

# 佐藤超関数による Shannon - 染谷の標本化定理の拡張と Ramanujan の積分公式

吉野 邦生 \*

\* 東京都市大学知識工学部自然科学科

概要. 佐藤超関数の理論を応用し、Shannon - 染谷の標本化定理を拡張する。更に、Shannon - 染谷の標本化定理と Ramanujan の積分公式の関係を明らかにする

## A Generalization of Shannon - Someya's Sampling Theorem by Sato's Hyperfunction Theory and Ramanujan's Integral Formula

Kunio Yoshino\*

\*Tokyo City University

*Abstract.* We generalize Shannon-Someya's sampling theorem by using the theory of Sato's Hyperfunctions. Moreover we will clarify the relationship between Shannon-Someya's sampling theorem and Ramanujan's integral formula.

### 1. 記号, 用語について

デジタル信号処理の分野では虚数単位として  $i$  を用いずに  $j$  を使うのが慣例であるがこの論説では  $i$  を用いる。又、数学では、フーリエ変換と呼ぶがデジタル信号処理の分野では、フーリエスペクトルと呼ぶこともある ([14])。この論説ではフーリエ変換と呼ぶ。フーリエ変換にもいろいろな定義があるが、ここでは  $\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\xi t} dt$  を関数 (信号)  $f(t)$  のフーリエ変換の定義とする。

### 2. 信号処理と超関数

この論説では、佐藤超関数の概念の簡単な紹介をしてから、佐藤超関数のフーリエ・ラプラス変換, Z-変換による標本化定理, ラマヌジャンの積分公式の正確な定式化について述べる。超関数の理論の入門的な解説から始めるが、超関数について既に熟知している数学者, 工学者, 技術者には勿論不要である。超関数には、Distribution(Schwartz 超関数),

Generalized Functions(Gelfand -Shilov の超関数), Hyperfunction(佐藤超関数) の3つがある ([19]). 信号処理を行うのに超関数などという高級な現代数学は不要であると思っている人がいたらそれは大きな誤りである. 信号処理で特に重要な超関数は、ディラックのデルタ関数  $\delta(t)$  とフィルターの設計で出てくるヘビサイド関数  $H(t)$  及びそのフーリエ変換である  $\frac{-i}{\xi - i0}$  である. 符号関数  $\text{sgn}(t)$  とそのフーリエ変換  $\frac{-2i}{\xi}$  も重要である.

## 2.1 周波数同定と超関数

周波数  $k$  の信号  $\cos kt$  のフーリエ変換は、  

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos kte^{-i\xi t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} (e^{ikt} + e^{-ikt}) e^{-i\xi t} dt = \pi (\delta(\xi + k) + \delta(\xi - k))$$
 である. フーリエ変換の台が2点  $+k, -k$  に集中している事が判る. このようにしてフーリエ変換により与えられた信号の周波数が同定できる. この計算の際, デルタ関数  $\delta(t)$  の平面波分解の公式  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi t} dt = \delta(\xi)$  を用いた. この公式は, 定数関数1のフーリエ変換がデルタ関数である事を意味する. 物理的には, 波面集合 (位相因子  $\xi t = \text{定数}$ ) が平面になることを意味するのでデルタ関数の平面波展開と呼ばれる事もある. ただし, この積分は絶対収束しておらず, この公式の数学的正当化には超関数の理論が必要である.

## 2.2 超関数を使うと何が良くなるのか?

ヘビサイド関数  $H(t)$  を微分するとディラックのデルタ関数になるという関係式  $\frac{dH(t)}{dt} = \delta(t)$  が知られている. ヘビサイド関数  $H(t)$  は, 原点で不連続な関数であるのでこの関係式を正当化するための数学の理論が必要となる. それが超関数の理論である.

超関数の理論のおかげで

1. フーリエ変換の範囲が広がり
2. 不連続関数の微分が自由にできるようになった.

このため, 現在では, 超関数の理論は偏微分方程式論などをはじめ多くの数学の分野で用いられている.

## 2.3 ヘビサイド関数のフーリエ変換

超関数の出てくる例としてヘビサイド関数  $H(t)$  のフーリエ変換を計算してみよう.  $\varepsilon$  を正の数とし

$$H_\varepsilon(t) = \begin{cases} e^{-\varepsilon t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

とおく.  $H_\varepsilon(t)$  のフーリエ変換は  $\frac{-i}{\xi - i\varepsilon}$  である.  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H_\varepsilon(t) = H(t)$  であり, 超関数に対するフーリエ変換は連続であるので,  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \hat{H}_\varepsilon(\xi) = \hat{H}(\xi)$  を得る. 従って, ヘビサイド関数  $H(t)$

