数理解析研究所講究録
第 1877 巻 2014 年 20-28

可解 Lie 群の複素解析的誘導表現について

鳥取大学 大学教育支援機構 教育センター　井上 順子 (Junko INOUE)
Education Center, Organization for Supporting University Education,
Tottori University

1 序

複素解析的誘導表現は，複素 polarization とそれに付随するユニタリ指標から群のユニタリ表現を構成する手法であり，Auslander - Kostant [1] による，I 型可解 Lie 群の既約ユニタリ表現の構成において中心的な役割を果たした．本講究録では，指数型可解 Lie 群において，この誘導の手法から一般に得られる表現を取り扱う．即ち，weak polarization 等，一般の複素部分 Lie 環から誘導して構成される表現について，その表現が零表現でないための条件や，表現の既約分解を求める問題について，例を交えながら紹介する．

2 複素解析的誘導表現

指数型可解 Lie 群 $G = \exp \mathfrak{g}$ において，その Lie 環 $\mathfrak{g}$ の実線型形式 $f \in \mathfrak{g}^*$ をとり，f を $\mathfrak{g}$ の複素化 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 上に複素線型に拡張しておく．$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 上の反対称双線型形式 B_f を $B_f(X,Y) := f([X,Y])$ $(X,Y \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ で定める．$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の部分 Lie 環 $\mathfrak{h}$ が $f([\mathfrak{h},\mathfrak{h}]) = \{0\}$ を満たすとき，$\mathfrak{h}$ は B_f に関して等方的であるという．このとき，$\mathfrak{g}$ の部分 Lie 環 $\mathfrak{d} := \mathfrak{g} \cap \mathfrak{h}$, および，$\mathfrak{g}$ の（必ずしも部分 Lie 環とは限らない）部分空間 $\mathcal{E} := \mathfrak{g} \cap (\mathfrak{h} + \overline{\mathfrak{h}})$ を定める．

定義 1　1. $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の部分 Lie 環 $\mathfrak{h}$ が B_f に関して極大等方的，即ち，

$$f([\mathfrak{h},X]) = \{0\}, \quad X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \iff X \in \mathfrak{h} \tag{1}$$

が成り立つとき，$\mathfrak{h}$ は f における **weak polarization** であるという．

2. f における weak polarization $\mathfrak{h}$ が，条件

$$\mathfrak{h} + \overline{\mathfrak{h}} \quad \text{は } \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \text{ の部分 Lie 環である} \tag{2}$$

を満たすとき，$\mathfrak{h}$ は f における **polarization** であるという．

3. f における weak polarization $\mathfrak{h}$ が条件

$$if([X,\overline{X}]) \geq 0, \quad \forall X \in \mathfrak{h} \tag{3}$$

を満たすとき，即ち，$\mathcal{S}_f(X,Y) := iB_f(X,\overline{Y})$ が $\mathfrak{h}/\mathfrak{d}_{\mathbb{C}}$ 上の正値エルミット形式を引き起こすとき，$\mathfrak{h}$ は f における positive weak polarization であるという．

一般に，$\mathfrak{h}$ を B_f に関して等方的な部分 Lie 環とする． 部分 Lie 環 $\mathfrak{d}$ に対応する G の部分群を $D := \exp \mathfrak{d}$ とし，χ_f を D 上のユニタリ指標で $d\chi_f = if$ となるものとする．また，部分線型空間 $\mathcal{E}$ 上の実線型形式 $\delta \in \mathcal{E}^*$ で

$$\delta|_{\mathfrak{d}} = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{d}}, \quad \delta|_{\mathcal{E}\cap\mathfrak{n}} = 0 \tag{4}$$

を満たすものを 1 つとる．ただし，$\mathfrak{n}$ は $\mathfrak{g}$ の nilradical とする．また，δ も $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}$ 上に線型に拡張しておく．

