

# ミニマルクエット乱流に見られる再生サイクルの軌道不安定性について Orbital instability of the regeneration cycle in minimal Couette turbulence

犬伏正信\*, 竹広真一†, 山田道夫‡

京都大学 数理解析研究所

Masanobu Inubushi, Shin-ichi Takehiro and, Michio Yamada  
Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University

## 1 はじめに

乱流を理解するアプローチの一つとして、力学系理論の概念や道具を用いて乱流現象を特徴付ける研究がなされている。ここでは、乱流をカオス力学系として捉え、カオスの代表的性質の一つである軌道不安定性（初期条件に対する鋭敏な依存性）を調べることで乱流を特徴付ける。特に、近年 Ginelli *et al.* (2007) によって開発された共変リアプノフ解析 [1] を用いてカオスの軌道不安定性を調べる。この解析法を用いることにより、リアプノフ指数を与える振動ベクトルであるリアプノフベクトルを計算することが可能になった。後述のようにリアプノフベクトルは軌道に沿った安定/不安定方向を指し示すものであり、乱流の物理的理解に役立つ可能性がある。

本研究では物理学・工学的に重要な乱流である壁乱流を調べる。壁乱流を生成する物理機構を理解するために、Hamilton *et al.* (1995) は壁乱流の典型例であるクエット乱流 (Fig.1 参照) が観測される最小の周期箱サイズ（ミニマルクエット乱流）を 3 次元非圧縮性ナビエ-ストークス方程式の直接数値計算を用いて調べた [2]。その結果彼らは、ミニマルクエット乱流において‘ストリーク’などの coherent structure の崩壊・形成を繰り返す再帰的な現象（regeneration cycle）を見出した。ストリークとは、流れ方向速度の低速/高速領域が筋状に並んだ構造をいう。さらに Hamilton *et al.* (1995) は regeneration cycle を説明するために ‘self-sustaining process (SSP)’ と呼ばれる物理機構を提案した。この物理機構は多くの研究者によって調べられているが、モデル化による説明や現象論的な説明が主であり、ナビエ-ストークス方程式に立脚した説明はほとんどなされていない。本研究ではナビエ-ストークス方程式の解の軌道不安定性を調べることで、ミニマルクエット乱流における regeneration cycle の物理機構を共変リアプノフ解析を用いて特徴付ける。

## 2 問題設定及び数値計算法

クエット乱流は 3 次元非圧縮性ナビエ-ストークス方程式

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

\* E-mail : minubush@kurims.kyoto-u.ac.jp

† E-mail : takepiro@gfd-dennou.org

‡ E-mail : yamada@kurims.kyoto-u.ac.jp

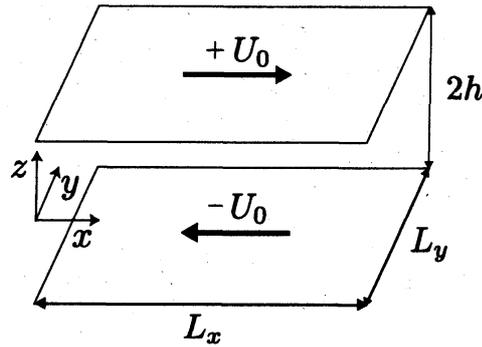


Fig.1 Illustration of the plane Couette flow system.  $x, y, z$ -directions are referred to as streamwise, spanwise, wall-normal directions, respectively.

によって記述される平行平板間の乱流である。ここで  $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ ,  $p$  はそれぞれ  $(x, y, z) \in [0, L_x] \times [0, L_y] \times [-1, 1]$  で定義された無次元化された速度場, 圧力場である。長さの無次元化には平行平板間距離の半分  $h$ , 速度には平行平板の速度差の半分  $U_0$ , 圧力には  $U_0^2 \rho$  を用いた ( $\rho$  は流体の密度)。境界条件は壁面上で non-slip, 水平方向 ( $x$ - $y$ ) は周期境界条件とした。また, 流れ ( $x$ -) 方向のフラックスおよびスパン ( $y$ -) 方向の平均圧力勾配はそれぞれゼロとした。流れ場をトロイダル・ポロイダルポテンシャルに分解し, その時間発展を数値的に計算した。計算領域はミニマルサイズである  $L_x = 1.755\pi, L_y = 1.2\pi$  であり, レイノルズ数は  $Re = 400$  とした。ポテンシャルを水平方向にはフーリエ展開し, 壁垂直方向にはチェビシェフ展開した:  $\psi(x, y, z) = \sum_{k=-KM}^{KM} \sum_{l=-LM}^{LM} \sum_{m=0}^{MM} \hat{\psi}_{(k,l,m)} e^{i(\alpha kx + \beta ly)} T_m(z)$ 。ここで  $\alpha = 2\pi/L_x$ ,  $\beta = 2\pi/L_y$  は流れ方向とスパン方向の基本波数である。切断波数は  $KM = 8, LM = 8, MM = 32$  とした。力学系の次元  $N$  は  $N = 19074$  である。