のフーリエ変換は  $\frac{-i}{\xi - i0}$  という超関数になる。一見すると  $\frac{1}{\xi - i0}$  は  $\frac{1}{\xi}$  に等しいように見えるかもしれない。  $\xi < 0, \xi > 0$  の範囲では確かに等しい。しかし  $\xi = 0$  をこめて考えると微妙に異なる。この異なる差は、ディラックのデルタ関数の分の差である。Lippmann - Schwinger の関係式として知られている ([10], [12], [19])。

————— Lippmann - Schwinger の関係式 —————

$$\frac{1}{\xi - i0} - \frac{1}{\xi} = \pi i \delta(\xi), \quad \frac{1}{\xi + i0} - \frac{1}{\xi} = -\pi i \delta(\xi)$$

自明な等式  $1 + \text{sgn}(t) = 2H(t)$  の両辺をフーリエ変換すると得られる。

## 2.4 フィルターと超関数

周波数領域 (変数  $\xi$ ) でのフィルターとは簡単に言えば関数の掛け算である。例えば閉区間  $[-a, a]$  の特性関数  $\chi_{[-a, a]}(\xi)$  がその例である。これを時間領域 (変数  $t$ ) で実現するためには、関数  $f(t), g(t)$  の畳込み (convolution)  $(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(t-y)dy$  が必要となる。又、畳込みがフーリエ変換によってそれぞれの関数のフーリエ変換の積に変換される  $(\widehat{f * g})(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$  という事実が使われる。上の例 (帯域通過フィルター) の場合には、 $f(t) = \frac{\sin at}{\pi t}$  であり、 $\hat{f}(\xi) = \chi_{[-a, a]}(\xi)$  は閉区間  $[-a, a]$  の特性関数である。この例 (帯域通過フィルター) の場合は、特に超関数の理論は必要はない。ところが高域通過 (低域通過) フィルターの設計になると話は別である。周波数領域における Heaviside 関数を  $H(\xi)$  で表すことにする。

————— フィルターと畳み込みの関係 —————

高域通過 フィルター

$$(f * \frac{1}{t + i0})(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{x - t + i0} dt \quad \text{時間領域} \iff (-2\pi i)\hat{f}(\xi)H(\xi) \quad \text{周波数領域}$$

低域通過 フィルター

$$(f * \frac{1}{t - i0})(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{x - t - i0} dt \quad \text{時間領域} \iff (2\pi i)\hat{f}(\xi)H(-\xi) \quad \text{周波数領域}$$

周波数が  $a$  以上の信号のみを通過させる高域通過フィルターを時間領域で作るためには与えられた信号と超関数  $\frac{e^{iat}}{t + i0}$  の畳込み  $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \frac{e^{ia(t-y)}}{t-y+i0} dy$  を考える必要がある。フーリエ変換により周波数領域では  $(-2\pi i)\hat{g}(\xi)H(\xi - a)$  となり、高域通過フィルターが実現する。

### 3. 佐藤超関数とは？

定義 1(佐藤超関数 **Hyperfunction** ([10], [12], [13])

閉区間  $[a, b]$  の外で定義された正則関数  $g(z)$  の境界値

$$\lim_{y \rightarrow 0} (g(x + iy) - g(x - iy)) = g(x + i0) - g(x - i0)$$

を閉区間  $[a, b]$  上の佐藤超関数 (Hyperfunction) と呼ぶ。正則関数  $g(z)$  を超関数の定義関数と呼ぶ。正則関数の境界値は、物理数学 (特に偏微分方程式論, 特殊関数の理論), 素粒子論では良く出てくる。いくつかの例を挙げよう。

#### 3.1 佐藤超関数の例

例 1 (ディラックのデルタ関数  $\delta(x)$ ) 定義関数は  $\frac{-1}{2\pi iz}$  である。

$$\delta(x) = \frac{-1}{2\pi i} \lim_{y \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x + iy} - \frac{1}{x - iy} \right) = \frac{-1}{2\pi i} \left( \frac{1}{x + i0} - \frac{1}{x - i0} \right)$$

例 2 (閉区間  $[a, b]$  の特性関数  $\chi_{[a,b]}(x)$ ) 定義関数  $g(z)$  は  $\log \frac{z-b}{z-a}$  である。

$$\chi_{[a,b]}(x) = \frac{-1}{2\pi i} \lim_{y \rightarrow 0} (g(x + iy) - g(x - iy))$$

例 3 (ヘビサイド関数  $H(x)$ ) 定義関数は  $\log z$ , ( $0 \leq \arg(z) < 2\pi$ ) である。

$$H(x) = \frac{-1}{2\pi i} \lim_{y \rightarrow 0} (\log(x + iy) - \log(x - iy))$$

#### 3.2 佐藤超関数のヒルベルト変換

ヒルベルト変換は信号処理においては、解析信号の理論で特に重要である ([16], [19]).