組 $(\mathfrak{h}, f, \delta)$ から出発して，次のように G の表現 $\rho = \rho(\mathfrak{h}, f, \delta)$ を定義し，これを（広い意味での）複素解析的誘導表現と呼ぶことにしよう．$C^\infty(\mathfrak{h}, f, \delta)$ を次の条件 1,2,3 を満たす C^∞ 関数 ϕ の空間とする．

1.
$$\phi(gy) = \chi_f(y)^{-1}\left(\frac{\Delta_D(y)}{\Delta_G(y)}\right)^{1/2}\phi(g),\ \forall g \in G,\ \forall y \in D, \tag{5}$$
ここで Δ_G, Δ_D 　はそれぞれ G, D のモジュラー関数を表す．

2.
$$\|\phi\|^2 := \oint_{G/D} |\phi(g)|^2\, d\mu_{G/D}(g) < \infty. \tag{6}$$

3.
$$\mathcal{R}(X)\phi = (-if(X) + \delta(X))\phi, \quad \forall X \in \mathfrak{h}. \tag{7}$$
ただし，$\mathcal{R}$ は左不変ベクトル場としての $\mathfrak{g}$ の作用
$$\mathcal{R}(X)\phi(g) := \frac{d}{dt}\phi(g\exp(tX))\Big|_{t=0}, \quad X \in \mathfrak{g}$$
を $\mathfrak{h}$ に線型に拡張したものである．

このとき，内積

$$\langle\phi_1, \phi_2\rangle := \oint_{G/D} \phi_1(g)\overline{\phi_2(g)}\, d\mu_{G/D}, \qquad \phi_1, \phi_2 \in C^\infty(\mathfrak{h}, f, \delta)$$

に関して $C^\infty(\mathfrak{h}, f, \delta)$ を完備化して得られる Hilbert 空間を $\mathcal{H}(\mathfrak{h}, f, \delta)$ で表し，$\mathcal{H}(\mathfrak{h}, f, \delta)$ を表現空間とする G の表現 $\rho = \rho(\mathfrak{h}, f, \delta)$ を

$$\rho(g)\phi(x) := \phi(g^{-1}x), \quad \phi \in \mathcal{H}(\mathfrak{h}, f, \delta),\ g, x \in G$$

で定める．ρ は部分群 D の 1 次元表現 χ_f からの通常の Mackey 誘導表現 $\mathrm{ind}_D^G \chi_f$ の部分表現である．ただし，$\mathcal{H}(\mathfrak{h}, f, \delta) = \{0\}$ となる場合もあり得る．

今，$\mathcal{H}(\mathfrak{h},f,\delta) \neq \{0\}$ とし，C^∞-ベクトルの空間を $\mathcal{H}(\mathfrak{h},f,\delta)^\infty$，その反双対空間を $\mathcal{H}(\mathfrak{h},f,\delta)^{-\infty}$ で表す．$\mathcal{H}(\mathfrak{h},f,\delta)^\infty$ の反線型形式 a_ρ を

$$\mathcal{H}(\mathfrak{h},f,\delta)^\infty \ni \phi \mapsto \langle a_\rho, \phi\rangle := \overline{\phi(e)}$$

で定めると，a_ρ は $\mathcal{H}(\mathfrak{h},f,\delta)^\infty$ 上連続であり，ρ の微分表現（同じ ρ で表す）を双対性により $\mathcal{H}(\mathfrak{h},f,\delta)^{-\infty}$ に拡張すると，

$$\rho(\overline{X})a_\rho = (if(\overline{X}) + \delta(\overline{X}))a_\rho, \quad \forall X \in \mathfrak{h}$$

