

一致曲面の Marcus 変換について

神戸大学 佐々木 武

概要

F. Marcus([Mar1]) は与えられた射影極小曲面から一連の射影極小曲面を構成する一つの方法を与えた. 得られた曲面を元の曲面の Marcus 変換と呼ぶ. アファイン球面は射影極小曲面であり, Marcus 変換はアファイン球面をアファイン球面に変換する Tzitzeica 変換の一般化になっていることが特徴的である. この変換の詳しい解説には [S] を参照.

(x, y) を変数とする曲面を z , 1 つの変換曲面を w とすると, 点 $z(x, y)$ と点 $w(x, y)$ を結ぶ直線 zw の全体は線叢を作っているが, Marcus 変換では, z での第 2 基本形式と w での第 2 基本形式が共形になっていることも特徴的である. このような線叢は Weingarten 線叢と呼ばれてきた. 一方, 初等的な曲面の間の Weingarten 線叢の具体例を挙げるのは簡単ではない. 一致曲面という初等的な曲面については [Mar2] にあるように Marcus 変換が計算できることがある. この報告は, どういう場合にうまくいくかを示すことにする. 最も簡単な場合が 2 次曲面の間の線叢でその例を次々ページに [S] から借用してのせる.

目次

1	射影曲面の記法について	2
1.1	不変量	4
1.2	射影極小曲面	4
2	Marcus 変換	5
2.1	射影極小曲面の Marcus 変換の手続き	6
3	一致曲面	7

4	射影極小一致曲面の Marcus 変換	8
4.1	v のみたす方程式	8
5	変換の例	10
5.1	Case 1: (3.2) が 4 つの異なる実根をもち, (3.4) が 2 つの実根をもつとき	10
5.2	Case 2: (3.2) が 2 つの実根と 2 つの共役根をもつとき	11
5.2.1	$\varphi = 1$ および $\psi = e^{-2(kx+y/k)}$ のとき	11
5.2.2	$\varphi = 1$ 及び $\psi = \psi_1 = e^{kx+y/k} \cos(\sqrt{3}kx + \sqrt{3}y/k)$ のとき	12
5.2.3	$\varphi = \psi_1$ 及び $\psi = \psi_2$ のとき	12
5.3	数値例	13
5.4	Case 3: (3.2) が 2 重根をもつとき	14
5.5	Case 4: (3.2) が 3 重根をもつとき	15

1 射影曲面の記法について

2次元多様体から 3次元射影空間への埋め込み

$$(x, y) \longrightarrow z(x, y) \in \mathbf{P}^3$$

を射影曲面と略称する. $z(x, y)$ を \mathbf{C}^4 (または, \mathbf{R}^4) のベクトルと考えると, (一般に, 座標をうまく選ぶと) z, z_x, z_y, z_{xy} は一次独立なベクトルとなっている. このとき, 他の 2次微分のベクトル z_{xx} と z_{yy} はこれらの 4つベクトルの一次結合としてかける:

$$z_{xx} = lz_{xy} + az_x + bz_y + pz, \quad z_{yy} = mz_{xy} + cz_x + dz_y + qz. \quad (1.1)$$

これを曲面を定める微分方程式とよぶ. 逆に, この方程式は積分可能であれば, $1 - lm \neq 0$ のとき, 4つの独立な解を持つ. それらを $z^i(x, y)$, $i = 1, \dots, 4$, とすると

$$(x, y) \longrightarrow z(x, y) = [z^1(x, y), z^2(x, y), z^3(x, y), z^4(x, y)] \in \mathbf{P}^3$$

は射影曲面になっている. 解の取り方の違いは \mathbf{P}^3 の線形変換による違いなので射影曲面としては同一と考える. 例を挙げよう.