力学系  $f^t: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  ( $t \in \mathbb{R}$ ) を考え, 状態点  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^N$  の発展を  $\mathbf{x}(t) = f^t \mathbf{x}(0)$  と書く。軌道上の点  $\mathbf{x}(t)$  に加えられた無限小摂動ベクトル  $\mathbf{u}^{(j)}(t)$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ) の発展は線形化方程式  $\mathbf{u}^{(j)}(t) = Df^t \mathbf{u}^{(j)}(0)$  に従う。ここで  $Df^t$  は  $N \times N$  のヤコビ行列である。 $j$  番目のリャプノフ指数  $\lambda_j$  ( $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N$ ) は

$$\lambda_j = \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \|Df^T \mathbf{u}^{(j)}(0)\|, \quad (3)$$

と定義され,  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\}$  はリャプノフスペクトルと呼ばれる。また, 摂動ベクトル  $\mathbf{u}^{(j)}(t)$  は状態点  $\mathbf{x}(t)$  における  $\lambda_j$  に対応する (共変) リャプノフベクトルと呼ばれる。本研究の数値計算では長時間平均として平均時間  $T = 23000$  を用い, 得られた結果は平均時間によらないことを確認した。

### 3 Regeneration cycle とその軌道不安定性

前節の設定でミニマルクエット乱流の数値計算を行った結果, 先行研究で報告されている regeneration cycle (ストリークの崩壊と再形成) が観察された。ストリークが崩壊する際に, 流れ方向渦度  $\omega_x$  が壁の中間付近 ( $z \sim 0$ ) に強く局在する。このことを定量的に示すために Fig.3 の下段に渦度の  $z = 0$  における RMS:  $\sqrt{\langle \omega_x^2 \rangle_H}$  の典型的な時系列 ( $2730 \leq t \leq 3030$ ) を示した。ここで平均は水平方向平均である:

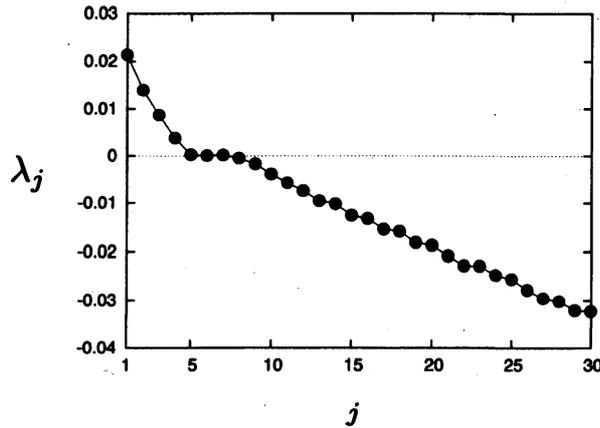


Fig.2 Lyapunov spectrum  $\lambda_j$  ( $j = 1, 2, 3, \dots, 30$ ) of the minimal Couette turbulence. There are four positive Lyapunov exponents and three zero Lyapunov exponents. The maximum Lyapunov exponent is  $\lambda_1 = 0.021$ . The Lyapunov dimension is  $D_L = 14.8$  and the Kolmogorov-Sinai entropy is  $h_{KS} = 0.048$ .

