

マヤゲームと Steiner system $S(5, 6, 12)$

千葉大学大学院 理学研究科 入江 佑樹

Yuki Irie

Graduate School of Science,
Chiba University

必勝形が Steiner system となるゲームの構成法を与え、この構成法を用いてシャッフルラベリングの Steiner system $S(5, 6, 12)$ をゲームによって特徴付ける。具体的には、シャッフルラベリングは唯一の最小ラベリングであることを紹介する。なお、本稿は投稿予定の論文の予報である。

1 ヘキサッドゲーム

ヘキサッドゲームの原型であるマヤゲームについて述べた後、本研究の出発点となった、Conway と Ryba によるヘキサッドゲームの必勝形全体が $S(5, 6, 12)$ になるという結果を紹介する。

1.1 マヤゲーム (佐藤-Welter ゲーム)

マヤゲームは 2 人対戦のゲームである。ゲームの前に図 1 のように非負整数で番号づけたマス目を用意し、有限個のマス目に 1 枚のコインを置いておく。ゲームの準備はこれで完了である。ゲームのルールは、交互に 1 枚のコインを左 (小さい番号) の空き地に移動し、先にコインを動かせなくなった方が負けである。図 2 にゲームの流れの例を示す。

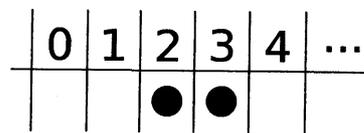


図 1 2 と 3 にコインを置いたマヤゲーム

以下、 i_1, i_2, \dots, i_k のマス目にコインが置かれている局面を集合 $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ と同一視

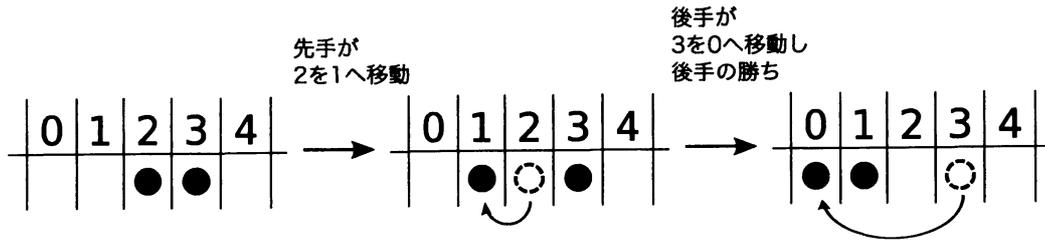
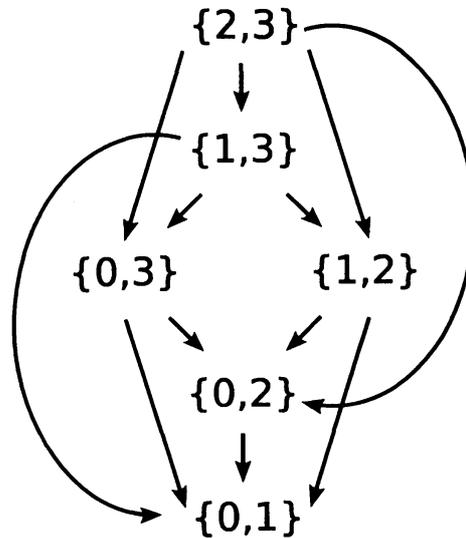


図2 ゲームの流れの例

する. 図3は $\{2,3\}$ から始めたゲームの流れ全体を表した有向グラフである. このように V を局面全体の集合, $E \subset V \times V$ を局面 u から局面 v に移ることができるとき $(u, v) \in E$ とすることで, ゲームをゲーム木と呼ばれる有向グラフ (V, E) と同一視できる.

