

## EXOTIC CURVES

AKIO KATO

ABSTRACT. We show that one of the de Rham curves obtained by corner cutting is quite similar to a curve which we have constructed in [5] as a probabilistic distribution function.

### 1. INTRODUCTION.

Generalized metric space の或る example の性質を調べているうちに、興味ある strictly increasing, continuous function を構成しました [5]。それは、fractal 的な性質をもち、微分可能ではないけれども、細部に行けば行くほど、微分可能に近くなる、という性質をもつ関数です。今までに似たような関数または曲線を誰かが既に構成していないかどうか調べましたところ、de Rham [2] が 1940 年代という昔に構成している面白い曲線を思い出しましたので、まず、それを紹介し、次に [5] における曲線を紹介し、互いの類似点を指摘してみたいと思います。

### 2. DE RHAM CURVES OBTAINED BY CORNER CUTTING

De Rham が Corner Cutting という技法によって構成した曲線を紹介します。簡単に言うと、多角形の角 (corner) を切り落としていくことによって得られる曲線です。どんな多角形から始めても本質的なことは変わらないので、正方形から始めることにします。正方形の各辺を

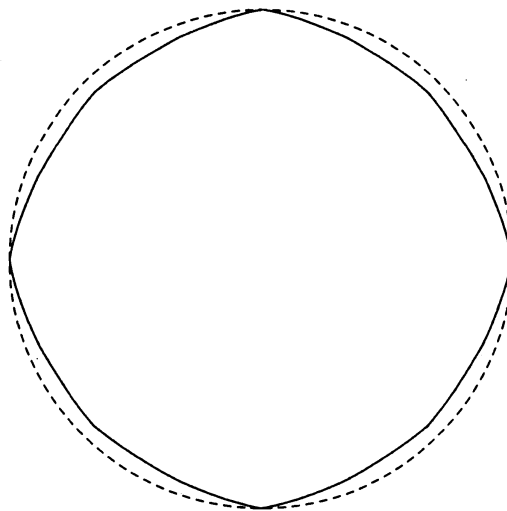


FIG. 1.  $a=1/3$  (10-th step)

$$a : b : a \quad (\text{ただし } 2a + b = 1, \quad 0 < a < 1/2)$$

に分割し、真ん中の辺のみを残し、正方形の角 (corner) を切り落とします。そうすると8角形ができますが、その8角形の各辺をまた同じ割合で分割し、真ん中の辺を残し、角を切り落とします。そうすると16角形ができます... この操作を無限に繰り返すと最後にはどんな図形が得られるのでしょうか？

とくに、この図形の境界はどんな curve でしょうか？ 微分可能になるのでしょうか？  $1:1:1$  に等分に分割する ( $a = 1/3$ ) ときは、対称性から円になるのではないかと、思われるかもしれませんが、Fig.1 に示すように円にはなりません。Fig.1 の実線は構成の途中の10番目の段階の  $2^{12}$  角形であり、点線は円です。また、「微分可能にならない角をどんどん切り落としていくのだから、最後に残る曲線は微分可能になるだろう」と予想されるかもしれませんが、この予想は部分的にしか正しくありません。次の Property 1 が成立します。

初めの正方形の4頂点を  $(-1, 0), (1, 0), (1, 2), (-1, 2)$  とし、問題の curve の、単位正方形  $[0, 1] \times [0, 1]$  内にある部分を  $M_a$  と表します。この curve  $M_a$  を function  $F_a : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  つまり

