数理解析研究所講究録
第1877巻 2014年 135-141

$(\mathfrak{g}, K)$ 加群の制限とコホモロジカル誘導

Restriction and cohomological induction of $(\mathfrak{g}, K)$-modules

東京大学カブリ数物連携宇宙研究機構 (WPI) 大島 芳樹 (Yoshiki Oshima)
Kavli IPMU (WPI), the University of Tokyo

1 $(\mathfrak{g}, K)$ 加群の定義

$(\mathfrak{g}, K)$ 加群は実簡約リー群の無限次元表現の代数的な対応物として導入されました．実簡約リー群 G に対して，$\mathfrak{g}$ を G のリー環，K をその極大コンパクト部分群とします．G の既約 admissible 表現 V が与えられたとき，V_K をその K 有限部分空間すなわち

$$V_K := \{v \in V | \, v\text{を含み，}K\text{の作用で閉じた有限次元部分空間が存在する.}\}$$

とします．すると，V_K は $\mathfrak{g}$ と K の作用を持ち下の定義にある条件をみたす $(\mathfrak{g}, K)$ 加群になります．

ここではより一般に次のような $(\mathfrak{g}, K)$ について $(\mathfrak{g}, K)$ 加群を定義します．

定義 1.1. $\mathfrak{g}$ を複素リー環，K を複素線形代数群として，K のリー環 $\mathfrak{k}$ は $\mathfrak{g}$ の部分リー環になっているとする．代数群の準同型写像 $\phi : K \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ があって次をみたすとき $(\mathfrak{g}, K)$ をペアとよぶ．

- $\phi(k)(\xi) = \mathrm{Ad}(k)(\xi) \quad (k \in K,\ \xi \in \mathfrak{k})$.
- $d\phi(\eta)(\xi) = [\eta, \xi] \quad (\eta \in \mathfrak{k},\ \xi \in \mathfrak{g})$.

ただし $d\phi$ は ϕ の微分 $d\phi : \mathfrak{k} \to \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ である．

$\mathfrak{g}$ と K はここでは複素化したものを考えています．実リー環，コンパクト群の(複素ベクトル空間への) 表現はそれぞれ複素化まで自然にのびるので $(\mathfrak{g}, K)$ 加群は複素化したペアで考えても同じものになります．一般に G を複素線形代数群，K をその部分代数群とすると，G のリー環 $\mathfrak{g}$ と K は $\phi = \mathrm{Ad}|_K$ ととるとペアになります．今回考えたいのは，結局このように現れるペアか，K をその有限被覆に置き換えたものくらいです．

ペア $(\mathfrak{g}, K)$ について $(\mathfrak{g}, K)$ 加群を次のように定義します．

定義 1.2. 複素ベクトル空間 V がリー環 $\mathfrak{g}$ の作用と K の作用をもち以下をみたすとき，V を $(\mathfrak{g}, K)$ 加群とよぶ．

- $V = V_K$.
- $\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(\exp(t\xi)v - v) = \xi v \quad (\xi \in \mathfrak{k},\ v \in V)$.

- $(\phi(k)\xi)v = k(\xi(k^{-1}(v)))\quad (k \in K,\ \xi \in \mathfrak{g},\ v \in V)$.

いま K を線形簡約代数群として

$$R(K) = \bigoplus_{\pi \in \hat{K}} \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_\pi)$$

と定義します．$\hat{K}$ は K の既約有限次元表現の同値類の集合で，V_π は π の表現空間です．積を各成分の $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_\pi)$ の積で入れると，$R(K)$ は $\mathbb{C}$ 代数になります．K のコンパクト実形を $K_{\mathbb{R}}$ とすると，$R(K)$ は $K_{\mathbb{R}}$ 上の $K_{\mathbb{R}}$ 有限関数に convolution で積を入れたものと同型です．いま K が簡約なので，$V = V_K$ となるような K の表現は既約 K 表現の直和になります．従って V には自然に左から $R(K)$ が作用します．逆に左 $R(K)$ 加群を K 表現とみなすには，単位元が恒等写像で作用するという条件に相当するものが必要です．$R(K)$ の単位元を考えようとすると全ての成分に $1 \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_\pi)$ を入れないといけませんが，有限和しか許されないので K が有限群でない限り $R(K)$ は単位元をもちません．その代わり無限和を有限和で近似していくことで列 $\{\xi_n\} \in R(K)$ をとって，任意の $S \in R(K)$ に対して十分大きな N が存在して $\xi_n S = S\xi_n = S$ $(n \geq N)$ とすることができます．左 $R(K)$ 加群 V で，任意の $v \in V$ について十分大きな N が存在して $\xi_n v = v$ $(n \geq N)$ となるようなものが，ちょうど K 表現 $V = V_K$ となることに対応します．詳しくは [2, Chapter I] を参照してください．

