数理解析研究所講究録
第 1870 巻 2013 年 30-45

On a higher level extension of Leclerc-Thibon product theorem in q-deformed Fock spaces

飯島 和人* (名古屋大学多元数理 PD ,Nagoya University)

概 要

$U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_n)$ の高レベル q-Fock 空間表現は神保-Misra-美輪-尾角により導入された [4]. Uglov は高レベル q-Fock 空間上の標準的な bar-involution で不変な 2 組の基底 (標準基底) を定義した [7]. この標準基底に関して, Leclerc-Thibon はレベル 1 の場合にある積定理を示した [5]. この定理は Steinberg-Lusztig のテンソル積定理の形式的類似として得られたものである.

本稿では, multi charge のある条件の下, Leclerc-Thibon の積定理の高レベル化を紹介する [3].

1 Fock space representation of $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_n)$

本稿を通じて, n は 2 以上の整数, ℓ は 1 以上の整数とする.

1.1 $A_{n-1}^{(1)}$-型アフィン量子代数 $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_n)$

$U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_n)$ を $\mathbb{Q}(q)$ 上の $A_{n-1}^{(1)}$-型アフィン量子代数とする. つまり, $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_n)$ は $E_i, F_i, K_i^{\pm}, D^{\pm}$ $(0 \leq i \leq n-1)$ を生成元にもつ $\mathbb{Q}(q)$ 上の代数で, その基本関係式は,

- $K_iK_i^{-1} = K_i^{-1}K_i = 1, \qquad K_iK_j = K_jK_i,$
- $K_iE_jK_i^{-1} = q^{a_{ij}}E_j, \qquad K_iF_jK_i^{-1} = q^{-a_{ij}}F_j,$
- $DD^{-1} = D^{-1}D = 1, \qquad K_iD = DK_i,$

*e-mail: kazuto.iijima@math.nagoya-u.ac.jp

- $DE_0D^{-1} = q^{-1}E_0, \quad DF_0D^{-1} = qF_0, \quad DE_iD^{-1} = 0, \quad DF_0D^{-1} = 0, \quad (i \neq 0)$,
- $E_iF_j - F_jE_i = \delta_{ij}\dfrac{K_i - K_i^{-1}}{q - q^{-1}}$,
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{1-a_{ij}} E_i^{1-a_{ij}-k}E_jE_i^k = 0, \quad \sum_{k=0}^{1-a_{ij}} F_i^{1-a_{ij}-k}F_jF_i^k = 0, \quad (i \neq j)$,

で与えられる．$U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_n)$ の部分代数で，F_i $(0 \leq i \leq n-1)$ で生成されるものを $U_q^-(\hat{\mathfrak{sl}}_n)$ で表す．

1.2 高レベル q-Fock 空間 $\mathcal{F}[s]$

まず，線型空間として，高レベル q-Fock 空間 $\mathcal{F}[s]$ を定義する．Π でヤング図形全体のなす集合を表す．ℓ 個のヤング図形の組

$$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \cdots, \lambda^{(\ell)}) \in \Pi^\ell$$

を **multi partition** とよび，そのサイズを各々のヤング図形のサイズの和 $|\boldsymbol{\lambda}| = |\lambda^{(1)}| + \cdots + |\lambda^{(\ell)}|$ で定義する．例えば，$\ell = 2, \boldsymbol{\lambda} = \Big((3,2),(4)\Big)$ なら，$|\boldsymbol{\lambda}| = 9$ となる．

定義 1.1. $\boldsymbol{s} = (s_1, \cdots, s_\ell) \in \mathbb{Z}^\ell$ を ℓ 個の整数の組とする．**multi charge** $\boldsymbol{s}$ をもつ q**-Fock 空間** $\mathcal{F}[\boldsymbol{s}]$ を，$\{|\boldsymbol{\lambda}; \boldsymbol{s}\rangle \mid \boldsymbol{\lambda} \in \Pi^\ell\}$ を基底とする $\mathbb{Q}(q)$-線型空間として定義する．つまり，

$$\mathcal{F}[\boldsymbol{s}] = \sum_{\boldsymbol{\lambda} \in \Pi^\ell} \mathbb{Q}(q)|\boldsymbol{\lambda}; \boldsymbol{s}\rangle.$$

次に，$\mathcal{F}[\boldsymbol{s}]$ に $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_n)$-加群の構造を以下のようにして定める．$\boldsymbol{\lambda} \in \Pi^\ell$, $\boldsymbol{s} \in \mathbb{Z}^\ell$ とする．ヤング図形 $\lambda^{(j)}$ $(1 \leq j \leq \ell)$ の i 行 k 列にあるセル $\gamma = (i,k) \in \lambda^{(j)}$ に対し，その **content** と n**-residue** を

$$\mathrm{cont}(\gamma) = s_j - i + k \quad , \quad \mathrm{res}(\gamma) \equiv s_j - i + k \bmod n.$$

で定める．また，γ が i**-cell** とは，$\mathrm{res}(\gamma) = i$ となるときをいう．

例 1.2. $n=2$, $\ell=2$, $s=(12,0)$, $\boldsymbol{\lambda}=\Big((3,2,2),(2)\Big)$ とする．このとき，この *multi partition* の *content* と *n-residue* は以下のようになる．

$$
\textit{content}:\left(\begin{array}{llll} \boxed{12}&\boxed{13}&\boxed{14}&15\\ \boxed{11}&\boxed{12}&13&\\ \boxed{10}&\boxed{11}&&\\ 9&&& \end{array},\ \begin{array}{lll} \boxed{0}&\boxed{1}&2\\ -1&& \end{array}\right),\quad \textit{n-residue}:\left(\begin{array}{llll} \boxed{0}&\boxed{1}&\boxed{0}&1\\ \boxed{1}&\boxed{0}&1&\\ \boxed{0}&\boxed{1}&&\\ 1&&& \end{array},\ \begin{array}{lll} \boxed{0}&\boxed{1}&0\\ 1&& \end{array}\right).
$$