$[a, b]$  上の佐藤超関数  $T(x)$  のヒルベルト変換  $H_T(z)$  を通常関数 (信号)  $f(t)$  のヒルベルト変換  $\frac{-1}{2\pi i} \int \frac{f(t)}{z-t} dt$  にならって、 $H_T(z) = \frac{-1}{2\pi i} \langle T_t, \frac{1}{z-t} \rangle$  と定義する。 $\lim_{y \rightarrow 0} (H_T(x + iy) - H_T(x - iy)) = T(x)$  が成り立つ。つまり、境界値を取る操作とヒルベルト変換とは互いに逆変換の関係にある。

境界値とヒルベルト変換の関係

$$H_T(z) = \frac{-1}{2\pi i} \langle T_t, \frac{1}{z-t} \rangle$$

$$H_T(x + i0) - H_T(x - i0) = T(x)$$

$T(x)$  が有界な台を持つ連続関数の場合には既に知られていた事実である ( $T(x)$  が有界な

台を持つ Schwartz 超関数の場合にも複素表示として知られていた).

例 4 (ルジャンドル (Legendre) 多項式 [6])

$P_n(z)$  を  $n$  次の Legendre 多項式とし,  $Q_n(z)$  を第 2 種の  $n$  次の Legendre 関数とする.  $P_n(z)$  は, 次の Legendre の微分方程式の多項式解であり,  $Q_n(z)$  は特異性を持つ解である.

$$(1-z^2)\frac{d^2u}{dz^2} - 2z\frac{du}{dz} + n(n+1)u = 0$$

例えば  $P_0(z) = 1, P_1(z) = z, P_2(z) = \frac{1}{2}(3z^2 - 1)$  である.

$P_n(z)$  と  $Q_n(z)$  の間には次の関係がある.

$$P_n(x) = \frac{-1}{\pi i} (Q_n(x+i0) - Q_n(x-i0)), \quad Q_n(z) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{P_n(t)}{z-t} dt, \quad (\text{Neumann の公式})$$

$Q_n(z)$  が  $P_n(t)$  のヒルベルト変換である事に注意しよう. ヒルベルト変換によって, 佐藤超関数に対応する定義関数を求める事ができる. この意味においてヒルベルト変換は, 佐藤超関数の理論において大変重要である.

正則関数の理論 (コーシーの積分公式等) を用いる事により, 佐藤超関数に関する等式は, 対応する定義関数の等式として理解する事ができる, 例えば,

超関数に関する等式と対応する定義関数の等式

1.  $\frac{dH(x)}{dx} = \delta(x) \iff \frac{d \log z}{dz} = \frac{1}{z}$
2.  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1 \iff \oint \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{z} dz = 1$
3.  $\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) \delta(x) dx = \phi(0) \iff \oint \phi(z) \frac{1}{2\pi i z} dz = \phi(0)$

として理解できる.

### 3.3 佐藤超関数の空間の表示法

3つの方法がある.  $K = [a, b]$  とおく.  $K$  に台を持つ佐藤超関数は次のように表示される.  $H(K)$  は,  $K$  の近傍で正則な関数全体を表し,  $H_0(\mathbb{C} \setminus K)$  は  $K$  の外で正則で無限遠でゼロになる正則関数全体を表す.  $H'(K)$  で  $H(K)$  の双対空間 (連続線形汎関数の全体) をあらわす.  $K$  に台を持つ佐藤超関数の空間  $B(K)$  は  $H'(K)$  に同型である事が知られている.

—  $K$  に台を持つ佐藤超関数の空間  $B(K)$  の表示法 ([10]) —

(1) 双対空間の方法

$$B(K) \cong H'(K)$$

(2) 無限遠点でゼロになる正則関数による表示

$$B(K) \cong H_0(\mathbb{C} \setminus K)$$

(3) コホモロジー (Cohomology) 群としての表示  $B(K) \cong \frac{H(V \setminus K)}{H(V)}$

$V$  は,  $K$  の複素近傍.

佐藤超関数とシュワルツ超関数との差は, 例えば原点に台を持つ超関数の構造において現れる. 複素関数論的に言えば, シュワルツ超関数の理論では, 原点に極のみを持つものしか現れない. しかし, 佐藤超関数では真性特異点を持つものが現れる. この意味において佐藤理論は完璧である.

### 3.4 佐藤超関数の Fourier-Laplace 変換

佐藤超関数  $T$  の Fourier-Laplace 変換  $\tilde{T}(z)$  を  $\tilde{T}(z) = \langle T_\zeta, e^{-iz\zeta} \rangle$  と定義する.

例 5(球ベッセル関数)

$P_n(z)$  を  $n$  次の Legendre 多項式とし,  $\langle T_t, \phi(t) \rangle = \int_{-1}^1 P_n(t)\phi(t)dt$  とおく.

$\tilde{T}(z) = 2i^n j_n(-z)$ , ( $j_n(z)$  は  $n$  次の球ベッセル関数) である.