$\langle \cdot \rangle_H = \frac{1}{L_x L_y} \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \cdot dx dy$ . この時系列においてストリークの崩壊・再形成は3回見られ、先行研究で報告されている regeneration cycle の“周期” $T$ が  $T \sim 100$  であることと整合的である。このストリークの崩壊・再形成に対応して流れ方向渦の強い局在も3回見られ、Fig.3の下段の時系列の  $\sqrt{\langle \omega_x^2 \rangle_H}$  の3つのピークに対応する。ここでは  $\sqrt{\langle \omega_x^2 \rangle_H}$  が増大している期間と減衰している期間の2つに regeneration cycle を分け、それぞれ Phase (i) と Phase (ii) と呼ぶことにする。最初の1サイクルに関しては Phase (i) は  $2730 \lesssim t \lesssim 2760$ 、Phase (ii) は  $2760 \lesssim t \lesssim 2830$  である。

次にミニマルクエット乱流に対して共変リャプノフ解析を行った結果を示す。まず得られたリャプノフスペクトルを Fig.2 に示す。ミニマルクエット乱流は4つの正のリャプノフ指数、3つのゼロリャプノフ指数をもつことがわかった。3つのゼロリャプノフ指数はそれぞれ水平方向の空間並進対称性と時間方向の並進対称性を反映していると考えられる。最大リャプノフ指数は  $\lambda_1 = 0.021$  であり、乱流の統計量を良く再現する不安定周期軌道のフロケ乗数  $\mu = 0.019$  (Kawahara (2009) [3]) に近い。また、リャプノフスペクトルによって定義されるアトラクタ次元 (リャプノフ次元) は  $D_L = 14.8$  であり、コルモゴロフ-シナイエントロピーは  $h_{KS} = 0.048$  である。

Regeneration cycle を特徴付けるため局所リャプノフ指数を Fig.3 の上段に示した。局所リャプノフ指数の定義は  $\tilde{\lambda}_j(\mathbf{x}_0, \tau) = \frac{1}{\tau} \ln \frac{\|D\mathbf{f}^\tau \mathbf{u}^{(j)}(0)\|}{\|\mathbf{u}^{(j)}(0)\|}$  である。  $\tau$  は局所的な平均時間であり、ここでは  $\tau = 1$  とした。 Fig.3 の上段に示したのは、正のリャプノフ指数に対応する局所リャプノフ指数  $\tilde{\lambda}_j$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) の  $2730 \leq t \leq 3030$  における時系列である (実線;  $j = 1$ , 点線;  $j = 2$ , 一点鎖線;  $j = 3$ , 二点鎖線;  $j = 4$ )。 Fig.3 の下段に示した流れ方向渦度の RMS  $\sqrt{\langle \omega_x^2 \rangle_H}$  の時系列に対応して、Phase (i) では局所リャプノフ指数はおおむね正 ( $\tilde{\lambda}_j > 0$ )、Phase (ii) では局所リャプノフ指数はおおむねゼロか負 ( $\tilde{\lambda}_j \lesssim 0$ ) であることがわかる。さらに Phase (i) から Phase (ii) へ切り替わるとき、局所リャプノフ指数は急激に正から負へ減少することがわかる。

確認のため、有限時間増幅率  $\Lambda_j(t_0, \tau) = \|D\mathbf{f}^\tau \mathbf{y}^{(j)}(t_0)\| / \|\mathbf{y}^{(j)}(t_0)\|$  を調べる。これは時刻  $t_0$  に軌道に加

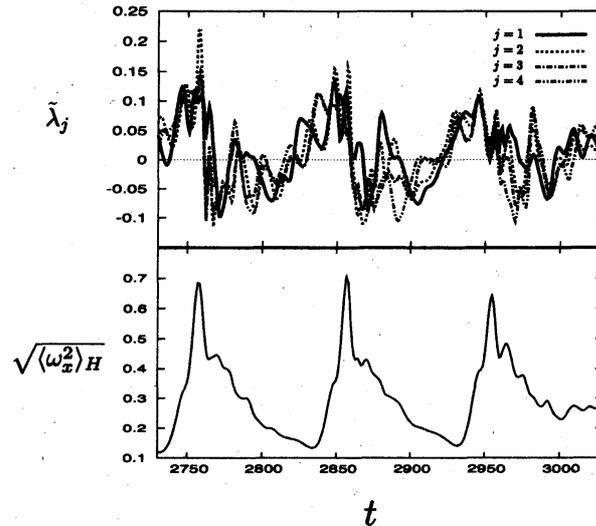


Fig.3 [Upper panel] Time series of the local Lyapunov exponents  $\bar{\lambda}_j$  for  $j = 1$  (red solid line), 2 (green dotted line), 3 (blue dashed dotted line) and 4 (pink dashed double-dotted line). [Lower panel] The 'horizontal' RMS of streamwise vorticity  $\sqrt{\langle \omega_x^2 \rangle_H}$  at the mid-plane ( $z = 0$ ).