$U(\mathfrak{g})$ は K の随伴作用をもつので $R(K)$ 加群になります．$U(\mathfrak{g}) \otimes R(K)$ の二つの元 $\xi \otimes S, \eta \otimes T$ について $(\xi \otimes S)(\eta \otimes T) = (\xi(S\eta)) \otimes ST$ と積を入れることができます．また K のリー環の元は各 π について $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_\pi)$ の元を定めるので，$R(K)$ は両側 $\mathfrak{k}$ 加群の構造を持ちます．$U(\mathfrak{g}) \otimes R(K)$ を関係 $\xi\eta \otimes S = \xi \otimes \eta S$ $(\eta \in \mathfrak{k})$ で割って

$$R(\mathfrak{g}, K) := U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{k})} R(K)$$

と定義すると，上で定めた積は $R(\mathfrak{g}, K)$ において well-defined になることが確かめられます．$R(\mathfrak{g}, K)$ は単位元を持たない $\mathbb{C}$ 代数になり，$(\mathfrak{g}, K)$ 加群は左 $R(\mathfrak{g}, K)$ 加群で先のように単位元の近似列に関する条件をみたすものと同一視できます．

2 $(\mathfrak{g}, K)$ 加群の誘導

二つのペア $(\mathfrak{g}, K)$, $(\mathfrak{h}, M)$ について，$\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, $M \subset K$ となっていて，$(\mathfrak{g}, K)$ に対する定義 1.1 内の ϕ の制限が $(\mathfrak{h}, L)$ に対する ϕ と一致するとき，$(\mathfrak{h}, M)$ を $(\mathfrak{g}, K)$ の部分ペアとよぶことにしましょう．さらに，K と M が簡約のとき次のように $(\mathfrak{h}, M)$ 加群 V から $(\mathfrak{g}, K)$ 加群を定義します．

$$P^{\mathfrak{g},K}_{\mathfrak{h},M}(V) := R(\mathfrak{g}, K) \otimes_{R(\mathfrak{h},M)} V$$

これは $(\mathfrak{h}, M)$ 加群のなす圏から $(\mathfrak{g}, K)$ 加群のなす圏への右完全関手を定めます．また $(\mathfrak{g}, K)$ 加群の圏は projective object を十分に持つので (実際 projective resolution を具体的に構成できる ([2, §II.7]))，$P_{\mathfrak{h},M}^{\mathfrak{g},K}$ の d 次左導来関手 $(P_{\mathfrak{h},M}^{\mathfrak{g},K})_d(V)$ が定義できます．一方，Hom をつかって同様に左完全関手をつくり，そこから右導来関手で $(\mathfrak{g}, K)$ 加群を作ることもできますが，以下ではテンソルの方を使います．コホモロジーで定義されるので，この操作をコホモロジカル誘導とよぶこともあります．

この方法で構成できる表現の例を挙げましょう．$G_{\mathbb{R}}$ を実簡約リー群，$K_{\mathbb{R}}$ をその極大コンパクト部分群，$\mathfrak{g}$ を $G_{\mathbb{R}}$ のリー環の複素化，K を $K_{\mathbb{R}}$ の複素化とします．対応する Cartan involution を θ と書きます．つまり $\mathfrak{k} = \mathfrak{g}^{\theta}$ となります．さらに以下の例では，$\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ の放物型部分代数，M を K における $\mathfrak{h}$ の正規化群 $N_K(\mathfrak{h})$ の極大簡約部分群とします．

- $\operatorname{rank} \mathfrak{g} = \operatorname{rank} K$ を仮定し，また $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ の Borel 部分代数で $\theta(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$ をみたすとしましょう．このとき M は K の極大トーラスになります．1 次元 $(\mathfrak{h}, M)$ 加群 V が適当な正値性の条件をみたせば $(P_{\mathfrak{h},M}^{\mathfrak{g},K})_d(V)$ は $d \neq \frac{1}{2}(K/M)$ のとき 0 で，$d = \frac{1}{2}(K/M)$ のとき $G_{\mathbb{R}}$ の離散系列表現 (の K 有限部分) になります．