$\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}\in\Pi^{\ell}$ とし，$\boldsymbol{\mu}$ は $\boldsymbol{\lambda}$ にある i-cell γ を加えて得られると仮定する．このようなセル γ を，$\boldsymbol{\mu}$ の **remobable** i-**cell**，または，$\boldsymbol{\lambda}$ の **addable** i-**cell** とよぶ．このような場合に，$\boldsymbol{\lambda}\xrightarrow{i}\boldsymbol{\mu}$ と書くことにする．例えば，$n=3$, $\ell=1$, $s=0$ のとき，

$$
\emptyset \xrightarrow{0} \boxed{0} \xrightarrow{1} \boxed{0}\boxed{1} \xrightarrow{2} \begin{array}{ll}\boxed{0}&\boxed{1}\\ \boxed{2}&\end{array} \xrightarrow{2} \begin{array}{lll}\boxed{0}&\boxed{1}&\boxed{2}\\ \boxed{2}&&\end{array}
$$

などである．

定義 1.3. (1) セル γ を *multi partition* $\boldsymbol{\lambda}$ の第 j 成分 $\lambda^{(j)}$ にあるセルとし，δ を第 j' 成分 $\lambda^{(j')}$ にある別のセルとする．このとき，2つのセル γ, δ の間の順序を

$$
\delta>\gamma \iff \begin{cases} \mathrm{cont}(\delta)>\mathrm{cont}(\gamma) & \text{または,}\\ \mathrm{cont}(\delta)=\mathrm{cont}(\gamma) & \text{かつ}\quad j<j'. \end{cases}
$$

で定義する．

(2) $\boldsymbol{\lambda}\xrightarrow{i}\boldsymbol{\mu}$ とし，$\gamma=\mu\setminus\lambda$ とする．整数 $A_i(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}), R_i(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}), N_i(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})$ を

$$
\begin{aligned}
A_i(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})&=\#\{\delta\mid\delta\text{ は }\textit{addable i-cell}\text{ かつ }\delta>\gamma\},\\
R_i(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})&=\#\{\delta\mid\delta\text{ は }\textit{removable i-cell}\text{ かつ }\delta>\gamma\},\\
N_i(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})&=A_i(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})-R_i(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})
\end{aligned}
$$

で定義する．

Remark 1.4. このセルの順序付けにはいくつかの流儀がある．ここでのセルの順序付けは [7] のものを採用した．[2] の順序とは逆になるので注意．

例 1.5. $n=2$, $\ell=2$, $s=(12,0)$, $\boldsymbol{\lambda}=\Big((3,2,2),(2)\Big)$, $\boldsymbol{\mu}=\Big((3,2,2,1),(2)\Big)$ とする．このとき，γ は第1成分の $(4,1)$ にあるセルで，その *n-residue* は $\mathrm{res}(\gamma)=1$.

また，

$$A_1(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})=2,\quad R_1(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})=1,\quad N_1(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})=2-1=1$$

となる．

$$\left(\begin{array}{cccc} \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{0} & 1 \\ \boxed{1} & \boxed{0} & 1 & \\ \boxed{0} & \boxed{1} & & \\ \boxed{\mathbf{1}} & & & \end{array} , \begin{array}{ccc} \boxed{0} & \boxed{1} & 0 \\ 1 & & \end{array} \right)$$

定義 1.6. アフィン量子群 $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_n)$ の生成元 F_i の q-*Fock*空間上への作用を，

$$F_i|\boldsymbol{\lambda};\boldsymbol{s}\rangle=\sum_{\boldsymbol{\lambda}\xrightarrow{i}\boldsymbol{\mu}} q^{N_i(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})}|\boldsymbol{\mu};\boldsymbol{s}\rangle$$

で定める．

例 1.7. $n=2,\ \ell=2,\ \boldsymbol{s}=(12,0),\ \boldsymbol{\lambda}=\Big((3,2,2),(2)\Big)$ とすると，

$$F_1|\boldsymbol{\lambda};\boldsymbol{s}\rangle=\Big((4,2,2),(2)\Big)+q\Big((3,3,2),(2)\Big)+q\Big((3,2,2,1),(2)\Big)+q^2\Big((3,2,2),(2,1)\Big).$$

本稿では F_i の作用のみしか定義しないが，他の生成元 $E_i, K_i^{\pm}, D^{\pm}$ の q-Fock 空間 $\mathcal{F}[\boldsymbol{s}]$ も組合せ論的に定義できて，それらの作用は $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_n)$ の基本関係式を満たす．（詳しい証明は [2] 参照）つまり，

定理 1.8 (林 '90, 神保-Misra-三輪-尾角 '91). *q-Fock*空間 $\mathcal{F}[\boldsymbol{s}]$ はレベル ℓ の $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_n)$-加群となる．

1.3 bar involution

Uglov は，q-Fock 空間 $\mathcal{F}[\boldsymbol{s}]$ 上に **bar involution** $\overline{}$ を定義した [7]. 本稿では詳しい定義は扱わないが，その bar involution は，次の性質を満たすことが知られている．

$$\begin{aligned} \overline{|\boldsymbol{\emptyset};\boldsymbol{s}\rangle} &= |\boldsymbol{\emptyset};\boldsymbol{s}\rangle\ , \\ \overline{a(q)x+b(q)y} &= a(q^{-1})\overline{x}+b(q^{-1})\overline{y}\ , \\ \overline{F_i x} &= F_i\overline{x}\ . \end{aligned}$$

