：Mathematica で検証
13. 関数の有用性1：和とそのグラフィカルな意味：Mathematica で検証
14. 関数の有用性2：加法定理と波動：Mathematica で検証
15. 小テスト

（上の Mathematica で検証と記されている個所で数学ソフトウェアを活用する）

ここでは、上の4の内容で Mathematica を活用する意義を明らかにし、数学ソフトウェアを活用する有効性を論じる。

小学校では単位円に対して、それに内接する正6角形と外接する正方形を描いて $3 < \pi < 4$ を実感させ、 $\pi = 3.14$ と教えるようになっている。

歴史的には、アルキメデスは単位円に内接（外接）する正96角形を考え、紙と鉛筆を用いて求めた不等式

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7} \quad (3.14085 < \pi < 3.14286) \quad \dots \quad (*)$$

から $\pi = 3.14$ と結論したという事実がある。教員になる学生は $\pi = 3.14$ と教える側に立つはずであるから、これを暗記ではなく、アルキメデスがやったような道程で、手で計算した不等式をパソコンや数学ソフトウェアを活用して求め、 $\pi = 3.14$ を実感させ

たい。これが授業の目的である。このために、既に知られている漸化式 ([1]) とソフトウェア Mathematica を活用する方法を選択した。

(1) アルキメデスによる $\sqrt{3}$ の計算

アルキメデスは不等式 (*) を求める道程の中で、不等式 $1.7320261 < \sqrt{3} < 1.732052$ を正しく計算している。この不等式を導くためにまず次の不等式

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780} \quad \dots \quad (**)$$

を証明している。その証明の中で

$$(I) \quad a + \frac{b}{2a+1} < \sqrt{a^2+b} < a + \frac{b}{2a}, \quad (II) \quad a - \frac{b}{2a-1} < \sqrt{a^2-b} < a - \frac{b}{2a}$$

(ただし $\sqrt{a^2 \pm b} = a \pm c$ は $0 < c < 1$ をみたま) を巧みに多用している。

アルキメデスが π に関する不等式を導いた道程のすごさを垣間見るといふ目的と、計算を Mathematica にさせて考察に集中するという数学ソフトウェアの新しい活用法の紹介を含めて $\sqrt{3}$ に関する不等式 (**) の証明 ([2]) を計算は Mathematica にさせるという方法で与えた。ただし、それを学生にやらせないで、教員のパソコンからプロジェクタで投影して見せるだけにした。同じことを学生に強いるとこの段階で対応できなくなって以後のことについて興味を失う学生が出ることを懸念したためである。

実際 $\sqrt{3}$ に関する不等式 (**) の証明は以下のようなされる。

不等式 $1 < \sqrt{3} < 2$ から出発して、 $a = 2$ とすると $3 = 2^2 - 1$ となるので $b = 1$ とし不等式 (II) を適用する。

```
Clear[a,b];{a,b}={2,1};{a-b/(2 a-1), Sqrt[a^2-b], a-b/(2 a)}
```

このとき、 $\{5/3, \sqrt{3}, 7/4\}$ と出力される。これより不等式 $5/3 < \sqrt{3} < 7/4$ が得られる。次に両辺を 3 倍して $5 < 3\sqrt{3} = \sqrt{27} < 21/4$ 。ここで $a = 5$ とする。このとき $27 = 5^2 + 2$ だから $b = 2$ とおいて、今度不等式 (I) を適用する。

```
Clear[a,b];{a,b}={5,2};{a+b/(2 a+1), Sqrt[a^2+b], a+b/(2 a)}
```

を計算させる。 $\{57/11, 3\sqrt{3}, 26/5\}$ と出力され、 $57/11 < 3\sqrt{3} < 26/5$ を得る。これから不等式 $19/11 < \sqrt{3} < 26/15$ が得られる。両辺を 15 倍して $(19 \times 15)/11 < 15\sqrt{3} = \sqrt{675} < 26$ を考えて、 $a = 26$ とする。 $675 = 26^2 - 1$ より $b = 1$ として再び不等式 (II) を適用する。

```
Clear[a,b];{a,b}={26,1};{a-b/(2 a-1), Sqrt[a^2-b], a-b/(2 a)}
```