えられた無限小摂動の有限時間  $\tau$  の増幅率である。Fig.4 は  $\tau$  の関数として有限時間増幅率  $\Lambda_j(t_0, \tau)$  を示したもので、摂動を加える時刻は Fig.4 (a) は  $t_0 = 2730$  (Phase (i) の初期時刻) であり、Fig.4 (b)  $t_0 = 2760$  (Phase (ii) の初期時刻) である ( $j = 1, 2, 3, 4$ )。Phase (i) の初期に摂動を加えた場合、無限小摂動は  $\tau \simeq 30$  (i.e.  $t_0 + \tau = 2760$ ) までは増幅している (Fig.4 (a))。他方、Phase (ii) の初期に摂動を加えた場合、無限小摂動は増幅せず ( $\Lambda_j(t_0, \tau) \lesssim 1$ )、これは Phase (ii) で指数的不安定性がないことを示唆している (Fig.4 (b))。つまり、流れが不安定であるのは乱流中の流れ方向渦が成長している過程のみで、流れ方向渦が成長し終わり減衰する過程では流れに不安定性はないと考えられる。

本稿では、モデル化や現象論的な議論で従来説明されてきた regeneration cycle を、ナビエ-ストークス方程式の軌道不安定性で特徴付けた。特に局所リャプノフ指数によって、再生成サイクルの Phase (i) は不安定であるが、Phase (ii) に不安定性がないことが明らかになった。

## 参考文献

- [1] F. Ginelli, P. Poggi, A. Turchi, H. Chate, R. Livi, and A. Politi, "Characterizing Dynamics with Covariant Lyapunov Vectors", *Phys. Rev. Lett.* 99, 130601(4), (2007).
- [2] J. M. Hamilton, J. Kim, and F. Waleffe, "Regeneration mechanisms of near-wall turbulence structures", *J. Fluid Mech.*, vol. 287, pp. 317–348 (1995).
- [3] G. Kawahara, "Theoretical interpretation of coherent structures in near-wall turbulence", *Fluid Dyn. Res.* 41, 064001 (2009).
- [4] W. Schoppa and F. Hussain, "Coherent structure generation in near-wall turbulence", *J. Fluid Mech.*, vol. 453,

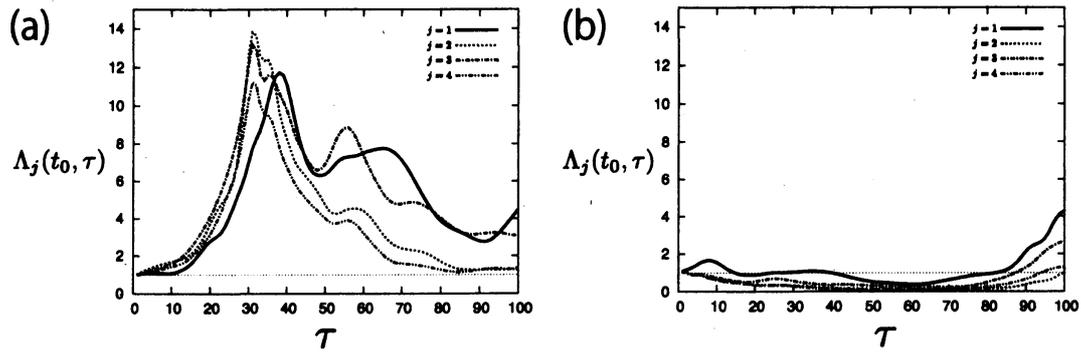


Fig.4 Finite time growth rate  $\Lambda(t_0, \tau)$ ; (a)  $t_0 = 2730$ , (b)  $t_0 = 2760$  for  $\bar{\lambda}_j(t)$  for solid line (red) :  $j = 1$ , dotted line (green) :  $j = 2$ , dashed dotted (blue) :  $j = 3$ , and dashed double-dotted (pink) :  $j = 4$ . The black dot horizontal line denotes  $\Lambda_j(t_0, \tau) \equiv 1$  (i.e. neutral).

pp.57–108 (2002).

- [5] G. Kawahara, J. Jimenez, M. Uhlmann, and A. Pinelli, "Linear instability of a corrugated vortex sheet - a model for streak instability" *J. Fluid Mech.*, vol.483, pp.315–342 (2003).