$$F_a(x(t)) = y(t) \quad \text{if} \quad M_a(t) = (x(t), y(t))$$

とみなしますと、

**Property 1.** ( $[2, 1, 7]$ )  $F_a$  は  $0 < a \leq 1/3$  のとき微分可能であるが、 $1/3 < a < 1/2$  のときは微分可能でない。

初等的証明は [1] にありますが、Protasov [7] が数学的に深い内容ですので、[2, 7] に沿って直観的な解説をします。 $0 < a < 1/2$  としましたが、極端な場合を考えてみますと、 $a = 0$  の場合は「何もしない」ということですが、 $a = 1/2$  の場合は極限の図形はただの1点になってしまいます。しかし、 $0 < a < 1/2$  の場合は、構成の途中に現れる多角形の各辺の中点は必ず残りますので、この中点を手がかりにして、曲線  $M = M_a$  を parameterize することができます。Parameterize には実数  $0 \leq t \leq 1$  の2進小数展開  $t = .t(1)t(2)\dots = \sum_{n \geq 1} t(n) 2^{-n}$  where  $t(n) = 0, 1$  を使います。 $k \cdot 2^{-m}$  ( $k = 0, 1, \dots, 2^m; m \geq 1$ ) の形の rational を dyadic rational と言います。0, 1 は例外として除いた dyadic rationals 全体を  $Q_2$  と表し、 $\sum_{1 \leq n \leq m} t(n) 2^{-n}$  where  $t(m) = 1$  と表されるもの全体を  $Q_2^{(m)}$  と記しますと

$$Q_2 = \bigcup_{m \geq 1} Q_2^{(m)} \quad (\text{disjoint union})$$

e.g.,  $Q_2^{(1)} = \{1/2\}$ ,  $Q_2^{(2)} = \{1/4, 3/4\}$ ,  $Q_2^{(3)} = \{1/8, 3/8, 5/8, 7/8\}, \dots$  となります。

まず、 $M(0) = (0, 0)$ ,  $M(1) = (1, 1)$  とします。最初の corner cut で新しく現れる辺の中点を  $M(.1) = M(1/2)$ , 第2 step の corner cut で新しく現れる2つの辺の中点をそれぞれ  $M(.01) = M(1/4) < M(.11) = M(3/4)$  とします。 $(x_1, y_1) < (x_2, y_2)$  は  $x_1 < x_2$  and  $y_1 < y_2$  の意味です。一般に第  $m$

step で新しく現れる辺の中点は  $Q_2^{(m)}$  によって parameterize され、すべての「中点」は  $Q_2$  によって

$$t < s \in Q_2 \text{ ならば } M(t) < M(s)$$

となるように parameterize されます。  $M$  は continuous curve ですからこの parameterization は  $[0, 1]$  全体に自然に拡張されます。すなわち、  $M$  の parameterization  $\{M(t) | t \in [0, 1]\}$  は

$$0 \leq t < s \leq 1 \text{ ならば } M(t) < M(s)$$

となる性質をもちます。De Rham [2] は一般的に平面上の変換  $\phi^0, \phi^1$  が与えられたとき、関数方程式

$$(2-1) \quad M(t/2) = \phi^0(M(t)), \quad M((t+1)/2) = \phi^1(M(t))$$

を満たす曲線  $M(t)$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) を調べたのですが、今の場合、この  $\phi^0, \phi^1$  に当たるものとして affine 変換

$$\phi^0 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & a \\ 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \phi^1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{a} \\ a \end{bmatrix}$$

( $\hat{a} = 1 - a$ . 一般に  $0 \leq \alpha \leq 1$  に対し  $1 - \alpha = \hat{\alpha}$  と表すことにします) を考えれば、  $M = M_a$  は (2-1) を満足します。この (2-1) は  $M$  の「自己相似性」

$$(2-2) \quad M([0, 1]) = M([0, 1/2]) \cup M([1/2, 1])$$

where

$$M([0, 1/2]) = \phi^0(M([0, 1])), \quad M([1/2, 1]) = \phi^1(M([0, 1]))$$

を表しています。とくに  $M(1/2) = M(.1)$  は (2-1) のどちらの式からも計算されますがそれらは

$$M(1/2) = \phi^0(M(1)) = \phi^0(1, 1) = (\hat{a}, a),$$

$$M(1/2) = \phi^1(M(0)) = \phi^1(0, 0) = (\hat{a}, a)$$

と一致しており、  $M([0, 1/2])$  と  $M([1/2, 1])$  はこの1点  $M(1/2) = (\hat{a}, a)$  で繋がっているという形になっています。以上のことから、単位正方形  $[0, 1]^2$  内のどんな点  $A$  を取っても、任意の  $t = .t(1)t(2)\dots \in [0, 1]$  について

$$(2-3) \quad M(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi^{t(1)} \phi^{t(2)} \dots \phi^{t(n)}(A)$$