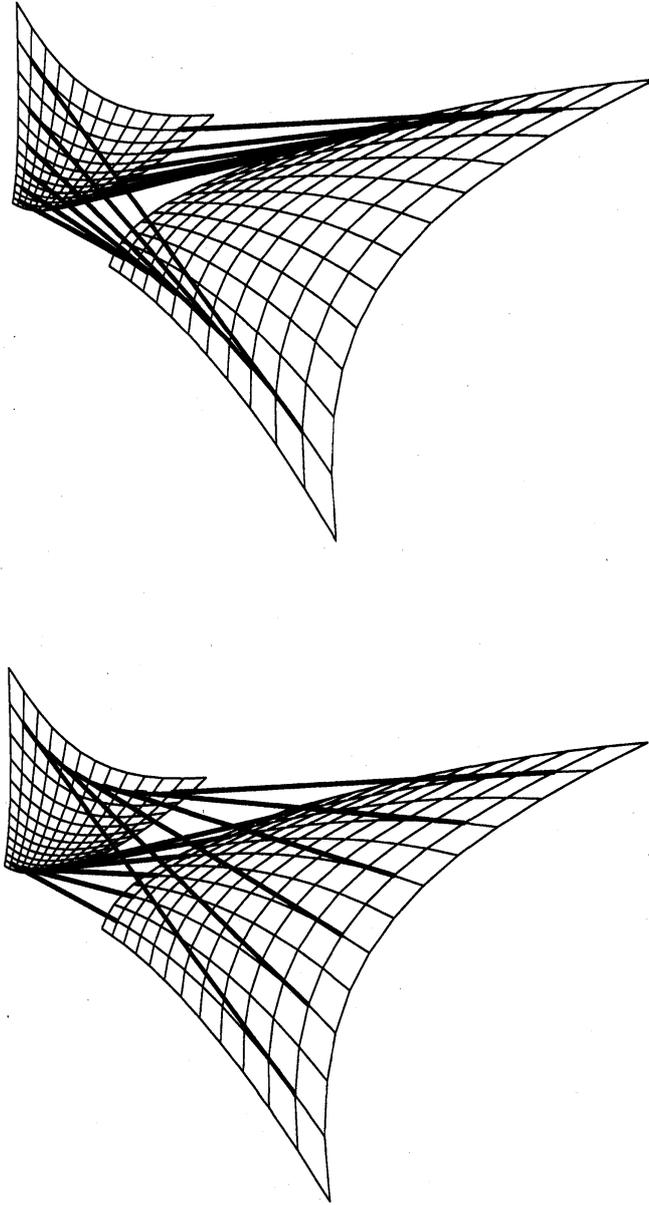


図 1: 二次曲面を結ぶ線叢

例 1. $z_{xx} = 0, z_{yy} = 0$: 基本解は $1, x, y, xy$. これから曲面は

$$z(x, y) = [1, x, y, xy]; \quad \text{二次曲面}$$

例 2. $z_{xx} = -2z_y + 3z, z_{yy} = -2z_x + 3z$: 基本解は

$$z^1 = e^{-3x-3y}, \quad z^2 = e^{x+y}, \quad z^3 = (x-y)e^{x+y}, \quad z^4 = (2(x-y)^2 - (x+y))e^{x+y}$$

であるので, $x = u/4, y = v/4$ とし, $X = z_2/z_1 = e^{u+v}, Y = 4z_3/z_1 = (u-v)e^{u+v}, Z = 4z_4/z_1 = ((u-v)^2/2 - (u+v))e^{u+v}$ とすると, 曲面は $\log X = \frac{1}{2}(Y/X)^2 - Z/X$. 座標を取り替えて, $X = e^{\frac{1}{2}Y^2 - Z}$ と表すこともできる.

1.1 不変量

曲面をユークリッド空間の曲面と見做してその第 2 基本形式を求めると, その共形クラスは $= ldx^2 + 2dxdy + mdy^2$ であることがわかる. このクラスは射影不変量になっている. この 2 次形式が非退化のとき, 曲面は非退化であるという. 以下, これを仮定する.

特に, $l = m = 0$ となる座標 (x, y) を漸近座標と呼んでいる. 非退化であれば, \mathbf{C} 上ではいつでも存在するが, \mathbf{R} 上では, 曲面 [の第 2 基本形式] が不定値であるということである.

さらに, 3 次の不変量となる面積要素がある: $l = m = 0$ のときには, $bcdxdy$ で与えられる. これから積分 $\int bcdxdy$ を曲面の射影面積と呼び, 曲面族に対する汎関数と考えると, その極値を採る曲面を考えることができる. それを射影極小曲面という.