ここで，$\boldsymbol{\emptyset}=\underbrace{(\emptyset,\cdots,\emptyset)}_{\ell}$, $0\le i\le n-1$, $a(q),b(q)\in\mathbb{Q}(q)$, $x,y\in\mathcal{F}[\boldsymbol{s}]$ である．

Remark 1.9. (1) この *bar involution* は q-**wedge products** とよばれるものを用いて定義される．この q-*wedge product*（とその *ordering rule*）が非常に煩雑なので，本稿では省略した．

(2) この *bar involution* は，アフィン *Hecke* 代数 $H_q(\hat{\mathfrak{S}}_k)$ の *bar involution* とある意味で一致する．

(3) $\ell = 1$ のときは，この *bar involution* は，上記 3 つの性質と *Heisenberg* 代数の作用で特徴付けられる．(§3 参照)

1.4 支配的順序

定義 1.10. $M \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする．$|\boldsymbol{\lambda}; \boldsymbol{s}\rangle \in \mathcal{F}[\boldsymbol{s}]$ が M-**dominant** であるとは，すべての $i = 1, 2, \cdots, \ell - 1$ に対して，

$$s_i - s_{i+1} \geq |\boldsymbol{\lambda}| + M$$

となるときをいう．

q-Fock 空間の基底 $\{|\boldsymbol{\lambda}; \boldsymbol{s}\rangle \mid \boldsymbol{\lambda} \in \Pi^\ell\}$ の間には **dominance order** とよばれるある半順序 $\triangleright$ が定義できる．本稿では，0-dominant の場合のみで定義しておく．

定義 1.11. $|\boldsymbol{\lambda}; \boldsymbol{s}\rangle, |\boldsymbol{\mu}; \boldsymbol{s}\rangle \in \mathcal{F}[\boldsymbol{s}]$ がともに 0-*dominant* であるとする．このとき，順序 $|\boldsymbol{\lambda}; \boldsymbol{s}\rangle \trianglerighteq |\boldsymbol{\mu}; \boldsymbol{s}\rangle$ を

$$|\boldsymbol{\lambda}| = |\boldsymbol{\mu}| \quad \text{かつ} \quad \sum_{a=1}^{j-1} |\lambda^{(a)}| + \sum_{b=1}^{k} \lambda_b^{(j)} \geq \sum_{a=1}^{j-1} |\mu^{(a)}| + \sum_{b=1}^{k} \mu_b^{(j)}$$

(*for all* $1 \leq j \leq \ell$ *and* $k \geq 1$) で定める．

例 1.12. $\ell = 2, \boldsymbol{s} = (10, 0)$, $\boldsymbol{\lambda} = \Big((3,2),(3)\Big)$, $\boldsymbol{\mu} = \Big((2),(4,2)\Big)$ とする．このとき，$|\boldsymbol{\lambda}; \boldsymbol{s}\rangle, |\boldsymbol{\mu}; \boldsymbol{s}\rangle$ はともに 0-*dominant* で，$|\boldsymbol{\lambda}; \boldsymbol{s}\rangle \triangleright |\boldsymbol{\mu}; \boldsymbol{s}\rangle$ となる．

1.5 標準基底

命題 1.13 (Leclerc-Thibon '96, Uglov '00). 行列 $A=(a_{\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\mu}}(q))$ を，

$$\overline{|\boldsymbol{\lambda};\boldsymbol{s}\rangle}=\sum_{\boldsymbol{\mu}}a_{\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\mu}}(q)|\boldsymbol{\mu};\boldsymbol{s}\rangle.$$

で定義する．このとき，行列 A は対角成分が 1 の下三角行列となる．つまり，

$$\begin{cases} a_{\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\lambda}}(q)=1, \\ a_{\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\mu}}(q)\neq 0 \Longrightarrow |\boldsymbol{\lambda};s\rangle \trianglerighteq |\boldsymbol{\mu};s\rangle \end{cases}$$

が成り立つ．

この命題から，標準基底の存在に関する次の定理が導かれる．

定理 1.14 (Leclerc-Thibon '96, Uglov '00). *q-Fock*空間 $\mathcal{F}[\boldsymbol{s}]$ には，次の性質を満たす 2 組の基底 $\{G^+(\boldsymbol{\lambda};\boldsymbol{s})\,|\,\boldsymbol{\lambda}\in\Pi^\ell\}$, $\{G^-(\boldsymbol{\lambda};\boldsymbol{s})\,|\,\boldsymbol{\lambda}\in\Pi^\ell\}$ が一意に存在する．

(1) $\overline{G^+(\boldsymbol{\lambda};\boldsymbol{s})}=G^+(\boldsymbol{\lambda};s)$ かつ $G^+(\boldsymbol{\lambda};\boldsymbol{s})\equiv|\,\boldsymbol{\lambda};\boldsymbol{s}\rangle \mod q\,\mathcal{L}^+$.

