

負曲率のメビウスの帯のイソトピー型について

直川耕祐 (東京工業大学理工学研究科)

1 導入

$\gamma = \gamma(s) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ を 3 次元 Euclid 空間 \mathbb{R}^3 内の空間閉曲線とし, 周期を $l > 0$ とする. すなわち,

$$(1.1) \quad \gamma(s+l) = \gamma(s) \quad (s \in \mathbb{R})$$

が成り立つものとする. 以降, $\gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ($S^1 := \mathbb{R}/l\mathbb{Z}$) と表記する. 空間閉曲線 γ が正則であるとは, その微分 $\gamma'(s) := d\gamma/ds$ が S^1 上で消えないときをいう. 正則な空間閉曲線 γ が結び目であるとは, γ が自己交叉を持たないときをいう. \mathbb{R}^3 内に C^ω -結び目 (すなわち, 実解析的な結び目) γ が勝手に与えられたとする. さらに, $K = K(s) : S^1 \rightarrow (-\infty, 0)$ を負に値をとる任意の C^ω -関数とする. このとき, γ を含む負曲率の閉じた帯で, $\gamma(s)$ 上の各点における帯の Gauss 曲率がちょうど $K(s)$ に等しいものを考える. ここでは, そのような閉じた帯のイソトピー型の存在・非存在を判定する必要十分条件を報告する.

同様の問題で, 帯の Gauss 曲率が正の場合と零の (すなわち平坦な) 場合は, 既に知られている. 実際, 結び目 γ に沿う正曲率の帯は, 捻り数が γ の「自己絡み数」と呼ばれる整数値に等しいものしか存在しない (cf. Gluck-Pan [3]). 一方で, Gauss 曲率が零の場合は, Chicone-Kalton [2], Røgen [8] の研究や, 筆者の研究 [5] がある. この場合, [5] によれば, 「 γ に対して, 捻り数の限界を与えるような, ある種の値が存在し, その値以上の捻り数をもつ平坦な帯は存在するが, 小さいものは存在しない」というタイプの主張が成り立つ. 本報告は, 残りの負曲率の場合に対して, 結び目に沿う帯のトポロジーと Gauss 曲率の符号との間の関係を結びつけるものであり, これら一連の研究に

対して、一応の決着を与えるものであると考えられる。

2 例

主定理の概要を説明するために、先に具体例を挙げよう。用語の定義は、3節の前半に記載しているので、必要であれば参照してほしい。

例 1. まず、結び目 γ として、 \mathbb{R}^3 内の単位円

$$\gamma_0(s) := (\cos s, \sin s, 0) \quad (s \in \mathbb{R})$$

を含む負曲率の閉じた帯で、 γ 上の各点における帯の Gauss 曲率が $K(s) = -1$ ($s \in \mathbb{S}^1$) のものを考えよう。図 1 の 4 つの例は、すべてこの条件を満たしている。左から順に、捻り数が $-1/2, 0, 1/2, 1$ である。2 番目の図は、一葉双曲面の一部で、

$$F_0(s, u) := \gamma_0(s) + u(\sin s, -\cos s, 1) \quad (s \in \mathbb{R}, |u| < 1/5),$$

4 番目の図は、

$$F_1(s, u) = \gamma_0(s) + u(-\cos^2 s, -\cos s \sin s, \sin s) \quad (s \in \mathbb{R}, |u| < 1/5),$$

3 番目の図は、

$$F_{1/2}(s, u) = \gamma_0(s) + u\xi(s) \quad (s \in \mathbb{R}, |u| < 1/5)$$

で定義される。ただし、

$$\begin{aligned} \xi(s) &:= p(s)\mathbf{e}(s) + \cos \theta(s)\mathbf{n}(s) + \sin \theta(s)\mathbf{b}(s), \\ p(s) &:= \frac{-1 + \cos s}{2 \sin \theta(s)}, \quad \theta(s) := \frac{s + \sin s}{2} \end{aligned}$$