このとき、 $\{1325/51, 15\sqrt{3}, 1351/52\}$ と計算される。次に

```
{a-b/(2 a-1), Sqrt[a^2-b], a-b/(2 a)}/15
```

とすると $\{265/153, \sqrt{3}, 1351/780\}$ が得られる。これから不等式 (**) を得るが、上に示したように不等式 (I) と (II) を交互に利用して導いている。

(2) アルキメデスの π の計算

単位円に外接する正 6×2^k 角形の周囲の長さを $a[k]$ 、内接する正 6×2^k 角形の周囲の長さを $b[k]$ とおく。下の図 2 は $a[0]$ を、図 3 は $b[0]$ の長さを表す正六角形である。

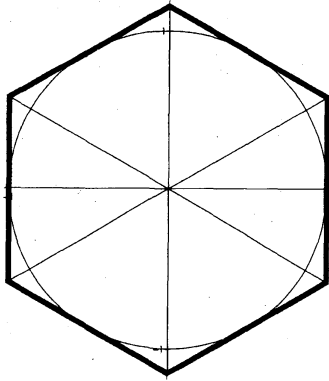


図 2

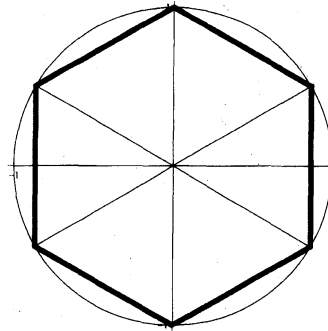


図 3

このとき、不等式 $b[k]/2 < \pi < (a[k]/2)$ が成立する。さらに $k = 1, 2, \dots$ に対して $a[k]$ と $b[k]$ の間には、漸化式

$$a[k] = \frac{2a[k-1] \times b[k-1]}{a[k-1] + b[k-1]}, b[k] = \sqrt{a[k] \times b[k-1]}$$

(ただし $a[0] = 4\sqrt{3}, b[0] = 6$) が成立することがわかる。

この漸化式の証明を与えないとわかったと納得できない学生のために、この漸化式が導かれる式の変形を示し、さらに 2 倍角の公式がどこに適用されているか見ればすぐにわかるように記したプリントを配布して説明した。

$a[n]$ と $b[n]$ の計算は、以下のように簡単なプログラムを実行するだけである。ここで、教育上の見地から使用するプログラムを簡単にすることがパソコンやソフトウェアを活用するときの必要条件だと考えているので簡単なプログラムを選んだ。

```
Clear[a,b];{a[0],b[0]}={4 Sqrt[3],6};{a[n_],b[n_]}:
={ (2 a[n-1] b[n-1]) / (a[n-1]+b[n-1]), Sqrt[a[n] b[n-1]]};
```

これをパソコンに計算させて、単位円に内接する正 96 角形と外接する正 96 角形の周囲の長さを求め、 $\pi = 3.14$ と教える根拠を実感させたい。

4 アンケート調査

今回の事例を通して、教員を目指す学生がコンピュータや数学ソフトウェアを活用することで、自ら理解の深まりを実感し、このような最新のテクノロジーの活用を肯定できるようになるかをまず検証したい。

(1) WEB 活用の授業では、授業の最後に下記のような問に対する回答と授業の感想をお願いした。回答者は 18 である。

問 1 三角関数をうまく加えていけば、もっといろいろな関数のグラフを表すことができると思いませんか。

問 2 今回の授業を受けて、「三角関数は重要だ」と以前より強く思いましたか。

問 3 三角関数の意味を理解するために、「グラフやアニメーションによる視覚的な関連

付けが役に立つ」と思いましたか。

に対する結果は以下の表1である。ただし回答者は18名である。

表1

問の番号	1	2	3
非常にそう思った	5	3	13
かなりそう思った	8	9	4
ふつう	5	6	1
あまりそうは思わなかった	0	0	0
全く思わなかった	0	0	0