(2) $\overline{G^-(\boldsymbol{\lambda};\boldsymbol{s})}=G^-(\boldsymbol{\lambda};s)$ かつ $G^-(\boldsymbol{\lambda};\boldsymbol{s})\equiv|\,\boldsymbol{\lambda};\boldsymbol{s}\rangle \mod q^{-1}\,\mathcal{L}^-$.
ここで，$\mathcal{L}^+=\bigoplus_{\lambda\in\Pi^\ell}\mathbb{Q}[q]\,|\boldsymbol{\lambda};\boldsymbol{s}\rangle$, $\mathcal{L}^-=\bigoplus_{\lambda\in\Pi^\ell}\mathbb{Q}[q^{-1}]\,|\boldsymbol{\lambda};\boldsymbol{s}\rangle$ である

この 2 組の基底 $\{G^+(\boldsymbol{\lambda};\boldsymbol{s})\,|\,\boldsymbol{\lambda}\in\Pi^\ell\}$, $\{G^-(\boldsymbol{\lambda};\boldsymbol{s})\,|\,\boldsymbol{\lambda}\in\Pi^\ell\}$ を標準基底とよぶ．

定義 1.15. 行列 $\Delta^+(q)=(\Delta^+_{\lambda,\mu}(q))_{\lambda,\mu}$, $\Delta^-(q)=(\Delta^-_{\lambda,\mu}(q))_{\lambda,\mu}$ を次の式で定める．

$$G^+(\boldsymbol{\lambda};\boldsymbol{s})=\sum_{\boldsymbol{\mu}}\Delta^+_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}}(q)\,|\,\boldsymbol{\mu};\boldsymbol{s}\rangle \quad , \quad G^-(\boldsymbol{\lambda};\boldsymbol{s})=\sum_{\boldsymbol{\mu}}\Delta^-_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}}(q)\,|\,\boldsymbol{\mu};\boldsymbol{s}\rangle.$$

行列の成分 $\Delta^+_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}}(q)$, $\Delta^-_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}}(q)$ を q-分解係数とよぶ．

Remark 1.16. (1) 記号上には現れていないが，$\Delta^+(q)$ や $\Delta^-(q)$ は n, ℓ, $\boldsymbol{s}$ に依存する．

(2) 行列 $\Delta^+(q)$, $\Delta^-(q)$ もまた半順序 $\trianglerighteq$ に関して対角成分が 1 の下三角行列となる．

(3) $p=-q^{-1}$ とおく．q-分解係数 $\Delta^-_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}}(q)$ は，$\widetilde{A}$ 型アフィン *Hecke* 代数の放物加群に関する *Kazhdan-Lusztig* 多項式として表されることが知られている [7]．特に，$\Delta^-_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}}(q)\in\mathbb{N}[p]$ となる．

2 q-Fock 空間の圏化

$U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_n)$ の q-Fock 空間表現の理論では，標準基底や q-分解係数の性質を調べることが非常に重要な研究課題である．今節では，q-Fock 空間の標準基底，q-分解係数と，岩堀-Hecke 代数，ξ-Schur 代数，rational Cherednik 代数の圏 $\mathcal{O}$ などの表現論との関わりを簡潔に述べておく．

2.1 $\ell = 1$ のとき

$\ell = 1$ とする．このとき，全ての q-Fock 空間 $\mathcal{F}[s]$ において，標準基底や q-分解係数は s に依存せずに等しくなる．このような事情から，s は省略されることがある．

ξ を 1 の原始 n 乗根，$\mathcal{S}_k(\xi)$ を ξ-Schur 代数, $W(\lambda)$ を最高ウエイト λ をもつ $\mathcal{S}_k(\xi)$ の Weyl 加群，$L(\lambda)$ を最高ウエイト λ をもつ $\mathcal{S}_k(\xi)$ の単純加群とする．

定理 2.1 (Varagnolo-Vasserot '99). $\ell = 1$ のとき，

$$[W(\lambda') \colon L(\mu')] = \Delta^+_{\mu,\lambda}(1).$$

ここで，λ' はヤング図形 λ の転置である．

上の定理は，**q-Fock 空間表現の圏化**という視点から見ると理解しやすい．$\mathcal{S}_k(\xi)$ の有限次元右表現全体のなす圏のグロタンディーク群 $K_0 = K(\text{mod-}\mathcal{S}_k(\xi)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ から q-Fock 空間 $\mathcal{F}$ への写像 $\iota \colon K_0 \to \mathcal{F}$ を

$$\iota(W(\lambda)) = |\lambda\rangle$$

で定めると，上記定理は，次のように言い換えられる．

系 2.2 (Varagnolo-Vasserot '99).

$$\iota(L(\lambda)) = G^-_\lambda(1).$$

圏 $\mathcal{C} = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \text{mod-}\mathcal{S}_k(\xi)$ を考える．このとき，"$\mathcal{C}$ を q-Fock 空間 $\mathcal{F}$ の $q = 1$ における圏化" とみなすと，上の結果は，" 単純加群と標準基底 G^- が対応して

いる” とみることができる．他にも，$\boldsymbol{F}_q$ への量子代数 $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_n)$ の生成元 e_i, f_i $(i = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$ の作用は，ι を通じて $\mathcal{C}$ 上では，ある種の制限，誘導に対応していることが知られている．これらの状況を簡単にまとめたものが次の表である．

$\mathcal{C}$	$\longleftrightarrow$	$\mathcal{F}$
$W(\lambda)$	$\longleftrightarrow$	$\lvert\lambda\rangle$
$L(\lambda)$	$\longleftrightarrow$	G_λ^-
$T(\lambda)$	$\longleftrightarrow$	G_λ^+
i-Induction	$\longleftrightarrow$	量子代数の生成元 F_i の作用
i-Restriction	$\longleftrightarrow$	量子代数の生成元 E_i の作用
Khovanov-Lauda-Rouquier 代数の次数	$\longleftrightarrow$	q

ここで，$T(\lambda)$ 最高ウエイト λ の indecomposable tilting 加群である．

2.2 $\ell \geq 2$ の場合

以上の枠組みは，一般のレベル ℓ においても成り立つことが期待されている．考える q-Fock 空間, レベル，multi charge $\boldsymbol{s}$ の条件などで，対応する代数（とその表現の圏）が異なるのであるが，それらを以下にまとめておく．