1.2 射影極小曲面

以下, $l = m = 0$ とする. 方程式 (1.1) は

$$z_{xx} = az_x + bz_y + pz, \quad z_{yy} = cz_x + dz_y + qz,$$

となる. この方程式が積分可能である条件を求めると, 特に $a_x = d_y$ が必要であることがわかる. そこで, 変数 z を適当にスカラー倍すると $a = d = 0$ として構わないこともわかる. 以下, 方程式

$$z_{xx} = bz_y + pz, \quad z_{yy} = cz_x + qz, \quad (1.2)$$

を扱うことにする。伝統的な記法により、

$$L = -b_y - 2p, \quad M = -c_x - 2q$$

と置く。このとき、方程式 (1.2) が積分可能である条件は

$$\begin{aligned} L_y &= -2bc_x - cb_x, & M_x &= -2cb_y - bc_y, \\ bM_y + 2Mb_y + b_{yyy} &= cL_x + 2Lc_x + c_{xxx}. \end{aligned}$$

さらに、 L, M を使って方程式を

$$z_{xx} = bz_y + \left(-\frac{L}{2} - \frac{1}{2}b_y\right)z, \quad z_{yy} = cz_x + \left(-\frac{M}{2} - \frac{1}{2}c_x\right)z$$

と書くこともできる。このとき、曲面 z が射影極小である条件は

$$bM_y + 2Mb_y + b_{yyy} = 0, \quad cL_x + 2Lc_x + c_{xxx} = 0$$

であることが知られている。(積分可能条件の最後の式の両辺についての式であることに注意。)

新たにパラメータ λ を入れて変形した方程式

$$u_{xx} = \lambda bu_y + \left(-\frac{L}{2} - \frac{\lambda}{2}b_y\right)u, \quad u_{yy} = \frac{1}{\lambda}cu_x + \left(-\frac{M}{2} - \frac{1}{2\lambda}c_x\right)u \quad (1.3)$$

を後で用いる。曲面が射影極小であれば、この方程式も積分可能となっている。

2 Marcus 変換

曲面 $z(x, y)$ に対して、新しい曲面 w を

$$w = \mu z + 2Az_x + 2Bz_y,$$

によって定める。 μ, A, B は適当なスカラー関数。幾何的には、点 $w(x, y)$ が $z(x, y)$ の接平面に乗っていることを意味している。さらに、点 $z(x, y)$ が $w(x, y)$ の接平面にも乗っているとき、直線 $\overline{z(x, y)w(x, y)}$ の全体は接線叢をなす、という。さらに、点 $z(x, y)$ における第2基本形式と点 $w(x, y)$ における第2基本形式が共形であるとき、(すなわち、 z から w への対応が漸近座標を保つとき) Weingarten 線叢という。

Marcus 変換は射影極小な曲面 z から、新しい射影極小曲面 w を線叢 \overline{zw} が Weingarten になるものを作る変換である。

2.1 射影極小曲面の Marcus 変換の手続き

Marcus 変換は次の手続きで得られる.

1. $\lambda (\neq \pm 1)$ を勝手に決め, (1.3) の2つの解を φ, ψ とする.
2. $A = -\lambda(\psi\varphi_y - \varphi\psi_y), \quad B = \psi\varphi_x - \varphi\psi_x.$
3. $\mu = (\lambda + 1)(\psi_x\varphi_y - \varphi_x\psi_y) + (\lambda - 1)(\psi\varphi_{xy} - \varphi\psi_{xy}).$
4. これらから $w = \mu z + 2(Az_x + Bz_y)$ と定める.

曲面 w をみたす方程式は次の通り.

$$w_{xx} = \bar{\theta}_x w_x + \bar{b} w_y + \bar{p} w, \quad w_{yy} = \bar{c} w_x + \bar{\theta}_y w_y + \bar{q} w, \quad (2.1)$$

ここで

$$\begin{aligned} \bar{b} &= -b - \frac{B}{A}(\log N)_x, & \bar{c} &= -c - \frac{A}{B}(\log N)_y, \\ \bar{p} &= p + b_y + \frac{\Lambda}{2A}(\log N)_x, & \bar{q} &= q + c_x - \frac{\Lambda}{2B}(\log N)_y, \\ \Lambda &= -A_x + B_y, & & \\ N &= 2(\mathcal{M} - \mathcal{L}), & \bar{\theta} &= \log N, \\ \mathcal{L} &= AA_{xx} - \frac{1}{2}A_x^2 + A^2L, & \mathcal{M} &= BB_{yy} - \frac{1}{2}B_y^2 + B^2M. \end{aligned} \quad (2.2)$$

さらに, w の表現を $v = e^{-\bar{\theta}/2} w$ に変えると, v のみたす方程式はより簡単になる:

$$v_{xx} = \bar{b}v_y + \bar{\bar{p}}v, \quad v_{yy} = \bar{c}v_x + \bar{\bar{q}}v.$$

ここで

$$\bar{\bar{p}} = \bar{p} - \frac{1}{2}\bar{\theta}_{xx} + \frac{1}{4}(\bar{\theta}_x)^2 + \frac{1}{2}\bar{b}\bar{\theta}_y, \quad \bar{\bar{q}} = \bar{q} - \frac{1}{2}\bar{\theta}_{yy} + \frac{1}{4}(\bar{\theta}_y)^2 + \frac{1}{2}\bar{c}\bar{\theta}_x.$$

これらの関係から, w も射影極小であることが示される. その詳細は [S, §10, §13] を参照.

w 及び v を (共に同じ曲面を表すので) 元の曲面の Marcus 変換という.