であり、 $\{\mathbf{e}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ は γ の Frenet 枠である。最初の図は、3 番目の図をある平面に関して折り返したものである。このような「単位円 γ を含み、且つ γ 上の Gauss 曲率が -1 」という条件を満たす負曲率の帯は、豊富に存在する。実

際、主定理の (2) により、すべての捻り数に対して、そのような負曲率の帯が存在する。すなわち、任意の捻り数 $n \in (1/2)\mathbb{Z}$ に対して、単位円 γ を含む負曲率の帯で、 γ 上の各点における帯の Gauss 曲率が $K(s) = -1$ ($s \in \mathbb{S}^1$) のものが存在する。

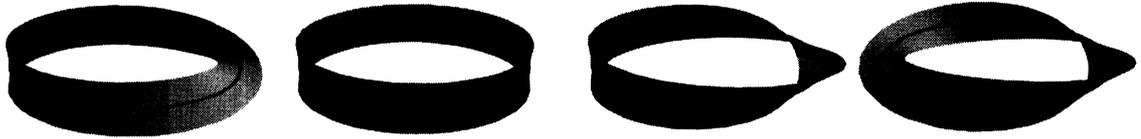


図 1 \mathbb{R}^3 内の単位円を含む負曲率の帯。単位円上の各点における帯の Gauss 曲率は -1 。

例 2. 回転トーラス上を時計回りに 5 回巻きするトーラス結び目

$$\gamma(s) := \left(\cos s - \frac{1}{10} \cos 5s, \sin s - \frac{1}{10} \cos 5s \sin s, -\frac{1}{10} \sin 5s \right)$$

に沿う負曲率の帯で、 $\gamma(s)$ 上の各点における帯の Gauss 曲率が $K(s) = -1$ ($s \in \mathbb{S}^1$) のものを考えよう。図 2 の上は γ の像であり、下 2 つは、捻り数がそれぞれ $-5, -9/2$ のものである。実は、主定理の (3) により、 -5 以上のすべての $n \in (1/2)\mathbb{Z}$ に対して、そのような負曲率の帯が存在するが、 -5 よりも小さいものは存在しないことが分かる。つまり、この場合は、イソトピー型に制約が存在する。

以上の例のように、結び目 $\gamma(s)$ と、 γ 上の負の Gauss 曲率関数 $K(s)$ の組合せによって、イソトピー型の存在・非存在の様子が異なる。主定理は、すべての実解析的な γ と K の組に対して、このことを精密に述べたものになっている。