レベル ℓ	q-Fock 空間	$\boldsymbol{s}$ に関する条件		代数（または圏）
$\ell = 1$	$U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_n)\lvert\emptyset\rangle$	−	$\Leftrightarrow$	岩堀-Hecke 代数
$\ell = 1$	$\mathcal{F}$	−	$\Leftrightarrow$	ξ-Schur 代数 $\mathcal{S}_k(\xi)$
$\ell \geq 2$	$U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_n)\lvert\emptyset; \boldsymbol{s}\rangle$	−	$\Leftrightarrow$	有木-小池代数
$\ell \geq 2$	$\mathcal{F}[\boldsymbol{s}]$	0-dominant	$\Leftrightarrow$	cyclotomic ξ-Schur 代数
$\ell \geq 2$	$\mathcal{F}[\boldsymbol{s}]$	−	$\Leftrightarrow$	$\mathcal{O}_{\boldsymbol{s}}(\ell, 1, m)$

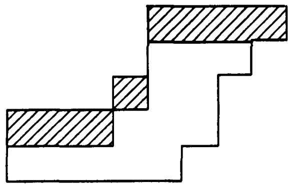
ここで，$\mathcal{O}_{\boldsymbol{s}}(\ell, 1, m)$ は multi charge $\boldsymbol{s}$ に付随する $(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})\wr\mathfrak{S}_m$ の rational Cherednik 代数の圏 $\mathcal{O}$ である．

3 Heisenberg 代数の作用と Leclerc-Thibon の定理

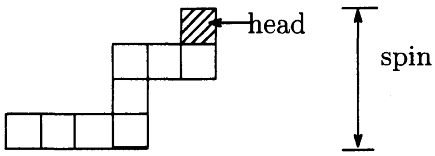
今節では, レベルは $\ell = 1$ に固定する.

3.1 ribbon盤

$\lambda, \mu \in \Pi$ とし，$\lambda \subset \mu$ と仮定する．このとき，$\mu \setminus \lambda$ で歪ヤング図形を表す．歪ヤング図形 $\mu \setminus \lambda$ に対し，水平帯とは，$\mu \setminus \lambda$ の一番上のセルからなる集合である．



歪ヤング図形 $\mu \setminus \lambda$ が **n-ribbon** であるとは，それが n 個のセルから成り，更に 2×2 の正方形を含まないときをいう．n-ribbon の最も右上にあるセルを **head** という．n-ribbon の **spin** を「高さ -1」で定める．例えば，以下の例では，spin$=3$ である．



定義 3.1. 歪ヤング図形 $\mu \setminus \lambda$ が ウエイト r の n**-ribbon盤** であるとは，次の2条件を満たすときをいう．

- $\mu \setminus \lambda$ は r 個の *n-ribbons* の *disjoint union* である．
- 全ての *n-ribbon* の *head* が $\mu \setminus \lambda$ の水平帯に属している．

$\mu \setminus \lambda$ がウエイト r の *n-ribbon*盤であるとき，$\lambda \overset{r:n}{\rightsquigarrow} \mu$ と表す．

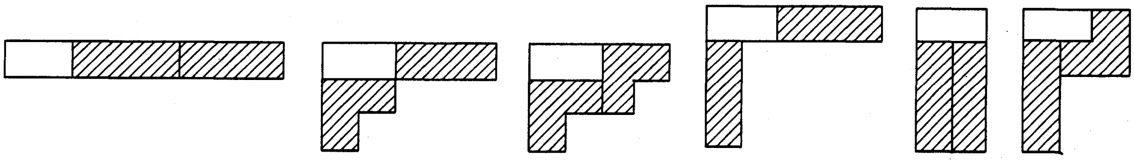
Remark 3.2. *n-ribbon* によるこのような貼り合せは，存在すれば一意である．

定義 3.3. $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\lambda \in \Pi$ とする．$V_r \colon \mathcal{F}[s] \to \mathcal{F}[s]$ を次のように定義する．

$$V_r|\lambda; s\rangle = \sum_{\lambda \overset{r:n}{\rightsquigarrow} \mu} (-q^{-1})^{\mathrm{spin}(\mu \setminus \lambda)} |\mu; s\rangle.$$

例 3.4. $n=3,\ \ell=1,\ m=2,\ \lambda=(2)$ とする．このとき，

$$\begin{aligned}V_2\,|(2);s\rangle =&|(8);s\rangle - q^{-1}\,|(5,2,1);s\rangle + q^{-2}|(4,3,2);s\rangle \\ &+q^{-2}\,|(5,1^3);s\rangle + q^{-4}\,|(2^4);s\rangle - q^{-3}\,|(3^2,1^2);s\rangle.\end{aligned}$$



3.2 Heisenberg 代数の作用

r を正の整数，λ をヤング図形とする．p_r, h_r をそれぞれ次数 r のベキ和対称関数，完全対称関数とし，s_λ を Schur 関数とする．これらの対称関数の間には，よく知られた次の関係式がある．

$$h_m=\sum_{|\lambda|=m}\frac{1}{z_\lambda}p_\lambda \quad , \quad s_\lambda=\sum_{\mu}K^{(-1)}_{\lambda,\mu}h_\mu \quad .$$

ここで，$K^{(-1)}_{\lambda,\mu}$ は逆 Kostka 係数で，z_μ は $\mu=(1^{\alpha_1},2^{\alpha_2},\cdots)$ に対し，$z_\mu=\Pi_{i\geq 1}i^{\alpha_i}\alpha_i!$ で定まる有理数である．これらの関係式を利用して，$\mathcal{F}$ 上に，B_{-r} と S_λ の作用を次のように定義する．