表1の結果から数学理解において視覚的関連付けが理解の深まりに寄与していることが読み取れる。特に問3ではほとんどの学生が三角関数の意味を理解するために、「グラフやアニメーションによる視覚的な関連付けが役に立つ」と回答している。

以下にあるこの授業の感想にも示されるように、何人かは自分の将来の教授法においてパソコンやソフトウェアの活用について言及していることがわかる。

1. 高校の時に、物理の波を学習してから、波と三角関数とのかかわりは、ある程度理解していた。しかし、アニメーションのように動くのを見るのが、初めてだったので楽しかった。

2. 式だけではわかりにくく、何を表しているのかわからないことが多かったけど、今日の授業をうけて難しい式でもグラフで見ると理解しやすかったです。sin x, cos xの意味というか、用途が幅広く使われていて、新鮮な授業でした。

3. 中学生、高校生が苦手と感じやすい「関数」ですが、今回の授業のように視覚的なアプローチをすれば、興味をもつ生徒も増えると思いました。

4. 高校で習った三角関数の変化を、実際にグラフにしてアニメーションで見ることによって、とても、分かりやすいものになったと思います。視覚的に関数を提示することで、中高生にも、より分かりやすく教えられると思いました。

これら感想からもわかるように、教員を目指す学生には、クリックという単純な操作ではあったが、自分自身でパソコンや数学ソフトウェアを活用することで、理解の深まりを感じ、自分もそのようにしたいと感じさせていることがわかる。

(2) 数学科教育法の授業では、パソコン活用をグラフではなく、数値を求めるために限定して活用する場合にどれだけの効果があるかを以下の問題で検証した。この授業では、毎回このような問題を提出し、別途配布する用紙に結果を記入させ、それを回収するような授業形態にしている。

問題1 単位円に内接する正96角形と外接する正96角形の周囲の長さを計算して π についての不等式を完成せよ。($\quad < \pi < \quad$)

問題2 小学校で $\pi = 3.14$ と教える根拠が実感できましたか。

問題1については {a[4], b[4]} をタイプすればよいだけで、正解は $3.14103 < \pi < 3.14271$ である。この不等式はアルキメデスによって得られた不等式より精度がよい。

問題 2 は、適当な選択肢から選ぶようにしてある。受講者 73 名のうち、パソコンを持参して問題 1 に正解を提出したものは 67 名であり、この 67 名の問題 2 に対する回答状況は以下の表 2 であった。

表 2

選択肢	A	B	C	D	E	F
該当者数	17	12	30	5	1	2

ただし、A, B, C, D, F はそれぞれ、よくできた、かなりよくできた、ふつう、あまりできなかった、全くできなかった、の選択肢を表し、F は無回答である。

表 2 によれば 67 名のうち 29 名の学生が積極的に「小学校で $\pi = 3.14$ と教える根拠」を実感できたと回答した。今回の授業では、プログラム作成上必要な漸化式の証明をした。しかしこの漸化式の証明に前向きに取り組めなかった学生や 2 倍角の公式を用いた数式の変形に対応できなかった学生もいる。また、受講者の中には最初教員を志望したが、途中から教員免許状の資格取得のみに移行した学生もかなりいる。

この $\pi = 3.14$ をアルキメデスにできるだけ近づけて実感させる試みはパソコンを活用しなければ無理である。上の結果は、上のことを考慮すればその効果が認められる数値だと判断できる。

2010 年度、授業の最終日に授業全体の感想として「この授業を通して特によく理解できたことがあればそれを記してください」という問を提出した。その感想の中から、この授業の効果について言及していると思われる一部を拾って以下に記した。