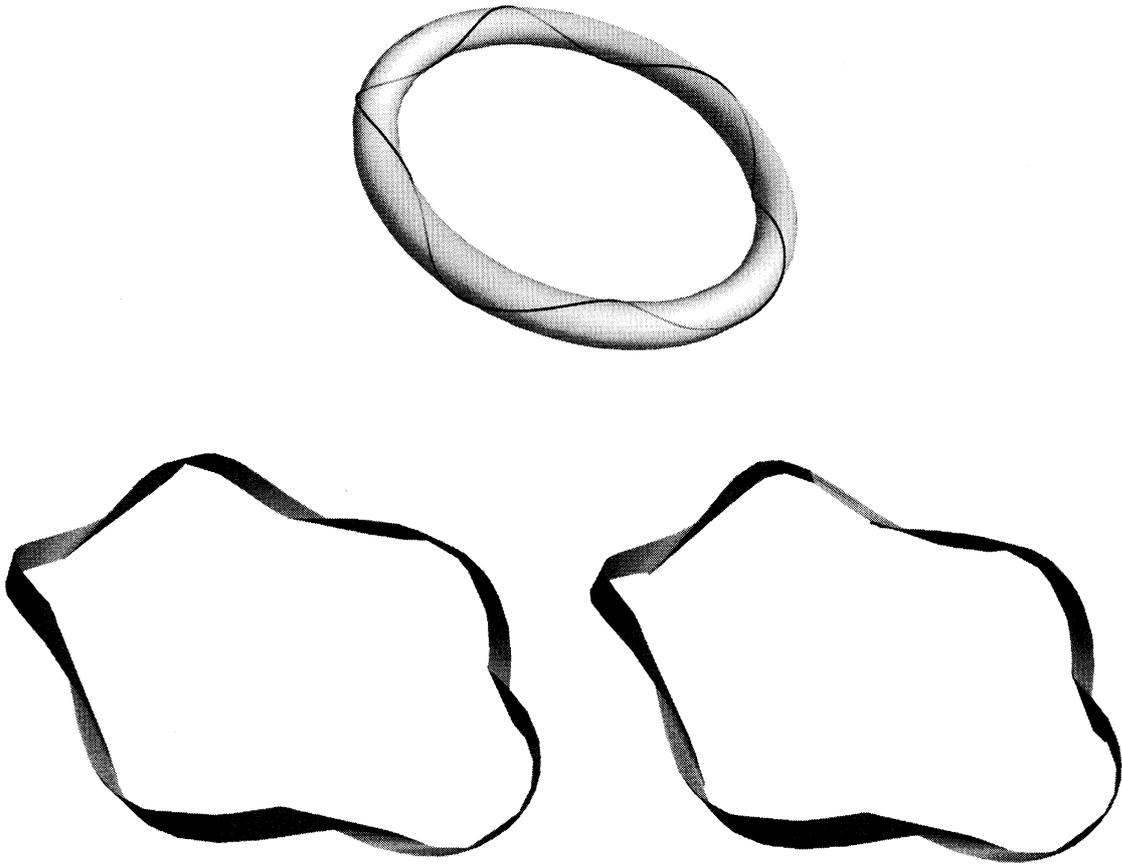


図2 最初の図は γ の像. 下2つはいずれも, γ に沿う負曲率の帯で, γ 上の各点における帯の Gauss 曲率が $K(s) = -1$ ($s \in S^1$) のもの. 下図左は, 捻り数が -5 , 右は $-9/2$ である.

3 主定理

以降, C^ω -結び目 γ のパラメータ s は弧長であるとし, (1.1) の l は γ の全弧長であるとする. さらに, γ の曲率関数 $\kappa(s) := |\gamma''(s)|$ は S^1 上で消えないものと仮定する.

まず、用語を定義する. $\epsilon > 0$ を十分小さな正数とする. $(\mathbb{R}^2; s, u)$ の s -軸近傍 $\mathbb{R} \times (-\epsilon, \epsilon)$ に対し,

$$(s, u) \sim_1 (s+l, -u) \quad (s \in \mathbb{R}, |u| < \epsilon)$$

によって生成される同値関係を \sim_1 ,

$$(s, u) \sim_2 (s+l, u) \quad (s \in \mathbb{R}, |u| < \epsilon)$$

によって生成される同値関係を \sim_2 とする. $M_i := \mathbb{R} \times (-\epsilon, \epsilon) / \sim_i$ ($i = 1, 2$) とおく. M_1 (resp. M_2) は、位相的には Möbius の帯 (resp. 向き付け可能な柱面) である. M を M_1 または M_2 とする. C^ω -埋め込み $F: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ であって、各 $s \in S^1$ に対し

$$F(s, 0) = \gamma(s)$$

となるものを γ に沿う閉じた帯という. 閉じた帯 F の像の境界を B とおく. もし M が向き付け可能ならば、 B の連結成分は 2 つで、そうでなければ 1 つである. γ に沿う帯 F の捻り数は、

$$\text{Mtn}(F) := \frac{1}{2} \text{Link}(\gamma, B) \in (1/2)\mathbb{Z}$$

で与えられる (cf. [8, Definition 3], [4]). ここで、 B には γ に同調する向きが入っているものとし、 $\text{Link}(\gamma, B)$ は、 γ と B の各連結成分との間の絡み数の総和を意味する. M が向き付け不可能であれば、捻り数 $\text{Mtn}(F)$ は半整数値をとる. また、帯の捻る方向が時計周りであれば、 $\text{Mtn}(F)$ は正の値をとる. γ に沿う閉じた帯のイソトピー型は、 γ 自身のイソトピー型と捻り数 $\text{Mtn}(F)$ によって決定される.