定義 3.5. $r\in\mathbb{Z}_{>0}$, $\lambda\in\Pi$ とする．$\mathcal{F}$ 上の作用素 B_{-r}, S_λ を，

$$V_r=\sum_{|\lambda|=r}\frac{1}{z_\lambda}B_{-\lambda_1}B_{-\lambda_2}\cdots \quad , \quad S_\lambda=\sum_{\mu}K^{(-1)}_{\lambda,\mu}V_{\mu_1}V_{\mu_2}\cdots .$$

で定義する．

対称関数と $\mathcal{F}$ 上の作用素 B_{-r}, V_r, S_λ の対応は次のようになる．

対称関数		Heisenberg 代数の作用
p_r	$\leftrightarrow$	B_{-r}
h_r	$\leftrightarrow$	V_r
s_λ	$\leftrightarrow$	S_λ

Remark 3.6. q-Fock 空間 $\mathcal{F}$ 上に定義されたこれら 3 つの作用素には，それぞれ長所がある．

(1) B_{-r} は q-wedge product 上のボゾン作用であり，アフィンヘッケ代数 $H_q(\hat{\mathfrak{S}}_k)$ の中心に属する元と対応している．

(2) V_r は ribbon 盤を用いた組合せ論的記述を持つ (§3.1 参照)．

(3) S_λ は標準基底と密接な関係を持つ（Leclerc-Thibon の定理）．

命題 3.7. *q-Fock*空間 $\mathcal{F}$ 上に定義されたこれら 3 つの作用素は，*bar involution* と可換である．つまり，$x \in \mathcal{F}[s]$ に対し，

$$\overline{B_{-r}x} = B_{-r}\overline{x} \quad , \quad \overline{V_r x} = V_r\overline{x} \quad , \quad \overline{S_\lambda x} = S_\lambda\overline{x}$$

が成り立つ．

3.3 Leclerc-Thibon の定理

定義 3.8. (1) ヤング図形 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots)$ が **n-restricted** であるとは，

$$0 \leq \lambda_i - \lambda_{i+1} < n \quad \textit{for all } i = 1, 2, \cdots$$

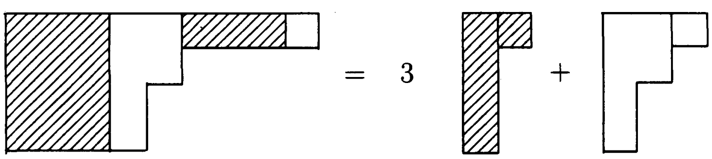
となるときをいう．

(2) ヤング図形 $\lambda \in \Pi$ に対し，$\widetilde{\lambda}, \check{\lambda} \in \Pi$ を

$$\widetilde{\lambda} \text{ が } n\textit{-restricted} \quad \text{かつ} \quad \lambda = \widetilde{\lambda} + n\check{\lambda}$$

で定義する．

例 3.9. $n = 3$, $\lambda = (9, 5, 4, 4)$ とする．このとき，$(9, 5, 4, 4) = 3 \cdot (2, 1, 1, 1) + (3, 2, 1, 1)$ かつ $(3, 2, 1, 1)$ は 3-*restricted* である．従って，$\widetilde{\lambda} = (3, 2, 1, 1), \check{\lambda} = (2, 1, 1, 1)$．



ここで，Leclerc-Thibon の定理を紹介する．

定理 3.10 (Leclerc-Thibon '96). $\ell = 1$ とし，λ をヤング図形とする．このとき，

$$G^-(\lambda) = S_{\check{\lambda}} G^-(\widetilde{\lambda}).$$

例 3.11. *(i)* $n=2$, $\lambda = (4)$ とする．このとき，$\lambda = \emptyset + n(2)$ となるので，

$$G^-((4)) = S_{(2)}\, G^-(\emptyset) = V_{(2)}\, \emptyset = (4) - q^{-1}(3,1) + q^{-2}(2,2).$$

(ii) $n=2$, $\lambda = (2,2)$ とする．このとき，$\lambda = \emptyset + n(1,1)$ となるので，

$$G^-((2,2)) = S_{(1,1)} G^-(\emptyset) = (V_1 V_1 - V_2)\emptyset = (2,2) - q^{-1}(2,1,1) + q^{-2}(1^4).$$

3.4 Steinberg-Lusztig のテンソル積定理

Leclerc-Thibon の定理は，Steinberg-Lusztig のテンソル積定理の形式的類似として得られた．今節の最後にそれを簡潔に紹介しておく．

ζ を $\xi = \zeta^2$ が 1 の原始 n 乗根となるような複素数とする．Frobenius 写像 Fr: $U_\zeta(\mathfrak{gl}_r) \longrightarrow U(\mathfrak{gl}_r)$ を

$$\mathrm{Fr}(K_j) = 1, \quad \mathrm{Fr}(E_i^{(k)}) = \begin{cases} E_i^{(k/n)} & \text{if } n \text{ divides } k \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, \quad \mathrm{Fr}(F_i^{(k)}) = \begin{cases} F_i^{(k/n)} & \text{if } n \text{ divides } k \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

で定める．ここで，$E_i^{(k)} = \frac{E_i^k}{[k]!}, F_i^{(k)} = \frac{F_i^k}{[k]!}$ である．

M をある $U(\mathfrak{gl}_r)$-加群とするとき，M^{Fr} で $U(\mathfrak{gl}_r)$ の作用と Fr を合成することにより得られる $U_\zeta(\mathfrak{gl}_r)$-加群を表す．このとき，次の定理が成り立つ．

定理 3.12 (Steinberg-Lusztig '89).