3 一致曲面

方程式

$$z_{xx} = bz_y + (c_0x + k_1)z, \quad z_{yy} = bz_x + (c_0y + k_2)z,$$

(b, c_0, k_1, k_2 は定数) の定める曲面を一致曲面という. («一致» という名前は射影法線の定義に関わるある種の退化条件をみたすことからきている) «一致曲面が射影極小であるのは $c_0 = 0$ に限る» ことは §1 の判定条件からわかる.

以下, $c_0 = 0$ とし, $b = -2$ と正規化して

$$z_{xx} = -2z_y - c_1z, \quad z_{yy} = -2z_x - c_2z \quad (3.1)$$

を考える. この方程式を積分しよう. 最初に $z = e^{\alpha x + \beta y}$ が解になる条件は

$$\alpha^2 + 2\beta + c_1 = 0, \quad \beta^2 + 2\alpha + c_2 = 0; \quad (3.2)$$

これは

$$\alpha^4 + 2c_1\alpha^2 + 8\alpha + c_1^2 + 4c_2 = 0, \quad \beta = -\frac{1}{2}(c_1 + \alpha^2)$$

とかいてもよい. 最初の方程式の α についての判別式は

$$\Delta = c_1^2c_2^2 + 4(c_1^3 + c_2^3) + 18c_1c_2 - 27.$$

$\Delta \neq 0$ のときは, $(\alpha_i, \beta_i), i = 1, \dots, 4$, を 4 つの異なる解とし,

$$z_i = e^{\alpha_i x + \beta_i y}$$

と置くと, 曲面の埋め込みは (z_1, z_2, z_3, z_4) で与えられる. 座標 (X, Y, Z) を

$$X = \frac{z_2}{z_1}, \quad Y = \frac{z_3}{z_1}, \quad Z = \frac{z_4}{z_1},$$

と定め,

$$\gamma = \frac{\alpha_3 - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1}, \quad \delta = \frac{\alpha_4 - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1},$$

とすれば, 曲面の方程式は

$$X = Y^{\frac{1-\delta}{\gamma(\gamma-\delta)}} Z^{-\frac{1-\gamma}{\delta(\gamma-\delta)}}$$

である。

$\Delta = 0$ なら、解の重複度によりタイプの異なる曲面が得られる。実曲面を考えるときは、実根か共役根かによってタイプが変わる。例をあげると

$$X(Y^2 + Z^2) = 1, \quad Z = (a \log X + b \log Y), \quad \log X = Y^2/2 - Z$$

など。

補助的な方程式 (1.2) は

$$u_{xx} = -2\lambda u_y - c_1 u, \quad u_{yy} = -\frac{2}{\lambda} u_x - c_2 u. \quad (3.3)$$

$u = e^{\alpha x + \beta y}$ が解となるためには

$$\alpha^2 + 2\lambda\beta + c_1 = 0, \quad \beta^2 + \frac{2}{\lambda}\alpha + c_2 = 0; \quad (3.4)$$

すなわち、

$$\alpha^4 + 2c_1\alpha^2 + 8\lambda\alpha + c_1^2 + 4\lambda^2 c_2 = 0, \quad \beta = -\frac{1}{2\lambda}(c_1 + \alpha^2).$$

この場合の判別式は

$$D = \lambda^2 c_1^2 c_2^2 + 4c_1^3 + 4\lambda^4 c_2^3 + 18\lambda^2 c_1 c_2 - 27\lambda^2.$$

4 射影極小一致曲面の Marcus 変換

4.1 v のみたす方程式

関数

$$\varphi = e^{\alpha_1 x + \beta_1 y}, \quad \psi = e^{\alpha_2 x + \beta_2 y} \quad (4.1)$$

が方程式 (3.3) の 2 つの実解であるとする。このとき、「手続き」に記すスカラー関数は

$$\begin{aligned} A &= -\lambda(\beta_1 - \beta_2)U, \\ B &= (\alpha_1 - \alpha_2)U, \\ \mu &= \{(\lambda + 1)(\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2) + (\lambda - 1)(\alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2)\}U \end{aligned}$$