となることがわかります (cf.[2])。

平行移動によっては曲線の傾きは変わりませんので、曲線の傾きに関するのは affine 変換  $\phi^0, \phi^1$  の linear parts

$$T_0 = \begin{bmatrix} b & a \\ 0 & a \end{bmatrix}, \quad T_1 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ a & b \end{bmatrix}$$

ですが、これらの固有値  $a, b$  の大小関係

$$a \leq b = 1 - 2a, \text{ i.e., } 0 < a \leq 1/3,$$

$$a > b = 1 - 2a, \text{ i.e., } 1/3 < a < 1/2$$

によって状況が変化してきます。Property 1 において  $a = 1/3$  が分かれ目になっているのは、この固有値の大小関係に理由があります。

**Lemma 1.** 2次の行列  $T = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}$  について次が成立する。

(1) 1次変換  $T$  は直線の傾き  $m$  を  $\frac{b_1 + b_2 m}{a_1 + a_2 m}$  に変える。

(2)  $T$  が固有値  $\lambda, \mu$  を持ち  $|\lambda| > |\mu|$  とする。各々に対応する固有ベクトルを  $u, v$  とするとき、 $v$  と平行でないような任意のベクトル  $a \neq 0$  に対しベクトル  $T^n a$  の傾きは  $n \rightarrow \infty$  のときベクトル  $u$  の傾きに近づく。

*Proof.* (1) はベクトル  $(1, m)$  の行き先を考えれば明らかですので、(2) を示します。ベクトル  $a$  は

$$a = x u + y v \quad (x \neq 0)$$

と表されます。  $T u = \lambda u, T v = \mu v$  ですから

$$\begin{aligned} T^n a &= x T^n u + y T^n v = x \lambda^n u + y \mu^n v \\ &= (x \lambda^n) \cdot \left[ u + \left( \frac{\mu}{\lambda} \right)^n \left( \frac{y}{x} \right) v \right]. \end{aligned}$$

よって  $T^n a$  は

$$u + \left( \frac{\mu}{\lambda} \right)^n \left( \frac{y}{x} \right) v$$

に平行であり、これは  $n \rightarrow \infty$  のとき  $(\mu/\lambda)^n \rightarrow 0$  ゆえ  $u$  に近づく。  $\square$

**Corollary 1.** Affine 変換  $\phi^0, \phi^1$  は直線の傾き  $m$  をそれぞれ

$$\frac{m}{(b/a) + m}, \quad 1 + (b/a) \cdot m$$

に変える。

次に、大局的なところを見ておきます。Corner Cutting の途中に現れる図形は、いつも convex (凸多角形) ですから、極限の図形も convex です。よって、曲線  $M$  は convex (下に凸) になります。Convex function の微分係数については、次の Fact が convexity の定義から確かめられます。

**Fact 1.**  $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  が convex, i.e.,

$$g(c \cdot x_1 + \hat{c} \cdot x_2) \leq c \cdot g(x_1) + \hat{c} \cdot g(x_2)$$

for every  $0 < c < 1$  and  $0 \leq x_1 < x_2 \leq 1$ , ならば

left derivative  $0 < g'_-(x) \leq +\infty$  for any  $0 < x \leq 1$ ; および  
right derivative  $0 \leq g'_+(x) < +\infty$  for any  $0 \leq x < 1$  が存在する。

また、曲線  $M$  を得るときの辺の分割は  $a : b : a$  という対称性のあるものでしたから、曲線  $M$  は直線  $x + y = 1$  に関して対称になります、つまり

$$(x, y) \in M \Leftrightarrow (\hat{y}, \hat{x}) \in M.$$

よって、さきほど  $(x, y) \in M$  のとき  $x$  に  $y$  を対応させる関数を  $F_a$  と表しましたが、これを簡単に  $F$  と表すことにしますと

- (i)  $F'_+(0) = 0$  ならば  $F'_-(1) = +\infty$ ,
- (ii)  $M(1/2) = (\hat{a}, a)$  においては  $F'_+(\hat{a}) \cdot F'_-(\hat{a}) = 1$

となることがわかります。

**Assertion 1.**  $F$  が  $\hat{a}$  において微分可能ならば  $F'(\hat{a}) = 1$  となり、このとき必然的に  $F'_+(0) = 0$ ,  $F'_-(1) = +\infty$  となる。