例 6(ベッセル関数)

$$\text{超関数 } T(x) = \frac{1}{2\pi i} \left( \frac{e^{\frac{1}{x+i0}}}{x+i0} - \frac{e^{\frac{1}{x-i0}}}{x-i0} \right)$$

を考えよう.

Lippmann - Schwinger の関係式 ([10], [12])

$$\frac{1}{(x+i0)^{n+1}} = \frac{1}{x^{n+1}} - \frac{(-1)^n}{n!} \pi i \delta^{(n)}(x), \quad \frac{1}{(x-i0)^{n+1}} = \frac{1}{x^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{n!} \pi i \delta^{(n)}(x)$$

を使って計算すると

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n!)^2} \delta^{(n)}(x)$$

が判る. 汎関数としての表示は

$$\langle T, \phi \rangle = \frac{1}{2\pi i} \oint e^{\frac{1}{\zeta}} \phi(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta}$$

となる.

$T$  の Fourier-Laplace 変換  $\tilde{T}(z)$  は,  $J_0(2\sqrt{iz})$ , ( $J_0(z)$  は, 0 次のベッセル関数) である.

$\tilde{T}(z) = J_0(2\sqrt{iz})$  は整関数であり次の評価を持つ.

$\forall \varepsilon > 0, \exists C_\varepsilon > 0, \text{ s.t.}$

$$|\tilde{T}(z)| \leq C_\varepsilon \exp(\varepsilon|z|), \quad (\forall z = x + iy \in \mathbb{C})$$

### 3.5 佐藤超関数に対する Paley - Wiener の定理

2乗可積分関数については次が知られている。

帯域制限関数に対する Paley-Wiener の定理 ([5])

整関数 (全複素平面で正則な関数)  $f(z)$  が条件

1.  $\exists b > 0, \exists C > 0$  s.t.  $|f(z)| \leq C \exp(b|y|)$ , ( $\forall z = x + iy \in \mathbb{C}$ )

2.  $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$

を満たしているとき

$$f(z) = \int_{-b}^{+b} T(t) e^{-itz} dt$$

となる  $[-b, b]$  上の 2乗可積分関数  $T(t) \in L^2([-b, +b])$  が存在する。

佐藤超関数に対しては次のように拡張される。

佐藤超関数に対する Paley-Wiener の定理 ([10])

整関数  $f(z)$  が増大度評価

$$\forall \varepsilon > 0, \exists C_\varepsilon > 0, \text{ s.t. } |f(z)| \leq C_\varepsilon \exp(b|y| + \varepsilon|z|), \quad (\forall z = x + iy \in \mathbb{C})$$

を満たしているとき

$f(z) = \tilde{T}(z)$  となる  $[-b, b]$  上の佐藤超関数  $T$  が存在する。

特別な場合 ( $b = 0$ ) として次を得る。

原点に台を持つ佐藤超関数に対する Paley-Wiener の定理

整関数  $f(z)$  が増大度評価

$$\forall \varepsilon > 0, \exists C_\varepsilon > 0, \text{ s.t. } |f(z)| \leq C_\varepsilon \exp(\varepsilon|z|), \quad (\forall z = x + iy \in \mathbb{C})$$

を満たしているとき

$f(z) = \tilde{T}(z)$  となる原点に台を持つ佐藤超関数  $T$  が存在する。

注意:1. 原点に台を持つシュワルツ超関数は、ディラックのデルタ関数の導関数の一次結合になるためフーリエ・ラプラス変換像としては多項式のみが現れる。

2. 原点に台を持つ佐藤超関数は局所作用素 (local operator) と呼ばれる事もある ([10]).

### 3.6 原点に台を持つ佐藤超関数の構成法

$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  は, 条件  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$  を満たす数列とする.

$$f(z) = \prod_{n=0}^{\infty} (1 + a_n z) \text{ とおくと}$$

1.  $f(z)$  は, 整関数であり, 次の増大度評価を持つ.
2.  $\forall \varepsilon > 0, \exists C_\varepsilon > 0$  s.t.

$$|f(z)| \leq C_\varepsilon \exp(\varepsilon |z|), \quad (\forall z \in \mathbb{C})$$

従って, Paley-Wiener の定理により

$f(z) = \tilde{T}(z)$  となる原点に台を持つ佐藤超関数  $T$  が存在する.

例 7  $|a| < 1, (a \in \mathbb{C})$  とする.

$$f(z) = \prod_{n=0}^{\infty} (1 + a^{n+1} z) \text{ とおく.}$$

$f(z) = \tilde{T}(z)$  となる原点に台を持つ超関数  $T(x)$  は, 次で与えられる.

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(1-a^n) \cdots (1-a)} (-1)^n \delta^{(n)}(x)$$

(証明) 次の関係式 ([11])

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 + a^{n+1} z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(1-a^n) \cdots (1-a)} z^n$$

と  $(-1)^n \delta^{(n)}(x)$  のフーリエ・ラプラス変換が  $z^n$  である事を使う.