(ただし, $U = \varphi\psi$) であることが確かめられる. 式 (2.2) に従い計算をすすめると,

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \lambda^2\left(\frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)^2 + 2c_1\right)(\beta_1 - \beta_2)^2U^2, \\ \mathcal{M} &= \left(\frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2)^2 + 2c_2\right)(\alpha_1 - \alpha_2)^2U^2, \\ \Lambda &= \{\lambda(\beta_1 - \beta_2)(\alpha_1 + \alpha_2) + (\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 + \beta_2)\}U, \\ \bar{\theta}_x &= 2(\alpha_1 + \alpha_2), \quad \bar{\theta}_y = 2(\beta_1 + \beta_2).\end{aligned}$$

これらから,

$$\begin{aligned}\bar{b} &= -2, \quad \bar{c} = -2, \\ \bar{p} &= -c_1 - (\alpha_1 + \alpha_2)^2 + 2(\beta_1 + \beta_2), \\ \bar{q} &= -c_2 + 2(\alpha_1 + \alpha_2) - (\beta_1 + \beta_2)^2.\end{aligned}$$

特に,

$$\bar{\bar{p}} = -c_1, \quad \bar{\bar{q}} = -c_2$$

が確かめられる. すなわち, 次のことが成立する.

Proposition 4.1. 式 (3.1) の定める一致曲面 z の (4.1) による *Marcus* 変換 v は, また, 同じ方程式をみたす.

次に, 方程式 (3.4) が複素根 (α, β) をもっているとき,

$$\varphi = \operatorname{Re}(e^{\alpha x + \beta y}), \quad \psi = \operatorname{Im}(e^{\alpha x + \beta y}), \quad (4.2)$$

と実解を定める. $\alpha = a_1 + ia_2, \beta = b_1 + ib_2$ とすると (3.4) より $\lambda b_2 = -a_1 a_2$ であり

$$A = -a_1 a_2 U, \quad B = -a_2 U, \quad \mu = 2a_2(b_1 + (a_1)^2)U, \quad (4.3)$$

であることが確かめられる ($U = \varphi\psi$ とする). このとき,

$$w = 2a_2 U((b_1 + (a_1)^2)z - a_1 z_x - z_y). \quad (4.4)$$

さらに,

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= 2(a_1^2 + c_1)\lambda^2 b_2^2 U^2, & \mathcal{M} &= 2(a_2^2 + c_2)b_1^2 U^2, \\ \bar{\theta}_x &= 4a_1, & \bar{\theta}_y &= 4b_1, \\ \Lambda &= -2(a_1 b_2 = \lambda + a_2 b_1)U, \\ \bar{b} &= -2 & \bar{c} &= -2, \\ \bar{\bar{p}} &= -c_1, & \bar{\bar{q}} &= -c_2.\end{aligned}$$

が順次計算できるので,

Proposition 4.2. 式 (3.1) の定める一致曲面 z の (4.2) による *Marcus* 変換 v は, また, 同じ方程式をみたす.

ことがわかる.

以上の命題は φ と ψ が特別の場合であり, 一般の解を採ると変換 v はもはや元の方程式をみたさないことが一般的である, ことに注意しておこう.

5 変換の例

5.1 Case 1: (3.2) が4つの異なる実根をもち, (3.4) が2つの実根をもつとき

関連する解を $z_i = e^{p_i x + q_i y}$ ($1 \leq i \leq 4$) 及び $\varphi = e^{\alpha_1 x + \beta_1 y}$, $\psi = e^{\alpha_2 x + \beta_2 y}$ とする. このとき,

$$z = [z_1, z_2, z_3, z_4],$$

$$z_x = [p_1 z_1, p_2 z_2, p_3 z_3, p_4 z_4],$$

$$z_y = [q_1 z_1, q_2 z_2, q_3 z_3, q_4 z_4],$$

$$U^{-1}w = [(k_1 + p_1 k_2 + k_3 q_1)z_1, (k_1 + p_2 k_2 + k_3 q_2)z_2, \dots];$$

ただし,

$$k_1 = (\lambda + 1)(\alpha_2 \beta_1 - \alpha_1 \beta_2) + (\lambda - 1)(\alpha_1 \beta_1 - \alpha_2 \beta_2),$$

$$k_2 = -2\lambda(\beta_1 - \beta_2),$$

$$k_3 = 2(\alpha_1 - \alpha_2),$$

$$U = e^{(\alpha_1 + \alpha_2)x + (\beta_1 + \beta_2)y}.$$

である. これから, 変換

$$\{X = Y^a Z^b\} \ni z \longrightarrow w \in \{X = \text{const.} Y^a Z^b\}.$$

が得られる.