図3 $\{2,3\}$ から始めたマヤゲームのゲーム木

マヤゲームの場合, コインを左の空き地に移すルールから, ゲーム木は有向閉路を持たない. 以下, 本稿で扱うゲームは, ゲーム木の頂点数が有限で, 有向閉路を持たないものとする. また, ゲーム $\Gamma = (V, E)$ の局面 $\alpha \in V$ に対して α の親集合を $P_\Gamma(\alpha) := \{\beta \in V \mid (\beta, \alpha) \in E\}$, α の子集合を $C_\Gamma(\alpha) := \{\beta \in V \mid (\alpha, \beta) \in E\}$ で定義する.

ここで, ゲーム木を表した図3に戻る. $\{2,3\}$ から始めた場合, 先手は $\{0,1\}$ に移動できない. さらに先手がどのような手を打っても, 後手は $\{0,1\}$ に移動できるため, 必ず後手が勝てることになる. このように, 後手が(下手な手を打たなければ)必ず勝てる局面をゲームの必勝形と呼ぶ. 図3の場合, 必勝形は $\{\{0,1\}, \{2,3\}\}$ である. なお, 2節で必勝形の求め方を述べる.

1.2 ヘキサッドゲームと $S(5, 6, 12)$

ヘキサッドゲームはマヤゲームの局面を

$$\binom{[12]}{6}_{\leq 21} := \left\{ \{a_1, \dots, a_6\} \in \binom{[12]}{6} \mid \sum_{i=1}^6 a_i \leq 21 \right\}$$

に制限したゲームである。ここで、 $[n] := \{0, 1, \dots, n-1\}$ である。グラフの言葉でいうと、 $\binom{[12]}{6}_{\leq 21}$ への誘導部分グラフである。例えば、 $\{0, 1, 2, 3, 4, 11\}$ は和が 21 のため移動できるが、 $\{0, 1, 2, 3, 4, 10\}$ は和が 20 のため移動できない。ヘキサッドゲームは、和が 21 となる局面を作った方が勝ちのため、mathematical blackjack とも呼ばれている。

このゲームが面白いのは次の性質を持つからである [1]:

定理 1.1 (Conway, Ryba). ヘキサッドゲームの必勝形全体はシャッフルラベリングの $S(5, 6, 12)$ になる。

ここでシャッフルラベリングの $S(5, 6, 12)$ とは次の反転 σ と Mongean シャッフル τ が生成する Mathieu 群 M_{12} による $\{0, 1, 2, 3, 4, 11\}$ の軌道を作る $S(5, 6, 12)$ である:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 11 & 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tau = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 11 & 9 & 7 & 5 & 3 & 1 & 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}.$$

なお、この 2 つの置換はリフルシャッフルと呼ばれるカードのシャッフルから自然に得られる。2 つの置換が M_{12} を生成することを含め、一般の枚数の場合にシャッフルが生成する群の構造が [3] で決定されている。また、定理 1.2 は当初、計算機によって示されたが、計算機に依らない証明が [5] で与えられている。ところで、シャッフルラベリングにはブロックの和の分布が図 4 に示す特徴的な形を持つという面白い性質もある [2].

さて、話をゲームに戻す。ヘキサッドゲームの必勝形全体は $S(5, 6, 12)$ になるのだが、ヘキサッドゲームの他に必勝形全体が Steiner system となるゲームは存在するのだろうか。この問の答えは「存在する」である。次節でこれを紹介する。