γ の捩率関数は、その曲率関数 $\kappa(s) := |\gamma''(s)|$ が消えない点において、

$$\tau(s) := \frac{\det(\gamma'(s), \gamma''(s), \gamma'''(s))}{\kappa(s)^2}$$

と定義される. この定義は、 \mathbb{R}^3 内のつるまき線 $\mathbb{R} \ni t \mapsto (\cos t, \sin t, t) \in \mathbb{R}^3$ の捩率関数が正となるようなものである. つまり、つるまき線が進行方向に対して時計回りであるとき、捩率関数は正である.

n を γ の主法線ベクトル場とする. 十分小さな $\epsilon > 0$ に対し, 2つの結び目 $\gamma(s), \gamma(s) + \epsilon n(s)$, ($s \in \mathbb{S}^1$) の間の絡み数を γ の自己絡み数といい, $SL(\gamma)$ で表す. 次のような結果を得た.

主定理 ([5]). $K = K(s) : \mathbb{S}^1 \rightarrow (-\infty, 0)$ を負の値をとる C^ω -関数とする.

$$b_K^-(s) := -\tau(s) - \sqrt{|K(s)|}, \quad b_K^+(s) := -\tau(s) + \sqrt{|K(s)|} \quad (s \in \mathbb{S}^1)$$

とおき, $b_K^-(s)$ の最小値 (resp. b_K^+ の最大値) を B_K^- (resp. B_K^+) とおく. 開区間 I_K を

$$I_K := (B_K^-, B_K^+)$$

とおく. このとき, 次が成り立つ.

- (1) $I_K \subset (0, \infty)$ ならば, 任意の $n \geq SL(\gamma)$ ($n \in (1/2)\mathbb{Z}$) に対し, γ に沿う C^ω 級の閉じた帯 F で, $\gamma(s)$ 上の各点における F の Gauss 曲率が $K(s)$, 捻り数が n の帯が存在する. 一方, 任意の $n < SL(\gamma)$ に対し, そのような帯は存在しない.
- (2) $0 \in I_K$ ならば, 任意の $n \in (1/2)\mathbb{Z}$ に対し, γ に沿う C^ω 級の閉じた帯 F で, $\gamma(s)$ 上の各点における F の Gauss 曲率が $K(s)$, 捻り数が n の帯が存在する.
- (3) $I_K \subset (-\infty, 0)$ ならば, 任意の $n \leq SL(\gamma)$ ($n \in (1/2)\mathbb{Z}$) に対し, γ に沿う C^ω 級の閉じた帯 F で, $\gamma(s)$ 上の各点における F の Gauss 曲率が $K(s)$, 捻り数が n の帯が存在する. 一方, 任意の $n > SL(\gamma)$ に対し, そのような帯は存在しない.

すべての γ と K の組に対して, $I_K \subset (0, \infty)$, $0 \in I_K$, $I_K \subset (-\infty, 0)$ のいずれか1つの条件を満たすので, 主定理は必要十分条件を与えていることに注意する.

4 証明の概要

主定理の証明の概要を述べる. $F = F(s, u) : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ を γ に沿う閉じた帯とする. このとき, γ に沿う C^ω -ベクトル場 $\xi(s)$ と F に沿う C^ω -ベクトル場 $\eta(s, u)$ を用いて,

$$(4.1) \quad F(s, u) = \gamma(s) + u\xi(s) + u^2\eta(s, u) \quad (s \in \mathbb{R}, |u| < \epsilon)$$

という形に書くことができる. 「帯 F が閉じる」という周期条件は, $M = M_1$ (resp. $M = M_2$) のとき,

$$\begin{aligned} \xi(s+l) &= -\xi(s), \quad \eta(s+l, u) = \eta(s, -u) & (s \in \mathbb{R}, |u| < \epsilon) \\ \left(\text{resp. } \xi(s+l) &= \xi(s), \quad \eta(s+l, u) = \eta(s, u) \right. & (s \in \mathbb{R}, |u| < \epsilon) \end{aligned}$$

と同値である. 十分小さな $\epsilon > 0$ に対し $F(s, u)$ が埋め込みとなっているという条件は,

$$(4.2) \quad \gamma'(s) \times \xi(s) \neq 0 \quad (s \in \mathbb{R})$$

と同値である. ただし, \times は \mathbb{R}^3 のベクトル積を表す.