が成り立つ．Penney [8] により，a_ρ は，ρ の既約分解に沿って分解し，分解に現れる表現 $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ における成分 $a_\pi \in \mathcal{H}_\pi^{-\infty}$ はそれぞれ $\pi, \mathfrak{h}, f, \delta$ に対し同様の半不変性をもつ．そこで，G の各既約表現 $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ において，$(\mathfrak{h}, f, \delta)$ に関する半不変な超関数ベクトル全体の空間を

$$(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{\mathfrak{h},f,\delta} := \{a \in \mathcal{H}_\pi^{-\infty};\ \pi(\overline{X})a = (if(\overline{X}) + \delta(\overline{X}))a, \quad \forall X \in \mathfrak{h}\} \tag{8}$$

で表すと，

$$\dim(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{\mathfrak{h},f,\delta} \geq m(\pi), \qquad m(\pi) \text{ は } \rho \text{ の既約分解における } \pi \text{ の重複度} \tag{9}$$

である．これらを踏まえて，我々の問題は次のようにまとめられる．

問題

1. ρ が零表現でない，即ち $\mathcal{H}(\mathfrak{h},f,\delta) \neq \{0\}$ であるための条件を求める．
2. $\mathcal{H}(\mathfrak{h},f,\delta) \neq \{0\}$ のとき，ρ の既約分解を求める．特に，分解に現れる各既約表現 π の重複度は $(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{\mathfrak{h},f,\delta}$ の次元と一致するか？

3 既知の結果

3.1 Kirillov-Bernat 対応

よく知られているように，指数型可解 Lie 群 G のユニタリ双対は，Kirillov の軌道の方法により，G の余随伴軌道 $\mathfrak{g}^*/G$ の空間と同一視できる．この対応について，簡単に復習しておこう．$f \in \mathfrak{g}^*$ における実 polarization $\mathfrak{h}(=\mathfrak{d})$ に対して $\mathfrak{g}^*$ の affine 部分空間 $\mathfrak{h}^\perp + f := \{l \in \mathfrak{g}^*;\ l|_\mathfrak{h} = f|_\mathfrak{h}\}$ とする．指数型可解 Lie 環の場合，一般に $f \in \mathfrak{g}^*$ に対して "Pukanszky 条件"

$$\mathfrak{h}^\perp + f = \mathrm{Ad}^*(H)f, \quad H := \exp(\mathfrak{h})$$

を満たすものが存在し，誘導表現 $\pi_f = \mathrm{ind}_H^G \chi_f$ は既約で，Pukanszky 条件のもとで polarization の取り方に依らない．また，$f, l \in \mathfrak{g}^*$ に対して π_f と π_l が同値であるための必

要十分条件は f と l が同じ G 軌道に属することであり，さらに G の既約ユニタリ表現は全てこの方法で実現でき，全単射 $\mathfrak{g}^*/G \to \widehat{G}$ （Kirillov-Bernat 対応）が得られる．

3.2 一般の実 polarization の場合

一方，Pukanszky 条件を満たさない一般の実 polarization の場合，affine 部分空間 $\mathfrak{h}^\perp + f$ は H 軌道の和に分解するが，誘導表現 π_f の既約分解は，Vergne [12] の結果により次のように記述される．π_f は余随伴軌道 Ω のうち，affine 部分空間 $\mathfrak{h}^\perp + f$ との交わり $(\mathfrak{h}^\perp + f) \cap \Omega$ が $\mathfrak{h}^\perp + f$ における空でない開集合となる軌道 Ω に対応する既約表現 π_Ω の直和に分解する．π_Ω の重複度は交わり $(\mathfrak{h}^\perp + f) \cap \Omega$ に含まれる H 軌道の個数（この場合は連結成分の個数に等しい）に等しく，有限である．

3.3 複素 polarization の場合

実 polarization からの誘導表現の拡張として，複素 polarization から構成される表現については，以下のような基本的事実が知られている．まず，$\mathfrak{h}$ が複素 polarization の場合，$\mathfrak{h} + \overline{\mathfrak{h}}$ が部分 Lie 環であることから，零でない表現か否かに関しては，段階誘導により $\mathfrak{h}$ が totally complex, 即ち $\mathfrak{g}_\mathbb{C} = \mathfrak{h} + \overline{\mathfrak{h}}$ の場合を調べれば良いことに注意する．