1. 高校までで学ぶような数学で、定義とかは理解しているつもりでしたがグラフやアニメーションで観察すると、わかっていたつもりの定義でさえ改めて理解できたし、あいまいであったところに気づきました。しっかりと目を使って観察をして理解するのは大事だとこの授業を通してわかりました。

2. 私は「パソコンは数学の授業ではあまり有効でない」と思っていました。しかし、2 次関数において、その接点を変えると接線のグラフがどう変わるかなど、黒板で表そうとすると教えにくいところもパソコンをつかうと視覚的に伝えられるということがわかり自分が教師になったらパソコンを有効的に使って授業をしたいと思いました。

3. 可視化することにより、紙上でイメージしにくい、あるいは曖昧にしていた変化の部分を理解することができました。

4. 数学のよさを実感してもらうには、数式で理解したり、そのグラフを書くことも有効であるが、パソコンを使って実際に動かして見るという行為がとても効果的であるということです。なぜなら、式では分からないような計算過程での点の動きが見られることによって式が意味することをイメージしやすくなるからです。

上の感想からもわかるように、自分が今までわかっていたと思っていた知識に反省を加え、さらに深く知識を構築し直す学生がいる。また、自分がわかりやすいと思ったので、教員になったら同じようにパソコンを使いたいと感じる学生もいることがわかる。

(1) と (2) の感想から共通して言えることは、教員を目指す学生にとって、パソコンや数学ソフトウェアを活用することが教員となるために自分を高めるよい機会になっているということである。

5 まとめ

今回、数学ソフトウェアを活用する授業を、「パソコンの操作やプログラミングを簡単に」という条件で検証した。あまり複雑にすると、操作にとらわれ教育上の効果がぼやけてしまう。学生アンケートの結果を見れば、このような活用法によって多くの学生は、学習指導要領が求める『数学のよさ』を実感したと考えられる。

また、本当に教員になれる学生は、現在設置されている教員養成カリキュラムをきちんとこなし、さらに学生の感想にもあるように、パソコンや数学ソフトウェアの活用を通して今持っている数学の知識を自分自身で再構築できる学生である。

何度も調査しているが、数学を学ぶ学生にとって、数学の概念や数式をイメージ化することによってその理解は確実に深まる ([6])。その結果、わかりやすいという評価につながっている。このことは、高校生にとっても同じではなかろうか。そして、教員を目指す学生の多くはこのことも実感した。

教員になる学生が、教員養成課程においてパソコンやソフトウェアを活用してその効果を自ら「これはすごい」と実感することが重要である。この実感の広がりこそが、最新のテクノロジーが学校現場に普及しない要因の1つとして指摘される教員の持つ数学感 ([4]) を少しずつ変えていき、数学教育においてテクノロジーが有効活用される時代を作る推進力になると考えている。

参考文献

- [1] 池島良, 景山三平, 下村哲: これだけは知っておきたい, 教員のための数学 II 一解析・統計・コンピュータ, 培風館, 2007.
- [2] 読書会 銀のしずく, 数学史の自習室: アルキメデスによる円周率の計算 (平成 12 年), <http://homepage2.nifty.com/cakravala/verificationofpi.pdf>
- [3] 文部科学省, 高等学校学習指導要領解説 数学編 理数編, 実教出版, 2010 (2 版)
- [4] 佐伯昭彦, 磯田正美, 清水克彦: テクノロジーを活用した新しい数学教育, 明治図書, 1997.
- [5] 山本修一, 深石博夫: ビジューライゼーションを活用した三角関数の指導, 数学教育学会誌, 臨時増刊, 数学教育学会秋季例会発表論文集, 19-21, 2007.
- [6] 山本修一: イメージ化がもたらす深い理解と数学の有用性—ソフト Mathematica を活用して—, 数理解析研究所講究録 1780, 221-231, 2012