- より一般に $\mathfrak{h}$ を $\theta(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$ をみたす $\mathfrak{g}$ の放物型部分代数としましょう．この場合も 1 次元 $(\mathfrak{h}, M)$ 加群 $\mathbb{C}_\lambda$ が適当な正値性の条件をみたせば $(P_{\mathfrak{h},M}^{\mathfrak{g},K})_d(\mathbb{C}_\lambda)$ は $d \neq \frac{1}{2}(K/M)$ のとき 0 になります．$d = \frac{1}{2}(K/M)$ のときに現れる加群は $A_{\mathfrak{h}}(\lambda)$ と書かれ，Zuckerman 加群とよばれます．普通 $\mathfrak{h}$ の代わりに $\mathfrak{q}$ を使って $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ と書かれることが多いです．$A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ の定義ではパラメータの ρ シフトを行いますが，ここでは簡単のため省略しています．また $\mathfrak{q}$ の代わりにその複素共役 $\bar{\mathfrak{q}}$ から誘導した加群を $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ と書くことの方が多いです．$\mathbb{C}_\lambda$ が適当な正値性，ユニタリ性の条件をみたせば $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ は $G_{\mathbb{R}}$ の既約ユニタリ表現 (の K 有限部分) になることが Zuckerman, Vogan, Wallach により示されました．

- $P_{\mathbb{R}}$ を $G_{\mathbb{R}}$ の実放物型部分リー群とし，$\mathfrak{h}$ を $P_{\mathbb{R}}$ のリー環の複素化とします．すると $(P_{\mathfrak{h},M}^{\mathfrak{g},K})_d(V)$ は $d = 0$ のときのみ non-zero で，そのとき V から通常の放物型誘導で構成した $G_{\mathbb{R}}$ の表現 (の K 有限部分) となります．特に V が 1 次元ならば主系列表現になります．

次のような設定のもとでは誘導加群を等質空間上の $\mathcal{D}$ 加群を使って表すことができます．

設定 2.1. G を線形代数群，K, H をその部分群で K は簡約であるとする．M を $H \cap K$ の極大簡約部分群とする．$(\mathfrak{g}, K)$, $(\mathfrak{h}, M)$ をそれぞれ $G \supset K$, $H \supset M$ から定まるペアとする．

定理 2.2 ([8, Theorem 6.6])**.** 上の設定で，$Y := K/(H \cap K)$, $X := G/H$, 自然な埋め込み写像を $i : Y \to X$ とすると，$(\mathfrak{h}, H \cap K)$ 加群 V に対して

$$H^d(Y, i^{-1} i_+ \mathcal{O}_Y \otimes_{i^{-1}\mathcal{O}_X} \mathcal{V}) \simeq (P_{\mathfrak{h},M}^{\mathfrak{g},K})_{u-d}(V \otimes \wedge^{\mathrm{top}}(\mathfrak{k}/\mathfrak{m})^* \otimes \wedge^{\mathrm{top}}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})).$$

ただし，i_+ は $\mathcal{D}$ 加群としての押し出し，i^{-1} は $\mathbb{C}$ 加群としての引き戻し，$u = \dim(H \cap K) - \dim M$，$\mathcal{V}$ は V に付随した $\mathfrak{g}$ と K の作用をもつ $i^{-1}\mathcal{O}_X$ 加群です．定義は [8, Definition 3.3] を参照してください．$\mathcal{V}$ に H 加群の構造があれば，$\mathcal{V}$ として G/H 上の G 同変なベクトル束の局所切断の層をとることができます．一般には $\mathcal{V}$ は $(\mathfrak{h}, H \cap K)$ 加群なので，Y の X 内での無限小近傍上の層になります．また $\wedge^{\mathrm{top}}(\mathfrak{k}/\mathfrak{m})^*$ には，$\mathfrak{h}$ は自明に作用するとします．

この定理は $\mathfrak{h}$ が $\mathfrak{g}$ の Borel 部分代数のときに知られていた結果 ([1]) をより広い設定にしたものです．証明は本質的には [1] と同じです．