(α_i, β_i) が複素数のときは, $\alpha = a_1 + a_2 i$, $\beta = b_1 + b_2 i$ と置き, $\varphi = \psi_1 = e^{a_1 x + b_1 y} \cos(a_2 x + b_2 y)$, $\psi = \psi_2 = e^{a_1 x + b_1 y} \sin(a_2 x + b_2 y)$ とすると, 同様の変換が得られる.

5.2 Case 2:(3.2) が2つの実根と2つの共役根をもつとき

簡単のため, $c_1 = c_2 = 0$ のときを考えよう. すると (3.2) の根は $(0, 0)$, $(-2, -2)$, $(-2\omega, -2\omega^2)$, $(-2\omega^2, -2\omega)$ ($\omega = -1/2 + \sqrt{3}/2i$) である. 従って,

$$z = [1, X, Y, Z],$$

$$X = e^{-2(x+y)}, Y = e^{(x+y)} \cos \sqrt{3}(x-y), Z = e^{(x+y)} \sin \sqrt{3}(x-y),$$

及び

$$z_x = [0, -2X, Y - \sqrt{3}Z, Z + \sqrt{3}Y],$$

$$z_y = [0, -2X, Y + \sqrt{3}Z, Z - \sqrt{3}Y].$$

一方, (3.4) の根は $(0, 0)$, $(-2k, -2/k)$, $(-2k\omega, -2\omega^2/k)$, $(-2k\omega^2, -2\omega/k)$ ($\lambda = k^3$) である.

5.2.1 $\varphi = 1$ および $\psi = e^{-2(kx+y/k)}$ のとき

計算により

$$A = 2k^2\psi, \quad B = 2k\psi, \quad \mu = -4(k^3 - 1)\psi.$$

これから

$$\frac{1}{4\psi}w = [1 - k^3, cX, aY - bZ, bY + aZ],$$

ただし, $c = 1 - k^3 - 2k^2 - 2k$, $a = 1 - k^3 + k^2 + k$, $b = \sqrt{3}(k^2 - k)$.

変換 w を

$$w = [1, P, Q, R];$$

と表示することになると

$$P(Q^2 + R^2) = (1 - k^3)^{-3}c(a^2 + b^2)X(Y^2 + Z^2) = (1 - k^3)^{-3}c(a^2 + b^2)$$

である. 従って,

$$\{X(Y^2 + Z^2) = 1\} \ni z \longrightarrow w \in \{X(Y^2 + Z^2) = \text{const.}\}.$$

ここで $k \neq 0, 1$ より $b \neq 0$, 及び, もし $c(= 1 - k^3 - 2k^2 - 2k) = 0$ ならば (i.e. $k = 0.353\dots$) 曲面は退化していることに注意.

5.2.2 $\varphi = 1$ 及び $\psi = \psi_1 = e^{kx+y/k} \cos(\sqrt{3}kx + \sqrt{3}y/k)$ のとき

$\psi_2 = e^{kx+y/k} \sin(\sqrt{3}kx + \sqrt{3}y/k)$ とおけば,

$$\begin{aligned}\psi_{1x} &= k\psi_1 + \sqrt{3}k\psi_2, & \psi_{2x} &= k\psi_2 - \sqrt{3}k\psi_1, \\ \psi_{1y} &= \psi_1/k - \sqrt{3}\psi_2/k, & \psi_{2y} &= \psi_2/k + \sqrt{3}\psi_1/k.\end{aligned}$$

が確かめられるので,

$$A = k^2(\psi_1 - \sqrt{3}\psi_2), \quad B = -k(\psi_1 + \sqrt{3}\psi_2), \quad \mu = -4(\lambda - 1)\psi_1.$$

従って,

$$w = [-4(\lambda - 1)\psi_1, (a\psi_1 + b\psi_2)X, cY - dZ, dY + cZ],$$

ここで

$$\begin{aligned}a &= 4(k - k^3 + 1 - k^2), & b &= 4\sqrt{3}(k + k^2), \\ c &= -4(k^3 - 1)\psi_1 + 2k^2(\psi_1 - \sqrt{3}\psi_2) - 2k(\psi_1 + \sqrt{3}\psi_2), \\ d &= 2\sqrt{3}k^2(\psi_1 - \sqrt{3}\psi_2) + 2\sqrt{3}k(\psi_1 + \sqrt{3}\psi_2).\end{aligned}$$