*Proof.* 微分可能性を仮定すると、上の (ii) より  $F'(\hat{a})^2 = 1$  だから  $F'(\hat{a}) \geq 0$  より  $F'(\hat{a}) = 1$  を得る。(2-2) より  $M([1/2, 1])$  は  $M([0, 1])$  を  $\phi^1$  によって写したものであるから、Corollary 1 より  $F'_+(\hat{a}) = 1 + (b/a) \cdot F'_+(0)$  となる。よって  $F'_+(\hat{a}) = 1$  より  $F'_+(0) = 0$  を得る。 $F'_-(1) = +\infty$  は上の (i) より従う。□

一般論より具体例のほうが面白いと思います。 $a = 1/4$  の場合や  $a = 1/3$  の場合も興味深い (以下の Remark 参照) ですが、ここではとくに微分可能にならない例として  $a = 2/5 (> 1/3)$  の場合を解説します。

**Example I. [The case of  $a = 2/5$ ]** この場合の変換は

$$\phi^0 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 0 & 2/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \phi^1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/5 & 0 \\ 2/5 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3/5 \\ 2/5 \end{bmatrix}$$

であり、その linear parts は

$$T_0 = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad T_1 = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

です。 $T_0, T_1$  の2つの固有値  $2/5 > 1/5$  のうちの大きい方  $2/5$  に対応する固有ベクトルとしては、 $T_0$  の場合はベクトル  $(2, 1)$  を、 $T_1$  の場合はベクトル  $(1, 2)$  をとれます。よって、Lemma 1 (2) から  $M$  の  $(0, 0)$  における接線の傾きは  $1/2$  になり、 $(1, 1)$  における接線の傾きは  $2$  になる、すなわち

$$F'_+(0) = 1/2, \quad F'_-(1) = 2$$

となることがわかります。よって convexity より、 $F$  は bi-Lipschitz

$$(1/2) \cdot (y - x) \leq F(y) - F(x) \leq 2 \cdot (y - x) \quad \text{for any } 0 \leq x < y \leq 1$$

になります。

$$T_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4/5 \end{bmatrix} \quad \text{と} \quad T_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

は平行ではありませんので curve  $M$  は  $M(1/2) = (3/5, 2/5)$  において接線を持ちません。

$$F'_-(3/5) = 4/5 < 5/4 = F'_+(3/5)$$

よって、 $M$  の自己相似性 (2-1) から  $M(t)$  は  $t \in Q_2$  において接線を持たないことがわかり、以上から、 $a = 2/5$  のときの関数  $F_a(x(t))$  は  $x(t)$  for  $t \in Q_2$  において微分可能でないことが結論されます。

