数理解析研究所講究録
第 1884 巻 2014 年 58-60

一般化されたMycielskiグラフのboxicityとchromatic numberについて

*†上別府 陽 (島根大学大学院総合理工学研究科)

グラフはすべて有限かつ単純な無向グラフとし, グラフ G の頂点集合を $V(G)$, 辺集合を $E(G)$ で表す. また, グラフの頂点 u と v を結ぶ辺を uv と書くことにする. 空でない, ある集合族 $\mathcal{F}$ に対して, 頂点集合が $\mathcal{F}$ で, 辺集合が

$$\{F_1F_2 \mid F_1, F_2 \in \mathcal{F}, F_1 \neq F_2, F_1 \cap F_2 \neq \emptyset\}$$

で定義されるグラフを集合族 $\mathcal{F}$ の *intersection* グラフと呼ぶ. 特に, $\mathcal{F}$ が実数直線上の閉区間からなるある集合族のとき, この intersection グラフを *interval* グラフと呼ぶ. また, あるグラフ G が $\mathcal{F}$ の intersection グラフで表現できるとは, $V(G)$ と $\mathcal{F}$ の間に全単射があって,「G の 2 頂点が u と v が辺で結ばれること」と「u と v に対応する集合族 $\mathcal{F}$ の元 F_u と F_v の共通部分が空でないこと」が必要十分であるときとする.

実数直線上の k 個の閉区間 $I_1, I_2, \ldots, I_k$ の直積 $I_1 \times I_2 \times \cdots I_k$ のことを k 次元ユークリッド空間内の *box* と呼ぶ. 一般に, n 個の頂点を持つグラフ G は n 次元ユークリッド空間の box からなるある集合族の intersection グラフで表現できる ([8], Chapter 5, Theorem 5.3). そこで,

「グラフ G が k 次元ユークリッド空間の box からなるある集合族の intersection グラフで表現できるときの最小値 k」

をグラフ G の *boxicity* と呼び, box(G) で表す. グラフ H が G の誘導部分グラフならば, box$(G) \geq$ box(H) である.

グラフの boxicity の概念は, Roberts [7] によって紹介され, 生態学における生態ニッチの交差やオペレーションズリサーチにおける艦隊維持等, 様々な分野へ応用されている ([6, 9]). また, Roberts は n 個の頂点を持つグラフの最大 boxicity が $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ であることを示した. 具体的には, 完全多部グラフ $K_{2,2,\ldots,2}$ または $K_{2,2,\ldots,2,1}$ の boxicity が最大 boxicity に達することがわかっている. なお, 講演内で紹介したが, 文献 [2] にはグラフの boxicity を計算に役立つ強力なツールが記されている. 近年, Chandran [1] らが boxicity box(G) と chromatic number $\chi(G)$ との間に, 次の関係があることを発見した.

Theorem 1 ([1]). $s \geq 0$ とする. box$(G) = \frac{|V(G)|}{2} - s$ ならば, $\chi(G) \geq \frac{|V(G)|}{2s+2}$ である.

Theorem 1 は「グラフ G の boxicity が最大 boxicity に近ければ, G の chromatic number も大きくなること」を示している. これにより, boxicity と chromatic number の挙動が似ているかもしれないと期待できるが, 一般には期待できない. また, これまでに多くの研究者が良く知られたグラフの boxicity の上界・下界を調べたが, そもそも, boxicity を大きく

*This work was supported by Grant-in-Aid for Young Scientists (B), No.25800091.
†Interdisciplinary Faculty of Science and Engineering, Shimane University, Shimane 690-8504, Japan.
E-mail address: kamibeppu@riko.shimane-u.ac.jp

するグラフの構造に関する情報は多くない. **本講演の目的は, boxicity を大きくする新たなグラフの族を紹介すること**である. 例えば, chromatic number を大きくするようなグラフの再構成法は, boxicity を大きくするかもしれない. グラフ G の *focalization* G^f (G に 1 頂点を加えて, G のすべての頂点と辺で繋いで得られるグラフ) は, chromatic number を大きくするが, boxicity を大きくしないことを注意しておく. そこで, グラフの focalization の一般化に相当する, [3, 5] で紹介されたグラフの再構成法「generalized Mycielski's construction」を紹介する.