### 3.7 松澤の熱核の方法

1次元の場合の佐藤超関数の理論は, 割りと判りやすいのだが, 2次元以上になると多変数正則関数論が必要になるなど準備に非常に時間がかかる. 解析学者には, あまりなじみのないホモロジー代数を駆使する難解な佐藤超関数の理論の簡易化が色々と試みられた. 例えば, L. Hörmander による調和関数を利用する方法がある ([8]). もうひとつが, 熱方程式の基本解を利用する松澤の熱核の方法である ([9]).

—————  $K$  に台を持つ佐藤超関数の特徴付け ([9]) —————

熱方程式  $\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$  の解  $u(x, t)$  が次の条件

1.  $\forall \varepsilon > 0, \exists C_\varepsilon > 0$  s.t.

$$|u(x, t)| \leq C_\varepsilon \exp\left(\frac{\varepsilon}{t} - \frac{d(x, K)^2}{4t}\right), \quad (t > 0, x \in \mathbb{R}^n)$$

2.  $\lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = 0, \quad (x \in \mathbb{R}^n \setminus K)$

を満たしているとき  $u(x, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} u(x, t)$  は  $K$  に台を持つ佐藤超関数である。

逆に  $K$  に台を持つ佐藤超関数  $T$  と熱方程式の基本解  $E(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp(-\frac{x^2}{4t})$  の畳

み込み  $(T * E)(x, t)$  は、熱方程式の解であり上の条件 1, 2 を満たす。

例 8(ディラックのデルタ関数)

$$\delta(x) = \lim_{t \rightarrow 0} E(x, t), \quad E(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp(-\frac{x^2}{4t}), \quad \frac{\partial E(x, t)}{\partial t} = \Delta E(x, t)$$

### 3.8 松澤の熱核の方法の応用例

松澤の熱核の方法は、例えば次の事柄に応用されている。

- 1. Paley - Wiener の定理
- 2. 正の定符号超関数に対する Bochner - Schwartz の定理
- 3. いろいろな超関数の熱方程式の解の初期値としての分類
- 4. 超関数の波面集合の評価

## 4. Shannon-染谷の標本化定理

次は実軸上 2 乗可積分な整関数に対する有名な標本化定理である ([14]).

————— Shannon-染谷の標本化定理-I —————

2 乗可積分関数  $f(x)$  が帯域制限条件:  $(F^{-1}f)(t) = 0, \quad (|t| > \pi)$

を満たしているとき

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \frac{\sin \pi(z - n)}{\pi(z - n)}$$

が成立する。

次のように言い換えることができる。

## Shannon-染谷の標本化定理-II

整関数  $f(z)$  が条件

$$1. |f(z)| \leq C \exp(\pi|y|), \quad (\forall z = x + iy \in \mathbb{C})$$

$$2. \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty,$$

を満たしているとき  $f(z)$  は次のように展開される。

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \frac{\sin \pi(z-n)}{\pi(z-n)}.$$

右辺の級数は、カーディナル級数 Cardinal Series と呼ばれることもある ([5]).

佐藤超関数を使うと標本化定理を拡張する事ができる。特に、2乗可積分性の仮定をはずす事ができる。

## 5. 標本化定理の佐藤超関数による拡張

佐藤超関数に対する Paley-Wiener の定理を応用することにより次の定理を得る ([15]).

定理 整関数  $f(z)$  が次の条件を満たしているとする。

$$\forall \varepsilon > 0, \exists C_\varepsilon > 0 \text{ s.t.}$$

$$|f(z)| \leq C_\varepsilon \exp(b|y| + \varepsilon|z|), \quad (\forall z = x + iy \in \mathbb{C}).$$

もし  $0 \leq b < \pi$  であると、次が成立する。

$$f(z) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \frac{\sin \pi(z-n)}{\pi(z-n)} e^{-\delta|n|}.$$

証明には、佐藤超関数のフーリエ・ラプラス変換の Z-変換による積分表示式(後述)を利用する。積分路を単位円に変形すると標本化定理を得る。[15], [16] に詳しく書いてあるので参照してほしい。

例 9  $f(z) = 1$

$$1 = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi(z-n)}{\pi(z-n)} e^{-\delta|n|}.$$

これを变形すると  $\frac{\pi}{\sin \pi z}$  の部分分数展開式  $\frac{\pi}{\sin \pi z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z-n}$  を得る。

例 10.  $f(z) = P_z(\cos \theta)$ , ( $|\theta| < \pi$ )

$$P_z(\cos \theta) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n(\cos \theta) \frac{\sin \pi(z-n)}{\pi(z-n)} e^{-\delta|n|},$$

$$P_z(\cos \theta) = \frac{\sin \pi z}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{1}{z-n} - \frac{1}{z+n+1} \right) P_n(\cos \theta),$$

ただし,  $P_z(\cos \theta)$  は, ルジャンドル (Legendre) 関数.