$w = [1, P, Q, R]$ と表示すれば,

$$P(Q^2 + R^2) = (-4(\lambda - 1)\psi_1)^{-3}(a\psi_1 + b\psi_2)(c^2 + d^2).$$

となる。ここで、右辺は定数とはならない。すなわち、曲面 w は放物面にはのっていない。実際、 w のみたす方程式は元の方程式からはかけ離れたものになっていることが確かめられる。

5.2.3 $\varphi = \psi_1$ 及び $\psi = \psi_2$ のとき

このときは,

$$A = \sqrt{3}k^2(\psi_1^2 + \psi_2^2), \quad B = \sqrt{3}k(\psi_1^2 + \psi_2^2), \quad \mu = -2\sqrt{3}(\lambda + 1)(\psi_1^2 + \psi_2^2).$$

これらから

$$w = 2\sqrt{3}(\psi_1^2 + \psi_2^2)(-(k^3 + 1)z + k^2z_x + kz_y).$$

$w = [1, P, Q, R]$ とすると

$$P(Q^2 + R^2) = (k^3 + 1)^{-3} (k^3 + 2k^2 + 2k + 1) ((-k^3 + k^2 + k - 1)^2 + 3(k^2 - k)^2) = \text{const.}$$

従って、状況は (5.2.1) と同じ。

注意. (5.2.1) と (5.2.3) での φ, ψ の決め方は特殊である. (3.4) の解がすべて実で異なっている (3.3) の一般解は e^{ax+by} の形の解の一次結合であるので、曲面 w のみたす方程式は簡単ではない。

5.3 数値例

具体例の構成のために、パラメータ λ, c_1, c_2 の例とそれらに対する根のリストを挙げておこう。

λ	c_1	c_2	α_1	α_2	α_3	α_4
			β_1	β_2	β_3	β_4
1	-1	-1	$\sqrt{2} - 1$	$-\sqrt{2} - 1$	$1 - \sqrt{2}i$	$1 + \sqrt{2}i$
			$\sqrt{2} - 1$	$-\sqrt{2} - 1$	$1 + \sqrt{2}i$	$1 - \sqrt{2}i$
2	-1	-1	1	-3	$1 - 2i$	$1 + 2i$
			0	-2	$1 + i$	$1 - i$
3	-1	-1	$\sqrt{6} - 1$	$-\sqrt{6} - 1$	$1 + \sqrt{6}i$	$1 - \sqrt{6}i$
			$\sqrt{6}/3 - 1$	$-\sqrt{6}/3 - 1$	$1 - \sqrt{6}i/3$	$1 + \sqrt{6}i/3$
1	-4	-4	0	2	$\sqrt{5} - 1$	$-\sqrt{5} - 1$
			2	0	$\sqrt{5} - 1$	$-\sqrt{5} - 1$
1	-3	-3	1	1	1	-3
			1	1	1	-3

3	-3	-3	3	r	a	\bar{a}
			-1	s	b	\bar{b}
1	-4	-1/4	-1	-3	$2+i$	$2-i$
			3/2	-5/2	$1/2-2i$	$1/2+2i$
-1	-4	-4	0	-2	$1+\sqrt{5}$	$1-\sqrt{5}$
			-2	0	$1+\sqrt{5}$	$1-\sqrt{5}$
1	1	1	-1	-1	$1-2i$	$1+2i$
			-1	-1	$1+2i$	$1-2i$
4	1	1	$-2-i$	$-2+i$	$2-3i$	$2+3i$
			$-1/2-i/2$	$-1/2+i/2$	$1/2+3i/2$	$1/2-3i/2$
1	-5	-17/4	2	2	$-2+\sqrt{2}$	$-2+\sqrt{2}$
			1/2	1/2	$-1/2+2\sqrt{2}$	$-1/2-2\sqrt{2}$

$$r = -1 - 2^{5/3} = -4.17\dots, s = (1 - 2^{7/3} - 2^{5/3})/3 = -2.40\dots,$$

$$a = 2^{2/3} - 1 - \sqrt{3}2^{2/3}i = 0.58\dots - i2.74\dots,$$

$$b = (1 + 2^{2/3} + 2^{4/3})/3 + (2^{4/3} - 2^{2/3})i/\sqrt{3} = 1.70\dots + i0.538\dots$$