1. $\mathfrak{g}_\mathbb{C} = \mathfrak{h} + \overline{\mathfrak{h}}$ とする．（このとき $\mathfrak{d}$ は f の固定群の Lie 環である．）このとき，通常の定義による複素解析的誘導表現 $\rho(\mathfrak{h}, f, 0)$ において，$\mathcal{H}(\mathfrak{h}, f, 0) \neq \{0\}$ であるならば，$\mathfrak{h}$ は f における positive polarization であることが知られている．（注：このことはより一般の Lie 群を対象とする設定でも成り立つ．詳しくは [10] 参照．）一方，positive polarization であることは $\mathcal{H}(\mathfrak{h}, f, 0) \neq \{0\}$ であるための十分条件ではない．必要十分条件は Rossi-Vergne [11], Fujiwara [3], Zaĭcev [13] により求められた．
2. 一般に，$\mathfrak{h}$ が（totally complex とは限らない）positive polarization とすると，$[\mathfrak{d}, \mathcal{E}] \subset \mathfrak{d}$ が成り立ち（[1], [2]），δ として $\delta = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}/\mathcal{E}}$ を用いることが出来，通常の複素解析的誘導表現 $\rho(\mathfrak{h}, f, \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}/\mathcal{E}})$ が定義される．Rossi-Vergne，Fujiwara，Zaĭcev らの結果により，$\mathfrak{h}$ が f において Pukanszky 条件 $\mathcal{E}^\perp + f = \mathrm{Ad}^*(D)f$ を満たすとすると $\rho(\mathfrak{h}, f, \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}/\mathcal{E}})$ は Kirillov-Bernat 対応で $\mathrm{Ad}^*(G)f$ に対応する既約表現と同値である．
3. 次に，$\mathfrak{h}$ が Pukanszky 条件を満たすとは限らない一般の positive polarization とする．この表現が零でないとき，Fujiwara [3] により，実 polarization に対する Vergne の結果の一般化として，ρ の既約分解が軌道の方法に基づき次のように記述された：$\rho(\mathfrak{h}, f, \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}/\mathcal{E}})$ は affine 部分空間 $\mathcal{E}^\perp + f$ との共通部分 $\Omega \cap (\mathcal{E}^\perp + f)$ が $\mathcal{E}^\perp + f$ の空でない開集合となる余随伴軌道 Ω に対応する既約表現 π_Ω の直和に分解し，重複

度はそれぞれ $\Omega\cap(\mathcal{E}^{\perp}+f)$ に含まれる D 軌道の個数 $m(\Omega)$ $(<\infty)$ に等しい：

$$\rho(\mathfrak{h}, f, \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}/\mathcal{E}}) = \sum\nolimits_{\Omega\in\Xi}^{\oplus} m(\Omega)\pi_{\Omega}. \tag{10}$$

ここで Ξ は affine 部分空間 $\mathcal{E}^{\perp}+f$ との共通部分 $\Omega\cap(\mathcal{E}^{\perp}+f)$ が $\mathcal{E}^{\perp}+f$ の空でない開集合となる余随伴軌道 Ω 全体を表す．

4. 引き続き，$\mathfrak{h}$ は f における positive polarization で，Pukanszky 条件を満たすとする．このとき，前項 2 より線型形式 $\mathrm{Tr}\,\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{d}}$ は $\mathcal{E}$ 全体で定義されるが，Penney [9] は δ として $\delta=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{d}}$ を用いた複素解析的誘導表現 $\rho(\mathfrak{h}, f, \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{d}})$ に注目し，この表現が常に零でなく，Kirillov-Bernat 対応で $\mathrm{Ad}^*(G)f$ に対応する既約表現 π_f と同値であることを示した．