$$L(\lambda) \simeq L(\widetilde{\lambda}) \otimes W(\check{\lambda})^{Fr},$$

ここで，$L(\lambda)$ は $U_\zeta(\mathfrak{gl}_r)$ の単純加群，$W(\check{\lambda})$ は $U(\mathfrak{gl}_r)$ の（古典的）*Weyl* 加群である．

Leclerc-Thibon の定理は，この Steinberg-Lusztig のテンソル積定理の形式的類似となっている．

$\mathcal{C}$	$\longleftrightarrow$	$\mathcal{F}$
Steinberg-Lusztig のテンソル積定理	$\longleftrightarrow$	Leclerc-Thibon の積定理

4 Leclerc-Thibon の定理の高レベル化について

今節では，レベル $\ell \geq 1$ の場合の Leclerc-Thibon の定理について述べる．

4.1 Heisenberg の作用の細分化

定義 4.1. $r \geq 1,\ 1 \leq j \leq \ell$ とする．$\mathcal{F}[\boldsymbol{s}]$ 上の線型作用素 $B'_{-r}[j]$ を 第 j 成分への B_{-r} のレベル 1 作用として定義する．即ち，

$$B'_{-r}[j]\,|(\lambda^{(1)},\cdots,\lambda^{(j)},\cdots,\lambda^{(\ell)});\boldsymbol{s}\rangle = |(\lambda^{(1)},\cdots,B_{-r}\lambda^{(j)},\cdots,\lambda^{(\ell)});\boldsymbol{s}\rangle,$$

ここで，右辺の $B_{-r}\lambda^{(j)}$ は $\ell = 1$ のときの B_{-r} の作用を表す．

この $B'_{-r}[j]$ は一般に bar involution と可換にならない．そこで，次の $B_{-r}[j]$ を考える．

定義 4.2. $B_{-r}[j]$ を

$$B_{-r}[\ell] = B'_{-r}[\ell] \quad , \quad B_{-r}[j] = B'_{-r}[j] - q^{-r}B'_{-r}[j+1], \quad (1 \leq j \leq \ell-1).$$

で定義する．

命題 4.3 ([3]). $r \in \mathbb{Z}_{>0},\ 1 \leq j \leq \ell$ とする．$u = |\boldsymbol{\lambda};\boldsymbol{s}\rangle$ が *nr-dominant* のとき，以下が成り立つ．

$$\overline{B_{-r}[j]\,u} = B_{-r}[j]\,\overline{u}.$$

上で定義した $B'_{-r}[j]$, $B_{-r}[j]$ に対し，$V'_r[j]$,$V_r[j]$, $S'_\lambda[j]$, $S_\lambda[j]$ をレベル $\ell = 1$ のときと同様に定義する．

定義 4.4.

$$V'_r[j] = \sum_{|\lambda|=r} \frac{1}{z_\lambda} B'_{-\lambda}[j] \quad , \quad V_r[j] = \sum_{|\lambda|=r} \frac{1}{z_\lambda} B_{-\lambda}[j] \quad ,$$

$$S'_\lambda[j] = \sum_\mu K^{(-1)}_{\lambda\mu} V'_\mu[j] \quad , \quad S_\lambda[j] = \sum_\mu K^{(-1)}_{\lambda\mu} V_\mu[j] \quad .$$

定義から，$V'_r[j]$ (resp. $S'_\mu[j]$) は第 j 成分に $\ell=1$ のときの V_r (resp. S_μ) を作用させるものになる．例えば，$V'_r[1](\lambda^{(1)},\lambda^{(2)})=(V_r\lambda^{(1)},\lambda^{(2)})$, $S'_\mu[2](\lambda^{(1)},\lambda^{(2)})=(\lambda^{(1)},S_\mu\lambda^{(2)})$ などとなる．特に，$V'_r[j]$ は ribbon 盤による組合せ論的表示をもつ．

本稿の主定理は $S_\lambda[j]$ を用いて述べられる．具体的に標準基底を計算するためには，$S_\lambda[j]$ を $V'_r[j]$ で表しておく必要がある．以下の補題がその明示式を与える．($S'_\lambda[j]$ は逆 Kostka 係数を用いて $V'_r[j]$ の一次結合として表すことができる.)

補題 4.5 ([3]).

$$S_\lambda[j]=\sum_{\mu,\nu}(-q^{-1})^{|\nu|}\mathrm{LR}^\lambda_{\mu\nu}\,S'_\mu[j]\,S'_{\nu'}[j+1]\quad .$$

ここで，$\mathrm{LR}^\lambda_{\mu\nu}$ は *Littlewood-Richardson* 係数で，ν' はヤング図形 ν の転置を表す．

この補題により，u が $n|\lambda|$-dominant であれば，レベル $\ell=1$ のときの計算を利用して，$S_\lambda[j]\,u$ を計算することができる．

4.2 Leclerc-Thibon の定理の高レベル化

ここで，本稿の主結果を述べる．これは，Leclerc-Thibon の定理の高レベル化となっている．

定理 4.6 ([3]). $1\le j\le\ell$, $\lambda\in\Pi$ とする．もし，$|\boldsymbol{\mu};\boldsymbol{s}\rangle$ が 0-*dominant* なら，

$$G^-((\lambda^{(1)},\cdots,\lambda^{(j)},\cdots,\lambda^{(\ell)});\boldsymbol{s})=S_{\lambda^{\check{(j)}}}[j]G^-((\lambda^{(1)},\cdots,\widetilde{\lambda^{(j)}},\cdots,\lambda^{(\ell)});\boldsymbol{s})$$