3 $(\mathfrak{g}, K)$ 加群の制限

$(\mathfrak{g}', K')$ が $(\mathfrak{g}, K)$ の部分ペアであるとき，$(\mathfrak{g}, K)$ 加群は制限によって自然に $(\mathfrak{g}', K')$ 加群とみなすことができます．$(\mathfrak{g}, K)$ 加群の制限の系統的な研究は小林先生によって初めて行われました ([5])．

定義 3.1. $(\mathfrak{g}, K)$ 加群 V が $(\mathfrak{g}', K')$ 加群として離散分解するとは，filtration $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ で $V = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$ かつ V_n が有限長 $(\mathfrak{g}', K')$ 加群となるものが存在することとする．

離散分解の仮定のもとで，群の表現の制限と $(\mathfrak{g}, K)$ 加群の制限とはぴったりと対応します．$G_{\mathbb{R}}$ を実簡約リー群，$G'_{\mathbb{R}}$ をその部分簡約リー群とします．$G_{\mathbb{R}}$, $G'_{\mathbb{R}}$ の極大コンパクト部分群 $K_{\mathbb{R}}$, $K'_{\mathbb{R}}$ を $K_{\mathbb{R}} \supset K'_{\mathbb{R}}$ となるようにとります．$G_{\mathbb{R}}$, $G'_{\mathbb{R}}$ から定まるペアをそれぞれ $(\mathfrak{g}, K)$, $(\mathfrak{g}', K')$ とします．一般に $G_{\mathbb{R}}$ の既約ユニタリ表現 π があったとき，その $G'_{\mathbb{R}}$ への制限は直積分の形で，

$$\pi|_{G'_{\mathbb{R}}} \simeq \int_{\sigma\in\widehat{G'_{\mathbb{R}}}} m(\sigma)\cdot\sigma \, \mathrm{d}\mu(\sigma), \quad m(\sigma) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}. \tag{1}$$

と一意的に分解します (Mautner)．ここで $\widehat{G'_{\mathbb{R}}}$ は $G'_{\mathbb{R}}$ の既約ユニタリ表現の同値類全体です．さて $V = \pi_K$ を π に対応する $(\mathfrak{g}, K)$ 加群として，V が $(\mathfrak{g}', K')$ 加群として離散分解すると仮定しましょう．するとユニタリ性から V は既約 $(\mathfrak{g}', K')$ 加群の直和として表せます: $V = \bigoplus_i W_i$．すると，$G'_{\mathbb{R}}$ の既約ユニタリ表現 σ_i で $(\sigma_i)_{K'} = W_i$ となるものがあり，群の表現も $\pi|_{G'_{\mathbb{R}}} = \hat{\bigoplus}_i \sigma_i$ と離散的に分解します ([6, Theorem 4.2.6])．従って $(\mathfrak{g}, K)$ 加群の離散分解の仮定があれば，群の表現の分岐則を $(\mathfrak{g}, K)$ 加群の分岐則から導くことができるということになります．

離散分解性については論文 [3, 4, 5] でいくつかの判定条件が与えられています．特に $V = A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ で $(G_{\mathbb{R}}, G'_{\mathbb{R}})$ が対称対の場合には，離散分解のための必要十分条件が知られています ([5, Theorem 4.2])．

定理 3.2. $(G_{\mathbb{R}}, G'_{\mathbb{R}}, \sigma)$ を実簡約リー群の対称対とする．$\mathfrak{q}$ を $\theta(\mathfrak{q}) = \mathfrak{q}$ をみたす $\mathfrak{g}$ の放物型部分代数とする．λ は weakly fair で $A_{\mathfrak{q}}(\lambda) \neq 0$ とする．このとき，以下は同値．

(i) $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ は $(\mathfrak{g}', K')$ 加群として離散分解する.

(ii) $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ は K'-admissible. つまり K' の任意の既約有限次元表現の重複度は有限である.

(iii) $\mathrm{Ad}(K)(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{g}^{-\theta}) \subset \mathcal{N}(\mathfrak{g}')$. ただし $\mathfrak{u}$ は $\mathfrak{q}$ の nilradical で, $\mathcal{N}(\mathfrak{g}')$ は $\mathfrak{g}'$ の nilpotent cone.