3.4 冪零 Lie 群の場合

冪零 Lie 群において，条件 (2) を必ずしも満たすとは限らない複素部分 Lie 環からの誘導を最初に取り扱った研究は Magneron [6], [7] である．Magneron は，連結かつ単連結な冪零 Lie 群 $G=\exp\mathfrak{g}$ において，$\mathfrak{h}$ が $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の対合の固定点集合であるとき，$\rho(\mathfrak{h},0,0)$ が零表現でないための条件を軌道の方法に基づいて求め，$\rho(\mathfrak{h},0,0)$ が重複度自由の既約表現の直積分に分解することを示し，半不変ベクトルの空間を記述した．

4 完全可解 Lie 群における例

4.1

$\mathfrak{g}:=\mathbb{R}\ltimes\mathfrak{n}_3$ を基底 $\{T,X,Y,Z\}$,（$\mathfrak{n}_3=\mathbb{R}\text{-span}\{X,Y,Z\}$）に対し自明でない括弧積が

$$[X,Y]=Z,\quad [T,X]=X,\quad [T,Y]=Y,\quad [T,Z]=2Z$$

となる Lie 環とする．$\{T^*,X^*,Y^*,Z^*\}$ を双対基底とする．このとき，$G=\exp\mathfrak{g}$ の余随伴軌道 $\mathfrak{g}^*/G$ は

- 開軌道：εZ^*, $\varepsilon=\pm1$,

$$\Omega_+ := \mathrm{Ad}^*(G)(Z^*) = \{l\in\mathfrak{g}^*;\ l(Z)>0\}$$
$$\Omega_- := \mathrm{Ad}^*(G)(-Z^*) = \{l\in\mathfrak{g}^*;\ l(Z)<0\}$$

- 2 次元の軌道： $l_\theta := \cos\theta X^* + \sin\theta Y^*$, $0\le\theta<2\pi$,

$$\mathrm{Ad}^*(G)(\cos\theta X^*+\sin\theta Y^*) = \{sT^*+e^t l_\theta;\ s,t\in\mathbb{R}\}$$

- 1 点から成る軌道： αT^*, $\alpha\in\mathbb{R}$

である．$f := Z^*$ とし，$\mathfrak{h} := \mathbb{C}T + \mathbb{C}(X+iY)$ とすると，$\mathfrak{h}$ は f における positive weak polarization であり，$\mathfrak{d} = \mathbb{R}T$, $\mathcal{E} = \mathbb{R}\text{-span}\{T, X, Y\}$. $\mathcal{E}$ は部分 Lie 環ではない．この場合，条件 (4) を満たす $\delta \in \mathcal{E}^*$ は，$\delta = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{d}}(T)T^* = 2T^*$ ただ 1 つである．

表現 $\rho = \rho(\mathfrak{h}, f, \delta)$ を調べてみよう．まず，affine 部分空間 $\mathfrak{d}^\perp + f = \mathbb{R}X^* + \mathbb{R}Y^* + \mathbb{R}Z^*$ と 2 つの開軌道 Ω_+, Ω_-, との交わりが $\mathfrak{d}^\perp + f$ で稠密であるから，指数型可解 Lie 群の単項表現の既約分解に関する一般論（[4]）により，$\mathrm{ind}_D^G \chi_f$ は，Ω_+, Ω_- にそれぞれ対応する既約表現 π_1, π_{-1} の重複度無限の直和に分解する．そこで π_1, π_{-1} において，$(\mathfrak{h}, f, \delta)$ に関する半不変超関数ベクトルの空間を求める．εZ^* ($\varepsilon = \pm 1$) における，実 Pukanszky polarization $\mathfrak{b} := \mathbb{R}Y + \mathbb{R}Z$ をとり，$B = \exp \mathfrak{b}$ のユニタリ指標 $\chi_{\varepsilon Z^*}$ からの誘導表現 $\pi_\varepsilon := \mathrm{ind}_B^G \chi_{\varepsilon Z^*}$ として $\pi_{\pm 1}$ を実現する．対応 $\mathbb{R}^2 \ni (t, x) \mapsto \exp(tT)\exp(xX) \mod B \in G/B$ により $\mathbb{R}^2$ と G/B を同一視して表現空間 $L^2(\mathbb{R}^2)$ に実現すると，その微分表現は次のように表示される：