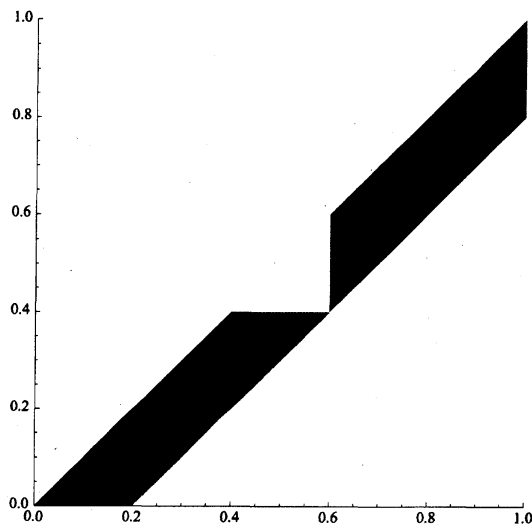


FIG. 2. Step 1

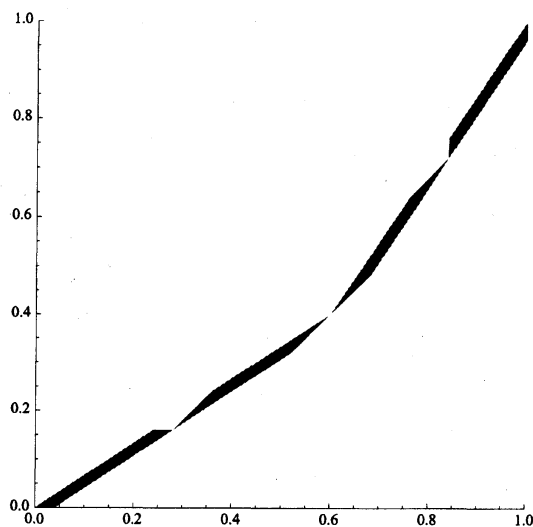


FIG. 3. Step 2

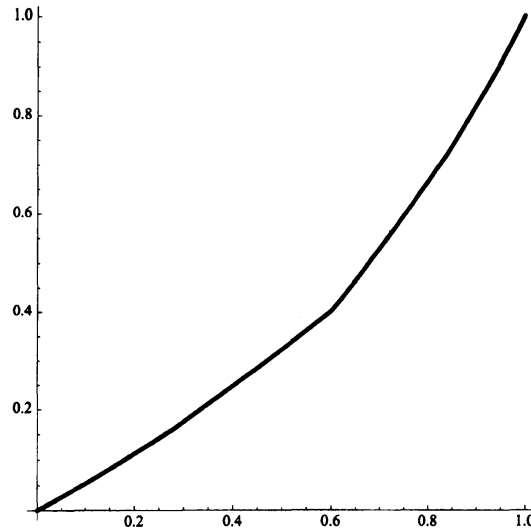


FIG. 4. Example I

Fig.2, Fig.3 を経て描いた Fig.4 が  $F_{2/5}$  のグラフの概形です。この図から  $x(1/2) = 3/5$  において微分可能でないことは判別できますが、残念ながら、他の  $x(t)$  for  $t \in Q_2$  において微分可能でないことは判別しにくいです。

$x(t)$  ( $t \in Q_2$ ) 以外の点では  $F_{2/5}$  は微分可能になりますが、証明 (cf. [7]) は次の Example II の場合と似ていますので、省略します。直観的には、Fig.2, Fig.3 に現れている小さい平行四辺形の傾きが一定の値に近づきますので、その一定値が  $F'(x(t))$  の値であるということです。  $t \in (0, 1) \setminus Q_2$  に対応する点  $M(t)$  は、この小さい平行四辺形の境界 (辺または頂点) 上には乗ってきませんので、任意に小さい平行四辺形に含まれてしまうということが証明のカギです。

**Remark :**  $a = 1/4$  のときは  $M_a$  は放物線の一部になりますが、このことは既にギリシャ時代の Apollonius of Perga において知られていたようです。(「解析概論」(高木貞治著) p.86 にも Archimedes の求積法として放物線の図が載っています。) 実に、 $a = 1/4$  (Apollonius) から  $a = 1/3$  (de Rham) まで 2000 年以上かかったこととなります!!  $a = 1/3$  のときは微分可能 (Prop.1) ですが、曲線の傾きが次のように連分数で表されることを de Rham [2] が指摘しています。  $M_{1/3}(t) = (x(t), y(t))$  における接線の傾きを  $m(t)$  としますと、  $0 < t < 1$  の 2 進展開

$$t = .1^{n_0} 0^{n_1} 1^{n_2} 0^{n_3} \dots \quad (n_0 \geq 0; n_1 \geq 1, n_2 \geq 1, \dots)$$

( $i^n$  は  $i$  が  $n$  個続くことを表している) に対し

$$m(t) = [n_0; n_1, n_2, n_3, \dots] = n_0 + \frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3 + \dots}}}$$

となります。どうしてかといいますと、 $a = 1/3$  の場合の行列は

$$T_0 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_1 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ですが、Corollary 1 により  $T_1, T_0$  は直線の傾き  $m$  をそれぞれ

$$1 + m, \quad \frac{m}{1 + m} = \frac{1}{1 + 1/m}$$

に変えるからです。このことから Minkowski's Question Mark function  $Q$  の逆関数  $Q^{-1}$  を考えますと  $m(t/2) = Q^{-1}(t)$  となります (cf.[2])。

$F_{1/3}$  は 2 回微分可能ではありません。どの程度微分可能かを表す指数として Hölder exponent というのがありますが、Protasov [7] はこの指数を完璧に計算しています。たとえば  $F''_{1/3}(0) = +\infty$  となっているのですが、このことを直観的に説明しておきます：

$$M(2^{-n}) = T_0^n \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3^{-n} \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3^{-n} \cdot (n+1) \\ 3^{-n} \end{bmatrix}$$