2 デザインからゲーム

本節では必勝形のエネルギーによる求め方を紹介した後、必勝形全体が Steiner system となるゲームの構成法とシャッフルラベリングの特徴付けを述べる。

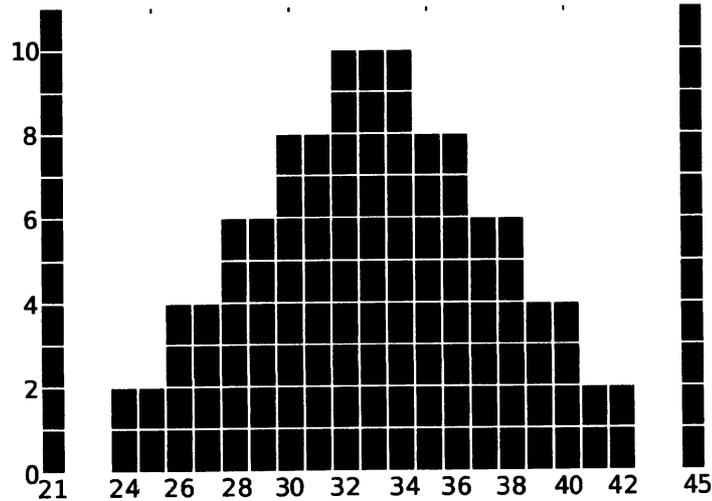


図4 シャッフルラベリングのブロックの和の分布. 和 21 と 45 のブロックはそれぞれ 11 個ずつある.

2.1 エネルギーと必勝形

ゲームの必勝形は次のエネルギーを使って表すことができる.

定義 2.1. 非負整数から成る有限集合 $B \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して, B の最小除外数 $\text{mex}(B)$ を $\min\{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid n \notin B\}$ と定義する. このときゲーム Γ の局面 α に対して α のエネルギーまたは Sprague-Grundy 数 $E(\alpha)$ を再帰的に $\text{mex}(\{E(\beta) \mid \beta \in C_{\Gamma}(\alpha)\})$ と定義する.

上の定義において, ゲーム木が閉路を持たないことから必ず $C_{\Gamma}(\alpha) = \emptyset$ となる局面があり, これらのエネルギーは $\text{mex}(\emptyset) = 0$ と定まり, そこから順にエネルギー $1, 2, \dots$ となるものが定まっていく仕組みになっている.

このとき次が成立する [4, 8]:

定理 2.2 (Sprague, Grundy). ゲームの必勝形全体は, エネルギーが 0 の局面全体に一致する.

なお, エネルギーは再帰的に定義されているが, 再帰的な計算をせずにエネルギーを求められるゲームもある. マヤゲームはその例であり, エネルギーを求める式が [7, 9] で得られている. また, より強い結果が [6] で得られている.

2.2 ゲームの構成法

$D = ([v], \mathcal{B})$ を $S(t, k, v)$, $\Gamma = (V, E)$ をマヤゲームの局面を $\binom{[v]}{k}$ に制限したゲームとしよう. このとき必勝形全体が \mathcal{B} となるゲームを次で構成できる:

命題 2.3. $L(D) := \bigcup_{\beta \in \mathcal{B}} P_{\Gamma}(\beta) \cup \mathcal{B}$ とおく. このとき, Γ を $L(D)$ に制限したゲームの必勝形全体は \mathcal{B} になる. さらに, L_D はこの性質を持つ集合の中で最大のものである. すなわち, Γ を L に制限したゲームの必勝形全体が \mathcal{B} のとき L は L_D に含まれる.

以下, Γ を $L(D)$ に制限したゲームを D が生成するゲームと呼ぶ. ここで, 上の構成法はマヤゲームに限らず, また $S(t, k, v)$ に限らず, 任意の独立集合に対して, この独立集合を必勝形とするゲームで最大のもの構成に使うことができる.

さて, 一般に同形なデザインであっても, 生成するゲームの大きさは異なり, その大きさを求めることは難しい. しかし, D が $S(1, 2, 2v)$ のときについては, 次のように生成するゲームの大きさ $|L(D)|$ を転倒数によって記述できる:

命題 2.4. $D = ([2v], \mathcal{B})$ を $S(1, 2, 2v)$ とする. $\mathcal{B} = \{\{a_1, b_1\}, \dots, \{a_v, b_v\}\}$ とし, σ を置換 $(a_1 b_1) \cdots (a_v b_v)$ とするとき, ゲームの大きさは次になる:

$$|L(D)| = \frac{\text{inv}(\sigma) - v}{2}.$$

ここで $\text{inv}(\sigma)$ は σ の転倒数を表す.