$$\begin{aligned}
\pi_\varepsilon(T)\psi(t,x) &= -\frac{\partial \psi}{\partial t}, \\
\pi_\varepsilon(X)\psi(t,x) &= -e^{-t}\frac{\partial \psi}{\partial x}, \\
\pi_\varepsilon(Y)\psi(t,x) &= -i\varepsilon x e^{-t}\psi(t,x), \\
\pi_\varepsilon(Z)\psi(t,x) &= i\varepsilon e^{-2t}\psi(t,x), \qquad \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2).
\end{aligned} \tag{11}$$

$a_\varepsilon \in (\mathcal{H}_{\pi_\varepsilon}^{-\infty})^{\mathfrak{h}, f, \delta}$ とすると，条件 $\pi_\varepsilon(T)a_\varepsilon = (if(T) + \delta(T))a_\varepsilon = 2a_\varepsilon$ および $\pi_\varepsilon(X - iY)a_\varepsilon = (if(X-iY) + \delta(X-iY))a_\varepsilon = 0$ は次のようになる．

$$\left(-\frac{\partial}{\partial t}\right) a_\varepsilon = 2a_\varepsilon$$
$$\left(-e^{-t}\frac{\partial}{\partial x} - \varepsilon x e^{-t}\right) a_\varepsilon = 0$$

これを満たす $\mathbb{R}^2$ 上の超関数 a_ε は，定数倍を除いて，$\mathbb{R}^2$ 上の関数 $\beta_\varepsilon(t,x) := \exp\left(-2t - \frac{\varepsilon x^2}{2}\right)$ を用いて

$$\langle a_\varepsilon, \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^2} \beta_\varepsilon(t,x)\overline{\psi(t,x)}\, dt dx, \quad \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$$

で定義されるものに限ることが分かる．さらに，π_ε の微分表現の表示 (11) から a_1 は π_1 の C^∞ ベクトルの空間上連続な反線型形式であるが，a_{-1} は π_{-1} の C^∞ ベクトルの空間上の連続反線型形式ではないことも容易にわかる．よって，

$$(\mathcal{H}_{\pi_{-1}}^{-\infty})^{\mathfrak{h}, f, \delta} = \{0\}$$
$$(\mathcal{H}_{\pi_1}^{-\infty})^{\mathfrak{h}, f, \delta} = \mathbb{C}a_1$$

であり，表現 ρ は零表現でなければ，π_1 と同値であることになる．

表現 ρ が零表現でないことと π_1 と同値であることを具体的に示す方法については，Penney [9] の totally complex polarization からの複素解析的誘導表現における導出方法を少し拡張して用いることができる．$\mathbb{R}^2$ 上のコンパクト台を持つ C^∞ 関数 ψ に対して，G 上の関数 σ_ψ を

$$\sigma_\psi(g) := \langle \psi, \pi_1(g)a_1 \rangle \quad \left(:= \overline{\langle \pi_1(g)a, \psi \rangle} \right) \quad g \in G$$