この展開式は, Dougall 展開と呼ばれている ([6]).

## 6. ラマヌジャンの積分公式

ラマヌジャンの積分公式 I ([7])

$$\int_0^{\infty} u^{a-1} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} f(n)(-u)^n \right\} du = \frac{\pi f(-a)}{\sin(\pi a)}.$$

について考えよう. 次の点が問題になってくる.

- (1) この公式は正しいのか? (2) この公式をどう解釈すべきか?  
 (3) この公式をどう証明すべきか?

注意: ラマヌジャンは, 1887 年 12 月 22 日生まれのインド人天才数学者で 32 才の若さで亡くなった. 彼に関しては多くの逸話がある. ここで 1 つ紹介しよう. 通常  $1+2+3+\dots+n+\dots=\infty$  と習うが, 彼は  $1+2+3+\dots+n+\dots=-\frac{1}{12}$  という公式を導いた ([2]). リーマンゼータ関数の関数等式  $\zeta(1-s) = 2(2\pi)^{-s} \cos \frac{\pi s}{2} \Gamma(s) \zeta(s)$  を使えば ( $s=2$  を代入し,  $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$  を使うと) 正しい事がわかるが, 驚異的である.

### 6.1 ラマヌジャンの積分公式の計算例

いくつかの例を計算してみよう.

例 11.  $f(z) = 1$  とおく.

$$\int_0^{\infty} u^{z-1} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} f(n)(-u)^n \right\} du = \int_0^{\infty} \frac{u^{z-1}}{1+u} du = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \frac{\pi f(-z)}{\sin(\pi z)}$$

例 12.  $f(z) = \frac{1}{\Gamma(1+z)}$ , ( $\Gamma(z)$ : ガンマ関数)

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} u^{z-1} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-u)^n \right\} du &= \int_0^{\infty} u^{z-1} e^{-u} du = \Gamma(z) \\ &= \frac{\pi}{\Gamma(1-z) \sin(\pi z)} = \frac{\pi f(-z)}{\sin(\pi z)} \end{aligned}$$

以上の計算で用いたオイラーガンマ関数の定義と性質をまとめておく.

オイラー-Γ関数の性質

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} u^{z-1} e^{-u} du, \quad (\operatorname{Re}(z) > 0)$$

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \Gamma(n+1) = n!, \quad \Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \int_0^{\infty} \frac{u^{z-1}}{1+u} du = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}, \quad (0 < \operatorname{Re}(z) < 1)$$

例 13  $f(z) = P_z(\cos \theta)$

$$\int_0^{\infty} u^{z-1} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta)(-u)^n \right\} du = \int_0^{\infty} \frac{u^{z-1}}{\sqrt{1+2u \cos \theta + u^2}} du = \frac{\pi P_{-z}(\cos \theta)}{\sin(\pi z)} = \frac{\pi f(-z)}{\sin(\pi z)}$$

式変形の途中で Dirichlet-Mehler の公式を用いた ([6]).

例 14.  $f(z) = \sin(\pi z)$

$\frac{\pi f(-z)}{\sin(\pi z)} = -\pi$  であり, 一方  $\int_0^{\infty} u^{z-1} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} f(n)(-u)^n \right\} du = 0$  であるので, この例 14 では ラマヌジャンの積分公式は成立しない. 従って  $f(z)$  に対し何らかの条件が必要である事が判る.

## 6.2 ラマヌジャンの積分公式の定式化

次のように定式化する事ができる.

ラマヌジャンの積分公式 II

$f(z)$  を次の評価を持つ整関数とする.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists C_\varepsilon > 0, \text{ s.t. } |f(z)| \leq C_\varepsilon \exp(b|y| + \varepsilon|z|), \quad (\forall z = x + iy \in \mathbb{C})$$

もし  $0 \leq b < \pi$  であると

$$\frac{\pi f(-z)}{\sin(\pi z)} = \int_0^{\infty} G_T(-u) u^{z-1} du, \quad (0 < \operatorname{Re}(z) < 1)$$

が成立する.

$$\text{ただし, } f(z) = \tilde{T}(z), \quad G_T(-u) = \langle T, \frac{1}{1+ue^{-iu}} \rangle,$$

$T$  は閉区間  $[-b, b]$  上の佐藤超関数.