[5, Theorem 4.2] は, さらにより簡単にチェックできるルート系に関する同値条件を与えています. その条件を使って, $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)|_{(\mathfrak{g}', K')}$ が離散分解するような3つ組 $(G_{\mathbb{R}}, G'_{\mathbb{R}}, \mathfrak{q})$ の分類も得られています ([7]).

4 $(\mathfrak{g}, K)$ 加群を誘導してから制限する

実簡約リー群について表現の分岐則を考えるときには, まず大きな群の既約表現を一つとってきますが, 実簡約リー群の既約表現の大部分は放物型部分群 (または放物型部分代数) からの誘導という形で記述されています. 従ってより一般的に, 部分群から誘導してから別の部分群に制限するとどうなるのかということが問題になります. ここでは, これを $(\mathfrak{g}, K)$ 加群について考えるのですが, 記号がたくさん出てきて混乱するかもしれないので, 初めは有限群の場合に考えてみましょう.

G を有限群, H と G' を G の部分群とします. H の表現 (ρ, W) に対して誘導表現は $\mathrm{Ind}_H^G(W) = \{f : G \to W \mid f(gh) = \rho(h^{-1})f(g)\}$ と定義されます. G はこの空間に $(\pi(g)f)(g') = f(g^{-1}g')$, $(g, g' \in G)$ と作用します. $\mathrm{Ind}_H^G(W)$ の G' への制限を考えましょう. double coset $G' \backslash G / H$ の代表元を $\{g_1, \ldots, g_n\}$, すなわち $G = \coprod_{j=1}^n G' g_j H$ として, さらに $G'_j := G' \cap g_j H g_j^{-1}$ とおくと,

$$\mathrm{Ind}_H^G(W)|_{G'} = \bigoplus_{j=1}^n \mathrm{Ind}_{G'_j}^{G'}(W|_{g_j^{-1} G'_j g_j})$$

となることが容易にわかります. ここで $g_j^{-1} G'_j g_j$ と G'_j は自然に同一視しています. この式は誘導してから制限した表現を, 制限してから誘導したという形になっています.

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "\text{誘導}"] \arrow[d, "\text{制限}"'] & G \arrow[d, "\text{制限}"] \\
G'_j \arrow[r, "\text{誘導}"'] & G'
\end{tikzcd}$$

では $(\mathfrak{g}, K)$ 加群について類似のことをやりましょう. $(\mathfrak{h}, M)$ と $(\mathfrak{g}', K')$ を $(\mathfrak{g}, K)$ の2つの部分ペアとして, $(\mathfrak{h}, M)$ 加群から $(\mathfrak{g}, K)$ 加群に誘導して $(\mathfrak{g}', K')$ 加群に制限するということを考えます. まず $(\mathfrak{g}, K)$ と $(\mathfrak{h}, M)$ は設定 2.1 から定まっている

とし，K' は簡約であるとしましょう．さらに $Y := K/(H \cap K)$ の K' 軌道は有限個であると仮定します．軌道分解を $Y = \coprod_{j=1}^{n} Y_i$ とおいて，代表元 $k_1, \ldots, k_n \in K$ を $Y_j = K'k_j(H \cap K)$ となるように代表元をとります．さらに，$H'_j := G' \cap k_j H k_j^{-1}$，$M'_j$ を $K' \cap k_j H k_j^{-1}$ の極大簡約部分群とします，また

$$s := \dim K - \dim M, \qquad s_j := \dim K' - \dim M'_j$$

とおきます．

定理 4.1. 上の仮定と記号のもとで，$(\mathfrak{h}, H \cap K)$ 加群 V に対して，

$$\begin{aligned}
&\sum_d (-1)^{d+s} \big((P^{\mathfrak{g},K}_{\mathfrak{h},M})_d(V) \big) \big|_{(\mathfrak{g}',K')} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_d (-1)^{d+s_j} (P^{\mathfrak{g}',K'}_{\mathfrak{h}'_j,M'_j})_d \Big(S(\mathfrak{g}/(\mathfrak{g}' + \mathrm{Ad}(k_j)\mathfrak{h})) \otimes V|_{(\mathrm{Ad}(k_j^{-1})\mathfrak{h}'_j, k_j^{-1}M'_j k_j)} \\
&\qquad\qquad \otimes \wedge^{\mathrm{top}}(\mathfrak{k}/\mathfrak{m}) \otimes \wedge^{\mathrm{top}}(\mathfrak{k}'/\mathfrak{m}'_j)^* \Big).
\end{aligned}$$