G をグラフとし, r を 2 以上の整数, $z \notin V(G)$ とする. $V(G)_i$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ を頂点集合 $V(G)$ のコピーとし, v_i を $V(G)$ の元 v に対応する $V(G)_i$ の元とする. また,

$$\begin{aligned} E_1 &= \{u_1v_1 \mid uv \in E(G)\}, \\ E_i &= \{u_{i-1}v_i, v_{i-1}u_i \mid uv \in E(G)\} \qquad (i = 2, 3, \ldots, r), \\ E_{r+1} &= \{zu_r \mid u \in V(G)\} \end{aligned}$$

とする. 頂点集合を $\{z\} \cup \bigcup_{i=1}^{r} V(G)_i$ とし, 辺集合を $\bigcup_{i=1}^{r+1} E_i$ とするグラフを, G の *genaralized Mycielski* グラフと呼び, $M_r(G)$ で表す. $M_2(\cdot)$ は chromatic number が十分に大きい,

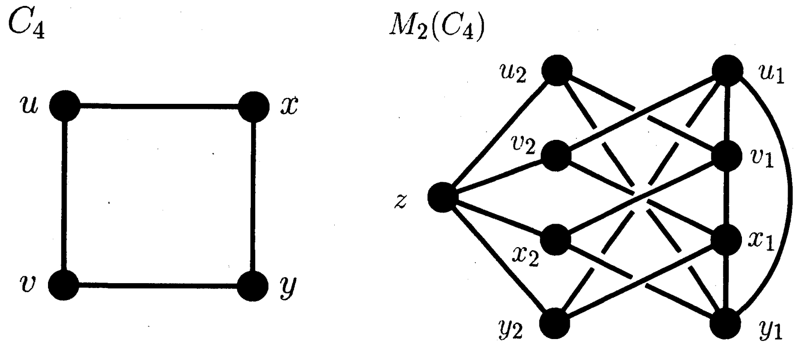

Fig. 1: Cycle C_4 and its Mycielski graph $M_2(C_4)$.

triangle-free グラフの構成のために, Mycielski が考案した有名なグラフである. また, $V(G)_1$ が誘導する $M_r(G)$ の部分グラフは元のグラフ G だから, $\mathrm{box}(M_r(G)) \geq \mathrm{box}(G)$ であることがわかる.

Lemma A ([4], cf. [2], Corollary 3.6). H_1, H_2 をグラフ G の補グラフ $\overline{G}$ の誘導部分グラフとする. 2 つのグラフ H_1 と H_2 の距離 $d_{\overline{G}}(H_1, H_2)$ が 2 以上ならば, 次が成り立つ:

$$\mathrm{box}(G) \geq \mathrm{box}(H_1) + \mathrm{box}(H_2).$$

G^{f^n} をグラフ G に対する n 回の focalization $\overbrace{(\ldots((G^f)^f)^f \ldots)^f}^{n}$ とする. **Lemma A** を使えば, 次の結果を得ることができる. 次の定理の証明は, $r = 2$ の場合に示しておけば十分であることがわかる.

Theorem B ([4]). 自然数 n に対して, $\mathrm{box}(M_r(G^{f^n})) \geq \mathrm{box}(G^{f^n}) + \lceil \frac{n}{2} \rceil$ が成り立つ.

グラフの focalization と Mycielski's construction を繰り返すことで, あらかじめ指定しておいた定数を超えるような boxicity と chromatic number を持つグラフを構成することができる.

Corollary C ([4]). どんな整数kおよび, どんなグラフGが与えられても, $\mathrm{box}(X(G)) > k$ かつ$\chi(X(G)) > k$ を満たすグラフ $X(G)$ をGから再構成できる.

References

[1] L. S. Chandran, A. Das, and C. D. Shah, Cubicity, boxicity, and vertex cover, Discrete Math. 309 (2009) 2488-2496.

[2] M. B. Cozzens and F. S. Roberts, Computing the boxicity of a graph by covering its complement by cointerval graphs, Discrete Appl. Math. 6 (1983) 217-228.

[3] A. Gyárfás, T. Jensen, and M. Stiebitz, On graphs with strongly independent color-classes, J. Graph Theory 46 (2004) 1-14.

[4] A. Kamibeppu, On the boxicity of generalized Mycielski graphs, submitted. (http://arxiv.org/abs/1308.2368)

[5] J. Mycielski, On graph coloring (in French), Colloq. Math. 3 (1955) 161-162.

[6] R. J. Opsut, and F. S. Roberts, On the fleet maintenance, mobile radio frequency, task assignment, and traffic phasing problems, in: G. Chartrand et al., eds., The Theory and Applications of Graphs, Wiley, New York (1981) 479-492.

[7] F. S. Roberts, On the boxicity and cubicity of a graph, in: Recent Progress in Combinatorics, Academic Press, New York (1969) 301-310.

[8] F. S. Roberts. Graph Theory and its Applications to the Problems of Society, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics 29 (1978), SIAM.

[9] F. S. Roberts. Food webs, competition graphs, and the boxicity of ecological phase space, Theory and Applications of Graphs, Lecture Notes in Mathematics 642 (1978), Y. Alavi and D. Lick, eds., Springer-Verlag, 447-490.