5.4 Case 3: (3.2) が2重根をもつとき

(3.2) は重根を持つとする。このとき、解は

$$z_1 = e^{\alpha_1 x + \beta_1 y}, \quad z_2 = e^{\alpha_2 x + \beta_2 y}, \quad z_3 = e^{\alpha x + \beta y}, \quad z_4 = (x - \alpha y)e^{\alpha x + \beta y},$$

となっている。ただし、

$$\alpha_1 = -\alpha + 2\sqrt{1/\alpha}, \quad \alpha_2 = -\alpha - 2\sqrt{1/\alpha}.$$

対応する曲面は $z = [z_1, z_2, z_3, z_4]$. 非同次座標を

$$X = z_2/z_1, \quad Y = z_3/z_1, \quad Z = z_4/z_1.$$

とすると、適当な定数 p, q により

$$\frac{Z}{Y} = p \log X + q \log Y$$

とかかれる。

φ と ψ が $\varphi = e^{px+qy}$ と $\psi = e^{rx+sy}$ であるとき、また、 $\varphi = e^{px+qy} \cos(rx+sy)$ と $\psi = e^{px+qy} \sin(rx+sy)$ であるとき、§5.1, §5.2.3 の計算と同様にして

$$A = aU, \quad B = bU, \quad \mu = 2cU; \quad U = \varphi\psi \quad \text{or} \quad U = \varphi^2 + \psi^2,$$

がわかる。ただし、 a, b, c は定数。従って、

$$\begin{aligned} z_x &= [\alpha_1 z_1, \alpha_2 z_2, \alpha z_3, z_3 + \alpha z_4], \\ z_y &= [\beta_1 z_1, \beta_2 z_2, \beta z_3, -\alpha z_3 + \beta z_4]. \end{aligned}$$

であるので、曲面 $w = 2U(cz + az_x + bz_y)$ は

$$[(c+a\alpha_1+b\beta_1)z_1, (c+a\alpha_2+b\beta_2)z_2, (c+a\alpha+b\beta_2)z_3, (a-b\alpha)z_3+(c+a\alpha+b\beta)z_4],$$

と表される。元曲面 z と射影的に同値である。

すなわち、今の場合対応

$$\left\{ \frac{Z}{Y} = p \log X + q \log Y \right\} \ni z \longrightarrow w \in \left\{ \frac{Z}{Y} = p \log X + q \log Y \right\}$$

が得られる。具体例は $(c_1, c_2) = (1, 1)$ または $(c_1, c_2) = (-5, -17/4)$ で与えられる；リストを参照。

5.5 Case 4: (3.2) が3重根をもつとき

特別なパラメータ $(c_1, c_2) = (-3, -3)$ を考えよう。方程式は

$$z_{xx} = -2z_y + 3z, \quad z_{yy} = -2z_x + 3z.$$

これは例2で扱ったものである。曲面は

$$\log X = \frac{1}{2} \left(\frac{Y}{X} \right)^2 - \frac{Z}{X}$$

と表される。

前節と同じように $\varphi = e^{px+qy}$, $\psi = e^{rx+sy}$ または $\varphi = e^{px+qy} \cos(rx+sy)$, $\psi = e^{px+qy} \sin(rx+sy)$ の場合に、曲面 w を求めるとそれは適当な定数 a, b, c を用いて

$$cz + az_x + bz_y$$

に同値であることがわかる.

$$\begin{aligned} z_x &= [-3z_1, z_2, z_2 + z_3, 4z_3 - z_2 + z_4], \\ z_y &= [-3z_1, z_2, -z_2 + z_3, -4z_3 - z_2 + z_4] \end{aligned}$$

であるので, 元の曲面に射影同値となる.

参考文献

- [Wil] E. J. Wilczynski, On a certain class of self-projective surfaces, Trans. AMS **14**(1931), 421–443.
- [Mar1] F. Marcus, On a result of Tzitzeica and a new asymptotic transformation of minimal projective surfaces, Czech. Math. J. **30**(1980), 213–217. Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci. (5) **65**(1979), 407–424.
- [Mar2] F. Marcus, On the \mathcal{D} -correspondence of coincidence surfaces, Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci. (5) **65**(1979), 407–424.
- [S] T. Sasaki, Line congruence and transformation of projective surfaces, Kyushu J. Math. **60**(2006), 101–243.