γ に沿う閉じた帯 F が, (4.1) の形で与えられたとする. さらに, (4.2) により, 座標の取り換えによって, 一般性を失わずに, $\xi(s)$ は

$$(4.3) \quad |\gamma'(s) \times \xi(s)| = 1 \quad (s \in \mathbb{R})$$

と正規化されていると仮定してよい. 以上の設定の下で, $\gamma(s)$ の各点における F の Gauss 曲率 $K(s)$ は,

$$(4.4) \quad K = 2 \det(\gamma', \xi, \gamma'') \det(\gamma', \xi, \eta_0) - \det(\gamma', \xi, \xi')^2$$

と計算できる. ただし, $\eta_0(s) := \eta(s, 0)$ ($s \in \mathbb{R}$) である. 次に, (4.3) により, $\xi(s)$ を γ の Frenet 枠 $\{e, n, b\}$ の一次結合として,

$$(4.5) \quad \xi(s) = p(s)e(s) + \cos \theta(s)n(s) + \sin \theta(s)b(s)$$

という形で表す. ただし, $p(s), \theta(s)$ は C^ω -関数であり, ある $m \in \mathbb{Z}$ に対して,

$$(4.6) \quad p(s+l) = (-1)^m p(s), \quad \theta(s+l) = \theta(s) + m\pi$$

を満たすものである. このときの m は, 閉じた帯の捻り数 $\text{Mtn}(F)$ と m との間に成り立つ等式

$$(4.7) \quad \text{Mtn}(F) = \text{SL}(\gamma) + \frac{m}{2}$$

から計算できる. (4.5) を用いて (4.4) の右辺を計算すると,

$$(4.8) \quad K = -q\kappa \sin \theta - (\theta' - p\kappa \sin \theta + \tau)^2$$

となる. ただし,

$$(4.9) \quad q(s) := 2 \det(\gamma'(s), \xi(s), \eta_0(s))$$

とおいた.

逆に, C^ω -関数 $K = K(s) : \mathbb{S}^1 \rightarrow (-\infty, 0)$ と $n \in (1/2)\mathbb{Z}$ が勝手に与えられたとしよう. まず, $m := 2(n - \text{SL}(\gamma)) \in \mathbb{Z}$ とおくと, (4.7) を満たす. 次に, C^ω -関数 $p(s), q(s), \theta(s)$ で, 等式 (4.6) と

$$(4.10) \quad q(s)\kappa(s) \sin \theta(s) + K(s) \leq 0 \quad (s \in \mathbb{R})$$

を満たし, 且つ, 各 $s \in \mathbb{R}$ に対して,

$$(4.11) \quad \theta'(s) = p(s)\kappa(s) \sin \theta(s) - \tau(s) + \sqrt{|q(s)\kappa(s) \sin \theta(s) + K(s)|}$$

または

$$(4.12) \quad \theta'(s) = p(s)\kappa(s) \sin \theta(s) - \tau(s) - \sqrt{|q(s)\kappa(s) \sin \theta(s) + K(s)|}$$

のどちらか一方の等式を満たすものが存在したとしよう. このとき, (4.5) で $\xi(s)$ を定め,

$$\eta(s, u) := \frac{q(s)}{2} \gamma'(s) \times \xi(s) \quad (s \in \mathbb{S}^1, |u| < \epsilon)$$

とおくと、等式 (4.8) と (4.9) を満たす。すると、(4.1) で定義される F は、捻り数が n の $\gamma(s)$ に沿う閉じた帯で、 $\gamma(s)$ 上の各点における Gauss 曲率が $K(s)$ となる。つまり、負の値をとる C^ω -関数 K に対し、(4.6), (4.10), (4.11) (または (4.12)) を満たすような C^ω -関数 $p(s), \theta(s), q(s)$ の存在・非存在に帰着される。