$f(z) = \tilde{T}(z)$  のとき  $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)(-u)^n = \langle T, \frac{1}{1+ue^{-iu}} \rangle = G_T(-u)$ , ( $|u| < 1$ ) であるので, ラマヌジャンの積分公式を上のように定式化できる.  $T$  のフーリエ・ラプラス変換  $\tilde{T}(z)$  と  $T$

の Z 変換  $G_T(-u) = \langle T_t, \frac{1}{1+ue^{-it}} \rangle$  の間の関係については後述する。

—— ラマヌジャンの積分公式の形式的導出 ——

ペーリー・ウイナーの定理により,  $\tilde{T}(z) = f(z)$  となる佐藤超関数  $T \in H'([-b, b])$  が存在する。

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n)(-u)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \langle T_t, e^{-int} \rangle (-u)^n = \langle T_t, \sum_{n=0}^{\infty} (-ue^{-it})^n \rangle = \langle T_t, \frac{1}{1+ue^{-it}} \rangle = G_T(-u).$$

これを使うと

$$\int_0^{\infty} u^{z-1} G_T(-u) du = \int_0^{\infty} u^{z-1} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} f(n)(-u)^n \right\} du = \int_0^{\infty} u^{z-1} \langle T_t, \frac{1}{1+ue^{-it}} \rangle du$$

$$= \langle T_t, \int_0^{\infty} \frac{u^{z-1}}{1+ue^{-it}} du \rangle = \langle T_t, \frac{\pi e^{itz}}{\sin \pi z} \rangle = \frac{\pi f(-z)}{\sin \pi z}$$

が判る。

厳密な証明には佐藤超関数の Z 変換が必要となる。

## 7. 佐藤超関数の Z 変換

### 7.1 佐藤超関数の Z 変換

信号処理の分野では, 数列  $\{a(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  に対し  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a(n)z^{-n}$  とおき, これを数列  $\{a(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  の Z 変換と呼ぶ ([14]). 数学的にはローラン (Laurent) 級数に対応する. 工学者はこの級数の収束性については余り気にしていないようである.

$z = e^{-i\theta}$  とおくと Z 変換はフーリエ級数  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a(n)e^{in\theta}$  になる.

片側だけの Z 変換  $\sum_{n=0}^{\infty} a(n)z^{-n}$  を考える事もある. 因果的 Z 変換と呼ばれる. 数学的にはテイラー (Taylor) 級数に対応する.

例 15(ベッセル関数  $J_n(t)$  の母関数展開 [6])

$$\exp\left(\frac{t}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(t)z^n, \quad (0 < |z| < \infty)$$

$$\exp(it \sin \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(t)e^{in\theta}, \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

$K = [-b, b]$  上の佐藤超関数  $T$  の Z 変換  $G_T(w)$  を次の様に定義する.

$$G_T(w) = \langle T_t, \frac{1}{1 - we^{-it}} \rangle$$

これを”何故 Z 変換と呼ぶのか?”という疑問に対する回答は, 次の命題で与えられる. ただし, 変数は  $z^{-1}$  の代わりに  $w$  を用いている.

## 7.2 Z-変換の性質

命題 ([1], [3])  $0 \leq b < \pi$  とし,  $T$  を  $K = [-b, b]$  上の佐藤超関数とする.

1.  $G_T(w) \in H(\mathbb{C} \setminus \exp(iK))$

$$2. G_T(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{T}(n)w^n, \quad (|w| < 1),$$

$$3. G_T(w) = - \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{T}(-n)w^{-n}, \quad (|w| > 1),$$

4. (メリン変換型の反転公式)

$$\tilde{T}(z) = \frac{-1}{2\pi i} \int_C G_T(w)w^{-z-1}dw$$

$C$  は, 円弧  $\exp(iK) = \{w \in \mathbb{C} : w = e^{i\theta}, |\theta| \leq b\}$  を正の向きに囲む積分路である.

ペーリー・ウイナーの定理 ( $f(z) = \tilde{T}(z)$ ) と組み合わせると次を得る.

$$2'. G_T(w) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)w^n, \quad (|w| < 1),$$

$$3'. G_T(w) = - \sum_{n=0}^{\infty} f(-n)w^{-n}, \quad (|w| > 1),$$

4'. (メリン変換型の反転公式)

$$f(z) = \frac{-1}{2\pi i} \int_C G_T(w)w^{-z-1}dw,$$

## 7.3 メリン変換型の反転公式の証明

命題の 2., 2'. 等については既に示したので, ここではメリン変換型の反転公式 4, 4' について説明する.

$$\int_C G_T(w)w^{-z-1}dw = \int_C \langle T_t, \frac{1}{1 - we^{-it}} \rangle w^{-z-1}dw$$

$$= \langle T_t, \int_C \frac{w^{-z-1}}{1 - we^{-it}}dw \rangle$$

コーシーの積分公式により

$$= 2\pi i \langle T_t, e^{-itz} \rangle = 2\pi i \tilde{T}(z) \text{ を得る. } f(z) = \tilde{T}(z) \text{ を使うと 4' を得る.}$$

## 7.4 メリン変換型の反転公式によるラマヌジャンの積分公式の証明

メリン変換型の反転公式 4'

$$f(z) = \frac{-1}{2\pi i} \int_C G_T(w) w^{-z-1} dw,$$

において積分路  $C$  を負の実軸を囲む積分路に変形することによりラマヌジャンの積分公式が得られる. 詳しくは [18], [20] を参照されたい.