2.3 主結果

上の構成法を $S(5, 6, 12)$ の場合に用いて, 計算機によって次の結果を得た:

定理 2.5. $5040 (= [S_{12} : M_{12}])$ 個の $S(5, 6, 12)$ が生成するゲームの大きさ $|L_D|$ は 905 から 916 となり, その分布は次となる:

大きさ	905	906	907	908	909	910
D の数	1	10	42	150	351	650
大きさ	911	912	913	914	915	916
D の数	1012	1237	939	532	115	1

さらに, 905 となるものはシャッフルラベリングであり, シャッフルラベリングが生成するゲームはヘキサッドゲームである.

生成するゲームの大きさが最小となるものを最小ラベリング, 最大となるものを最大ラベリングと呼ぶことにすると, 上の定理から $S(5, 6, 12)$ の最小と最大ラベリングは唯一であるが, 一般には最小と最大ラベリングは唯一とは限らない. しかし, 場合分けを上手く行うことで次は証明できる:

定理 2.6. $t = 1, 3, 5$ に対して, $S(t, t+1, 2t+2)$ の最小と最大ラベリングは唯一である.

実は, 局面をより細かく分割すると唯一となる $S(5, 6, 12)$ のラベリングは最小と最大ラベリング以外にも存在することが分かっている. 具体的には,

$$a_i := \left| \left\{ \alpha \in \binom{[12]}{6} \setminus \mathcal{B} \mid \#(C_\Gamma(\alpha) \cap \mathcal{B}) = i \right\} \right|$$

とおくと, 次が分かる:

$$a_0 = a_6, a_1 = a_5, a_2 = a_4,$$

$$\sum_{i=1}^6 a_i = 792, \quad \sum_{i=1}^6 i(i-1)a_i = 5940.$$

ここから, a_1, a_2 を決めると他の a_i が決まることになる. ゲームの大きさは $924 - a_0$ であり, a_0 と a_1 を見ることでラベリングをより細かく分類できる. 特に, a_0 を固定したとき, a_0 が偶数ならば a_1 が最大となるラベリングは唯一であることが分かっている.

また, $k = t+1$ の場合はマヤゲームのルールのまま, $k > t+1$ の場合はルールを少し変更することで, エネルギー e となる局面の個数は $|\mathcal{B}|$ 以下になり, 特に $|\mathcal{B}|$ に一致するときは, エネルギー e 全体も Steiner system になる. 例えば, $S(5, 6, 12)$ の場合, 19 個のラベリングでエネルギー 1 も $S(5, 6, 12)$ になっている. さらに, 上に挙げた以外の Steiner system において, ゲームの大きさの分布が特徴的なものになることも分かってきており, 研究を進めている.

参考文献

- [1] J. H. Conway and N. J. A. Sloane. Lexicographic codes: Error-correcting codes from game theory. *IEEE Transactions on Information Theory*, 32(3):337–348, May 1986.
- [2] J. H. Conway and N. J. A. Sloane. *Sphere Packings, Lattices and Groups*. Springer, 3rd edition, 2010.
- [3] P. Diaconis, R. L. Graham, and W. M. Kantor. The Mathematics of Perfect Shuffles. *Advances in Applied Mathematics*, 196:175–196, 1983.
- [4] P. M. Grundy. Mathematics and games. *Eureka*, 2:6–8, 1939.

- [5] J. Kahane and A. Ryba. The hexad game. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 8(21):1–9, 2001.
- [6] 川中宣明. フック構造をもつゲームとアルゴリズム. *数学*, 63:421–441, 2011.
- [7] 榎本彦衛 (佐藤幹夫 述) . Maya game について. *数学の歩み*, 15-1:73–84, 1970.
- [8] R. P. Sprague. Über mathematische Kampfspiele. *Tohoku Mathematical Journal*, 41:438–444, 1936.
- [9] C. Welter. The theory of a class of games on a sequence of squares, in terms of the advancing operation in a special group. *Indagationes Math.*, 16:194–200, 1954.