で定めると，σ_ψ が条件 (5) および (7) を満たすことは，定義から容易に分かる．Penney [9] で扱われている場合では，半不変な超関数ベクトル（[9] では Frobenius ベクトル）が実際は C^∞ ベクトルであるが，我々の例では a_1 は（即ち関数 β_1 は）$\mathcal{H}_{\pi_1}$ に属さない．しかし，対応 $\mathbb{R}^3 \ni (x,y,z) \mapsto \exp(xX)\exp(yY)\exp(zZ) \mod D \in G/D$ により $\mathbb{R}^3$ と G/D を同一視して ρ を $L^2(\mathbb{R}^3)$ に実現し直接 $\|\sigma_\psi\|$ を評価することにより，σ_ψ は G/D 上二乗可積分であり，写像 $\psi \mapsto \sigma_\psi \in \mathcal{H}(\mathfrak{h}, f, \delta)$ が $(\pi_1, L^2(\mathbb{R}^2))$ から $(\rho, \mathcal{H}(\mathfrak{h}, f, \delta))$ への intertwining 作用素を引き起こすことを示すことが出来る．

従って，$\rho(\mathfrak{h}, f, \delta) = \pi_{Z^*}$ である．また，余随伴軌道との関係について，この例で $\mathcal{E}^\perp + f = \mathbb{R}Z^*$ であるが，

$$(\mathcal{E}^\perp + f)_+ := \{ l \in \mathcal{E}^\perp + f;\ il([V, \overline{V}]) > 0, \forall V \in \mathfrak{h} \}$$

とおくと，

$$(\mathcal{E}^\perp + f) \cap \Omega_+ = \{ \zeta Z^*;\ \zeta > 0 \} = \mathrm{Ad}^*(D)Z^* = (\mathcal{E}^\perp + f)_+$$

となっている．

注意： 既に述べたように，G の 2 次元の余随伴軌道 $\mathrm{Ad}^*(G)l_\theta$ に対応する表現は $\mathrm{ind}_D^G \chi_f$ の既約分解に寄与しないため，これまでの議論で直接必要ではないが，半不変超関数ベクトルの空間を調べてみると，$\{0\}$ であることが分かる．実際，l_θ における Pukanszky polarization $\mathfrak{n} := \mathbb{R}X + \mathbb{R}Y + \mathbb{R}Z$ をとり，対応 $\mathbb{R} \ni t \mapsto \exp(tT) \mod N \in G/N$ により，Kirillov-Bernat 写像で対応する既約表現 $\pi_\theta := \mathrm{ind}_N^G \chi_{l_\theta}$ を $L^2(\mathbb{R})$ に実現すると，π_θ の微分表現は $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ に対して

$$\pi_\theta(T)\psi(t) = -\frac{d\psi}{dt}, \qquad \pi_\theta(X)\psi(t) = ie^{-t}\cos\theta \cdot \psi(t),$$
$$\pi_\theta(Y)\psi(t) = ie^{-t}\sin\theta \cdot \psi(t), \qquad \pi_\theta(Z) = 0,$$

$(\mathfrak{h}, f, \delta)$ に関する半不変性は超関数 a_θ に対して

$$-\frac{d}{dt}a_\theta = 2a_\theta, \qquad e^{-t}(i\cos\theta + \sin\theta)a_\theta = 0,$$

となり，これを満たす超関数 $a_\theta = 0$ が導かれ，$(\mathcal{H}_{\pi_\theta}^{-\infty})^{\mathfrak{h},f,\delta} = \{0\}$ である．

4.2

上記の例を一般化して，筆者は [5] で正規 j 代数を Lie 環にもつ完全可解 Lie 群のクラスで次の結果を得た．

$\mathfrak{g}$ は正規 j 代数，$G = \exp \mathfrak{g}$ とする．このとき，よく知られているように G は開軌道をもち，開軌道の和集合は $\mathfrak{g}^*$ において稠密である．開軌道全体を $\mathscr{O}$ で表す．

定理 1 [5] $\mathfrak{g}$ を正規 j 代数，$G = \exp \mathfrak{g}$, $f \in \mathfrak{g}^*$ を開余随伴軌道に属する線型形式とし，$\mathfrak{h}$ を f における positive weak polarization とする．

$$(\mathcal{E}^{\perp} + f)_+ := \{l \in \mathcal{E}^{\perp} + f;\ il([Z, \overline{Z}]) > 0, \forall Z \in \mathfrak{h}\}$$