その「存在」の証明のために、任意に指定された複数の点におけるジェットを固定しながら、 C^∞ -関数を Fourier 多項式で近似するというテクニカルな手法を用いた。これは、筆者が [6] で得た方法であり、幸いにして、負曲率の閉じた帯に対しても有効であった。

5 擬球的曲面のイソトピー型

Gauss 曲率が負で一定の曲面を擬球的曲面という。主定理のような問題を考える理由の一つとして、勝手に与えられた結び目 γ を含む擬球的曲面のイソトピー型の存在・非存在を決定したいということがある。すなわち、次のような問題である。

問題. \mathbb{R}^3 内の結び目 γ を含む擬球的な閉じた帯で、捻り数が $n \in (1/2)\mathbb{Z}$ のものは存在するか。

このような問題に対し、最近、Brander-Svensson [1] が、可積分系のループ群の手法を用いて、曲率関数が至るところ消えない任意に与えられた結び目 γ に対し、 γ に沿う負定曲率の閉じた帯が存在することを示した。彼らの構成法から得られる負定曲率の帯は、捻り数 n が自己絡み数 $SL(\gamma)$ に等しい向き付け可能な帯である。つまり、 $n = SL(\gamma)$ に対しては、上の問題の答えは「Yes」である。一方で、主定理により、与えられた結び目に沿う擬球的曲面の実現可能なイソトピー型が制限されることがわかる。実際、主定理の (1) および (3) の非存在の主張から、次が成り立つ。

系 3. K を負の定数とし、開区間 I_K を主定理のように定める。もし $I_K \subset (0, \infty)$ かつ $n < SL(\gamma)$ が成り立つならば、負定曲率 K の γ に沿う C^ω 級の

擬球的な閉じた帯で，捻り数が n のものは存在しない． $I_K \subset (-\infty, 0)$ かつ $n > \text{SL}(\gamma)$ のときも，同様に存在しない．

つまり， $I_K \subset (0, \infty)$ かつ $n < \text{SL}(\gamma)$ (resp. $I_K \subset (-\infty, 0)$ かつ $n > \text{SL}(\gamma)$) のときは，上の問題の答えは「No」である．一方，他の γ と n に対する問題の答えの正否については，筆者は分からない．特に， n を半整数値 ($\pm 1/2, \pm 3/2, \pm 5/2, \dots$) に限定すると「 γ を含む負定曲率の Möbius の帯が存在するか」という問題になる．問題の正否については，今後の課題である．

参考文献

- [1] D. Brander and M. Svensson: *The geometric Cauchy problem for surfaces with Lorentzian harmonic Gauss maps*, *J. Diff. Geom.* **93** (2013), 37–66.
- [2] C. Chicone and N. J. Kalton: *Flat embeddings of the Möbius strip in \mathbb{R}^3* , *Commun. Appl. Nonlinear Anal.* **9** (2002), 31–50.
- [3] H. Gluck and L.-H. Pan: *Embedding and knotting of positive curvature surfaces in 3-space*, *Topology* **37** (1998), 851–873.
- [4] Y. Kurono and M. Umehara: *Flat Möbius strips of given isotopy type in R^3 whose centerlines are geodesics or lines of curvature*, *Geom. Dedicata* **134** (2008), 109–130.
- [5] K. Naokawa: *Extrinsically flat Möbius strips on given knots in 3-dimensional spaceforms*, *Tohoku Math. J.* **65** (2013), 341–356.
- [6] K. Naokawa: *Negatively curved Möbius strips on given knots*, *J. Knot Theory Ramifications* **22** (2013), 1350023, 12 pp.
- [7] W. F. Pohl: *The self-linking number of a closed space curve*, *J. Math. Mech.* **17** (1968), 975–985.
- [8] P. Røgen: *Embedding and knotting of flat compact surfaces in 3-space*, *Comment. Math. Helv.* **76** (2001), 589–606.