が成り立つ．

定義 4.7. $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda^{(1)},\lambda^{(2)},\cdots,\lambda^{(\ell)})\in\Pi^\ell$ を *multi partition* とする．$\widetilde{\boldsymbol{\lambda}}$, $\check{\boldsymbol{\lambda}}$, $S_{\check{\boldsymbol{\lambda}}}$ を次のように定める．

$$\widetilde{\boldsymbol{\lambda}}=(\widetilde{\lambda^{(1)}},\widetilde{\lambda^{(2)}},\cdots,\widetilde{\lambda^{(\ell)}}),\quad \check{\boldsymbol{\lambda}}=(\lambda^{\check{(1)}},\lambda^{\check{(2)}},\cdots,\lambda^{\check{(\ell)}}),$$
$$S_{\check{\boldsymbol{\lambda}}}=\prod_{i=1}^{\ell}S_{\lambda^{\check{(i)}}}[i]=S_{\lambda^{\check{(1)}}}[1]S_{\lambda^{\check{(2)}}}[2]\cdots S_{\lambda^{\check{(\ell)}}}[\ell].$$

先の定理を ℓ 回適用することにより，次を得る．

定理 4.8 ([3]). $|\boldsymbol{\lambda}; \boldsymbol{s}\rangle$ が 0-*dominant* であれば,

$$G^-(\boldsymbol{\lambda}; \boldsymbol{s}) = S_{\tilde{\boldsymbol{\lambda}}} G^-(\widetilde{\boldsymbol{\lambda}}; \boldsymbol{s}).$$

具体例をひとつ計算しておく. 以下の例では $|\boldsymbol{\lambda}; \boldsymbol{s}\rangle$ を単に $\boldsymbol{\lambda}$ と書く. また, 分割の 1 次結合の部分は, $(\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}, \lambda^{(2)}) = (\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}) + (\mu^{(1)}, \lambda^{(2)})$ などのように展開する.

例 4.9. $n, l = 2$, $\boldsymbol{\lambda} = ((2,2), \emptyset)$, $\boldsymbol{s} = (2, -2)$ とする. このとき, $|\boldsymbol{\lambda}; \boldsymbol{s}\rangle$ は 0-*dominant* で, $(2,2) = \emptyset + n(1,1)$ となる.

$$\begin{aligned}
&G^-((2,2),\emptyset) = S_{((1,1),\emptyset)}(\emptyset,\emptyset) = S_{(1,1)}[1](\emptyset,\emptyset)\\
&= (S'_{(1,1)}[1] - q^{-1}S'_{(1)}[1]S'_{(1)}[2] + q^{-2}S'_{(2)}[2])(\emptyset,\emptyset) \quad (\text{補題 } 4.5)\\
&= (S_{(1,1)}\emptyset,\emptyset) - q^{-1}(S_{(1)}\emptyset, S_{(1)}\emptyset) + q^{-2}(\emptyset, S_{(2)}\emptyset)\\
&= \Big((2,2) - q^{-1}(2,1,1) + q^{-2}(1^4), \emptyset\Big) - q^{-1}\Big((2) - q^{-1}(1,1), (2) - q^{-1}(1,1)\Big)\\
&\quad + q^{-2}\Big(\emptyset, (4) - q^{-1}(3,1) + q^{-2}(2,2)\Big)\\
&= \Big((2,2),\emptyset\Big) - q^{-1}\Big((2,1,1),\emptyset\Big) + q^{-2}\Big((1^4),\emptyset\Big) - q^{-1}\Big((2),(2)\Big) + q^{-2}\Big((2),(1,1)\Big)\\
&\quad + q^{-2}\Big((1,1),(2)\Big) - q^{-3}\Big((1,1),(1,1)\Big) + q^{-2}\Big(\emptyset,(4)\Big) - q^{-3}\Big(\emptyset,(3,1)\Big) + q^{-4}\Big(\emptyset,(2,2)\Big).
\end{aligned}$$

4.3 テンソル積定理について

前節でみたように, Leclerc-Thibon の定理は, Steinberg-Lusztig のテンソル積定理と対応している. 従って, 次のような問題が自然に考えられる.

問題 4.10. *cyclotomic v-Schur* 代数 (より一般に, *rational Cherednik* 代数) について, テンソル積定理の一般化は何か.

参考文献

[1] S.Ariki, *Graded q-Schur algebras*, mathArXiv 0903.3453 .

[2] 有木進, $A^{(1)}_{n-1}$ 型量子群の表現論と組み合わせ論, 上智大学数学講究録, No.**43**, 2000.

[3] K.Iijima, *On a higher level extension of Leclerc-Thibon product theorem in q-deformed Fock spaces*, J. Algebra, **371**, 2012, 105–131

[4] M. Jimbo, Misra, Miwa and Okado, *Combinatorics of representations of* $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}(n))$ *at* $q = 0.$, Comm. Math. Phys. , **136,** 1991 ,543–566.

[5] B.Leclerc and J.Y.Thibon, *Littlewood-Lichardson coefficients and Kazhdan-Lusztig polynomials.*

[6] P. Shan, *Crystals of Fock spaces and cyclotomic rational double affine Hecke algebras*, arXiv: 0811.4549.

[7] D.Uglov, *Canonical bases of higher-level q-deformed Fock spaces and Kazhdan-Lusztig polynomials*, Physical combinatorics,Progr. Math. , **191,** 2000 ,249–299.

[8] M.Varagnolo and E.Vasserot, *On the decomposition matrices of the quantized Schur algebra*, Duke Math. J.,**100,** 1999, no.2, 267–297.

[9] X.Yvonne, *A conjecture for q-decomposition matrices of cyclotomic v-Schur algebras*, J. Algebra, **304,** 2006,no.1, 419–456.

[10] K. Wada, *Induction and Restriction Functors for Cyclotomic q-Schur Algebras*, mathArXiv 1112.6068.