ここでの等式は，(負の項を移行してから) 両辺の各項の filtration を適当にとって graded module をとると，同型があるという意味とする．

この式も誘導の制限を，制限の誘導で表した形になっています．

$$\begin{array}{ccc}
(\mathfrak{h}, M) & \xrightarrow{\text{誘導}} & (\mathfrak{g}, K) \\
{\scriptstyle 制限}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 制限} \\
(\mathfrak{h}'_j, M'_j) & \xrightarrow[\text{誘導}]{} & (\mathfrak{g}', K')
\end{array}$$

定理 4.1 の証明は，$\mathcal{D}$ 加群による実現を使います．定理 4.1 の左辺の誘導加群は定理 2.2 により Y 上の層として実現されます．この層を，Y の K' 軌道分解に応じて分解し，各項に再び定理 2.2 を適用して誘導加群の形にすると，定理 4.1 の右辺になります．

定理の等式を使って $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ の分岐則を求めようと思い，$(\mathfrak{g}, K)$ は実簡約リー群 $G_{\mathbb{R}}$ から定まるもの，$\mathfrak{h} = \mathfrak{q}$ は $\theta(\mathfrak{q}) = \mathfrak{q}$ をみたす $\mathfrak{g}$ の放物型部分代数とします．$(G_{\mathbb{R}}, G'_{\mathbb{R}})$ を対称対として，$G'_{\mathbb{R}}$ から $(\mathfrak{g}', K')$ を定めると，$Y := K/(H \cap K)$ の K' 軌道が有限個になるという仮定をみたします．従って定理が適用できるのですが，定理の式の右辺に現れるのは有限次元 $(\mathfrak{h}'_j, M'_j)$ 加群から誘導された加群というよくわからないものになっています．$\mathfrak{h}'_j$ が $\mathfrak{g}'$ の放物型部分代数になることもありますが，一般にはそうはなりません．実は，これを $\mathfrak{g}'$ の放物型部分代数 $\mathfrak{q}'$ の有限次元表現からの誘導という形で書き直すことができるための必要十分条件がちょうど定理 3.2 の条件 (iii) になります．離散分解性の条件があれば，さらに $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ は $\mathfrak{g}'$ の Zuckerman 加群 $A_{\mathfrak{q}'}(\lambda')$ の形の直和になるということ，分岐則の明示公式も分類を使って導くことができます ([9])．

$A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ 以外にも例えば，極小表現から誘導した加群などについても定理4.1を使って分岐則を求められる場合があります．その場合は，「極小表現の部分群への制限の分岐則」から，「極小表現から誘導された表現の部分群への制限の分岐則」がわかるということになります．

参考文献

[1] H. Hecht, D. Miličić, W. Schmid, J. A. Wolf, *Localization and standard modules for real semisimple Lie groups. I. The duality theorem*, Invent. Math. 90 (1987), 297–332.

[2] A. W. Knapp, D. Vogan, Jr., "Cohomological Induction and Unitary Representations", Princeton U.P., 1995.

[3] T. Kobayashi, *Discrete decomposability of the restriction of* $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ *with respect to reductive subgroups and its applications*, Invent. Math. **117** (1994), 181–205.

[4] T. Kobayashi, *Discrete decomposability of the restriction of* $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$, *II. — micro-local analysis and asymptotic* K*-support*, Ann. of Math. **147** (1998), 709–729.

[5] T. Kobayashi, *Discrete decomposability of the restriction of* $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$. *III. — restriction of Harish-Chandra modules and associated varieties*, Invent. Math. 131 (1998), 229–256.

[6] T. Kobayashi, *Restrictions of unitary representations of real reductive groups*, In Lie Theory: Unitary Representations and Compactifications of Symmetric Spaces (J. P. Anker and B. Ørsted, eds.), Prog. Math. 229, Birkhäuser, 2005, 139–207.

[7] T. Kobayashi, Y. Oshima, *Classification of discretely decomposable* $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ *with respect to reductive symmetric pairs*, Adv. Math. 231 (2012), no. 3-4, 2013–2047.

[8] Y. Oshima, *Localization of Cohomological Induction*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 49 (2013), no. 2, 361–391.

[9] Y. Oshima, *Discrete branching laws of Zuckerman's derived functor modules*, in preparation.