## 8. まとめ

$f(z)$  を次の評価を満たす指数型整関数とする.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists C_\varepsilon > 0 \quad s.t.$$

$$|f(z)| \leq C_\varepsilon \exp(b|y| + \varepsilon|z|), \quad (\forall z = x + iy \in \mathbb{C})$$

もし  $0 \leq b < \pi$  であると,

### 1. 標本化定理

$$f(z) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \frac{\sin \pi(z-n)}{\pi(z-n)} e^{-\delta|n|}.$$

### 2. ラマヌジャンの積分公式

$$\int_0^\infty u^{z-1} G_T(-u) du = \frac{\pi f(-z)}{\sin(\pi z)}, \quad (0 < \operatorname{Re}(z) < 1),$$

が成立する.

ただし  $f(z) = \tilde{T}(z)$ ,  $G_T(w) = \langle T, \frac{1}{1 - we^{-it}} \rangle$ ,  $T \in H'([-b, b])$  である.

## 8.1 結論

佐藤超関数 (Hyperfunction) を使う事によりメリン変換型反転公式における積分路の変形で Shannon - 染谷の標本化定理とラマヌジャンの積分公式が結びついている事が明らかになった ([17], [20]).

### 1. Shannon - 染谷の標本化定理

メリン変換型反転公式における積分路  $C$  を単位円に変形する.

### 2. ラマヌジャンの積分公式

メリン変換型反転公式における積分路  $C$  を  $(-\infty, 0]$  に変形する.

## 9. 今後の課題

文献 [4] において、この講演で述べた事が Jordan 代数上で研究されている。ただし、[4] では、シュワルツ超関数を用いているために、多項式増大というかなり強い仮定が付いている。Jordan 代数上で佐藤超関数の理論を展開する事で増大度の仮定を緩める事ができると期待できる。

## 10. 付記

この論説を執筆中 Lars Hörmander 教授が死去した事を知りました。ここに謹んで哀悼の意を表します。

### 参考文献

- [1] V. Avannissian and R. Gay : *Sur une transformations des fonctionnelles analytiques et ses applications aux fonctions entières de plusieurs variables*, Bull. Soc. Math. France 103(1975), p.341-384.
- [2] B. C. Berndt : *Ramanujan's Notebooks*, Springer Verlag, Heidelberg, Berlin, New York Tokyo(1985)
- [3] C. Berenstein and R. Gay : *Complex Analysis and Special Topics in Harmonic Analysis*, Springer Verlag(1995)
- [4] W. Bertram : *Généralisation d'une formule de Ramanujan dans cadre de la transformation de Fourier spherique associée a la complexification d'un espace symétrique compact*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 316, (1993), p.1161-1166.
- [5] R.P. Boas : *Entire Functions*, Academic Press(1982)
- [6] Erdelyi, Magnus, Oberhettinger and Tricomi : *Higher Transcendental Functions Vol. I*, Mcgrawhill(1953)
- [7] G. H. Hardy : *Ramanujan*, Chelsea, New York (1978)
- [8] Lars Hörmander: *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I*, Springer Verlag, Heidelberg, Berlin, New York Tokyo(1980)
- [9] T. Kawai and T. Matsuzawa : *On the boundary value of a solution of the heat equation*, Publ. RIMS. Kyoto Univ. 25(1989), 491-498

- [10] 森本光生: 佐藤超関数入門, 共立出版 (1976),
- [11] G. Polya and G. Szegö: *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, Springer - Verlag, Berlin, (1925) Vol. I,
- [12] 佐藤 幹夫: 超関数の理論, 数学, (1958), 1-27
- [13] M. Sato: *Theory of Hyperfunctions I*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I, 8(1959), 139-193
- [14] 辻井 重男 監修: デジタル信号処理の基礎, 電子情報通信学会 (1988)
- [15] K. Yoshino: *Liouville type theorem for entire functions of exponential type*, Complex Variables, 5(1985), p. 21-51.
- [16] 吉野邦生—荒井隆行: デジタル信号と超関数, 海文堂 (1995)
- [17] 吉野邦生: デジタル信号と母関数, 数学セミナー 10月号, 日本評論社 (2001), p. 24-27
- [18] K. Yoshino: *The relation among Shannon's sampling theorem, Ramanujan's integral formula and Plana's summation formula*, Complex Analysis and Potential Theory, Proceedings of the Conference Satellite to ICM 2006 (Gebze Institute of Technology, Turkey) (Tahir Aliyev Azeroglu and Promarz M. Tamrazov eds.), World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd (2007), p. 191-197.
- [19] 吉野邦生: ヘビサイドの超関数を知る, 数理科学 5月号, (2009), p. 54-55
- [20] 吉野邦生: シャノン—染谷の標本化定理とラマヌジャンの積分公式, 東京都市大学共通教育センター紀要, 3月 (2010), p. 1-21