とおき，G の開軌道 Ω に対し，

$$m(\Omega) := \# \left[\Omega \cap (\mathcal{E}^{\perp} + f)_+ / D\right] \qquad (D \text{ 軌道の個数})$$

とし，π_Ω を Kirillov-Bernat 写像により Ω に対応する既約表現とする．このとき，$\delta \in \mathcal{E}^*$ を適切に選べば，次が成り立つ：$\mathcal{H}(\mathfrak{h}, f, \delta) \neq \{0\}$ であり，ρ は $(\mathcal{E}^{\perp} + f)_+$ と交わる開軌道に対応する既約表現の直和に分解する：

$$\rho(\mathfrak{h}, f, \delta) = \sum\nolimits_{\Omega \in \mathscr{O}}^{\oplus} m(\Omega) \pi_\Omega,$$

さらに，各既約成分において，半不変な超関数ベクトルの空間の次元は重複度に等しい．

$$m(\Omega) = \dim \left((\mathcal{H}_{\pi_\Omega}^{-\infty})^{\mathfrak{h}, f, \delta} \right).$$

この結果は，positive polarization に対して知られている既約分解の記述 (10) において，affine 空間 $\mathcal{E}^{\perp} + f$ をその部分集合 $(\mathcal{E}^{\perp} + f)_+$ に置き換えて得られる形であり，weak polarization への自然な一般化とみることができる．

さらに一般のクラスの指数型可解 Lie 群における，weak polarization からの誘導については今後の課題である．

参考文献

[1] L. Auslander and B. Kostant, Polarization and unitary representations of solvable Lie groups, Invent. Math. **14** (1971), 255–354.

[2] H. Fujiwara, On unitary representations of exponential groups, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I A Math. **21** (1974), 465–471.

[3] H. Fujiwara, On holomorphically induced representations of exponential groups, Japan. J. Math. (N.S.) **4** (1978), no. 1, 109–170.

[4] H. Fujiwara, Représentations monomiales des groupes de Lie résolubles exponentiels, in *The orbit method in representation theory (Copenhagen, 1988)*, 61–84, Progr. Math., 82 Birkhäuser, Boston, Boston, MA.

[5] J. Inoue, Holomorphically induced representations of some solvable Lie groups, J. Funct. Anal. **186** (2001), no. 2, 269–328.

[6] B. Magneron, Représentations induites holomorphes des groupes de Lie nilpotents et involutions complexes, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **317** (1993), no. 1, 37–42.

[7] B. Magneron, Involutions complexes et vecteurs sphériques associés pour les groupes de Lie nilpotents réels, Astérisque No. 253 (1999), vi+118 pp.

[8] R. Penney, Abstract Plancherel theorems and a Frobenius reciprocity theorem, J. Functional Analysis **18** (1975), 177–190.

[9] R. Penney, Holomorphically induced representations of exponential Lie groups, J. Funct. Anal. **64** (1985), no. 1, 1–18.

[10] J. Rosenberg and M. Vergne, Harmonically induced representations of solvable Lie groups, J. Funct. Anal. **62** (1985), no. 1, 8–37.

[11] H. Rossi and M. Vergne, Representations of certain solvable Lie groups on Hilbert spaces of holomorphic functions and the application to the holomorphic discrete series of a semisimple Lie group, J. Functional Analysis **13** (1973), 324–389.

[12] M. Vergne, Étude de certaines représentations induites d'un groupe de Lie résoluable exponentiel, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **3** (1970), 353–384.

[13] A. A. Zaĭcev, The nontriviality of the space of a holomorphically induced representation of a solvable Lie group, Funkcional. Anal. i Priložen. **11** (1977), no. 2, 78–79.