ですから、 $M(2^{-n}) = (x_n, y_n)$  とおきますと、実数  $s > 0$  に対し

$$\frac{y_n}{(x_n)^s} = \frac{3^{-n}}{(3^{-n} \cdot (n+1))^s} = \frac{(3^{s-1})^n}{(n+1)^s}.$$

これは  $n \rightarrow \infty$  のとき、 $0 < s \leq 1$  ならば 0 に近づき、 $s > 1$  ならば  $+\infty$  になりますが、 $s = 1$  の場合は  $F'_{1/3}(0) = 0$  を示し、 $s = 2$  の場合は  $F''_{1/3}(0) = +\infty$  を示しています。

### 3. A DISTRIBUTION FUNCTION BY INFINITELY MANY TOSSES OF INFINITELY MANY COINS

次に、全く別の観点から、つまり確率論における分布関数として、strictly increasing, continuous function  $L : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  を定義し、この  $L$  が、Example I の de Rham function  $F_{2/5}$  と非常に類似した性質をもつことを指摘したいと思います。以下の定義は講究録 [3] にもありますが、話を self-contained にするため、必要箇所のみ再記します。

表、裏の出る確率が異なる *unfair coin* を無限個用意して、無限回投げる、という試行を考えます。第  $n$  回目に投げる coin の表 "0" が出る確率は  $0 < a_n < 1$  であり、裏 "1" が出る確率は  $b_n = \hat{a}_n = 1 - a_n$  であるとし、この試行により  $0, 1$  から成る infinite sequence  $(t_1, t_2, t_3, \dots)$  が得られますが、それに 2 進実数  $t = .t_1 t_2 t_3 \dots = \sum_{n \geq 1} t_n / 2^n \in [0, 1]$  を対応させます。その「分布関数」を

$$L(x) = \text{Prob} \{t \leq x\}, \quad x \in [0, 1]$$



と定義します。 $(a_n)_{n \geq 1}$  を明記したいときは  $L(x) = L(x; (a_n)_{n \geq 1})$  と表します。「分布関数」の意味は次の通りです。Countable product

$$\{0, 1\}^{\mathbb{N}} = \prod_{n \geq 1} \{0, 1\}_n$$

上に、2点  $\{0, 1\}_n = \{0, 1\}$  上の probability measure  $\pi_n(\{0\}) = a_n$ ,  $\pi_n(\{1\}) = b_n$  から自然に定まる product prob. measure  $\pi_\infty = \prod_{n \geq 1} \pi_n$  を考えます。

各  $(x(n))_{n \in \mathbb{N}} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  に 2 進実数  $.x(1)x(2)\cdots \in [0, 1]$  を対応させる写像

$$\Phi: \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow [0, 1], \quad \Phi((x(n))_{n \in \mathbb{N}}) = .x(1)x(2)\cdots$$

によって  $(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, \pi_\infty)$  から  $[0, 1]$  上に導かれる measure を  $\nu_\infty$  とします。つまり任意の Borel set  $B \subseteq [0, 1]$  に対し

$$\nu_\infty(B) = \pi_\infty(\Phi^{-1}(B))$$

です。このとき

$$L(x) = \nu_\infty([0, x])$$

が、「分布関数」 $L: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  の正確な定義です。前節で定義した dyadic rationals  $Q_2 = \bigcup_{m \geq 1} Q_2^{(m)}$  を考えますと、 $Q_2^{(m)}$  の元は 2 通りの expansion

$$.x(1)\cdots x(m-1)0111\cdots = .x(1)\cdots x(m-1)1000\cdots$$

を持ちますので、 $\Phi$  は 2-1 map ですが、 $|\Phi^{-1}(t)| = 2$  となる  $t$  は  $Q_2$  の元のみです ( $1 = .111\cdots$  については expansion  $1.000\cdots$  は考えません)。

初めの  $n$  回の toss により sequence  $\sigma = (\sigma(1), \dots, \sigma(n))$  が現れる確率を  $P(\sigma)$  と記せば

$$P(\sigma) = \prod_{1 \leq k \leq n} (a_k \hat{\sigma}(k) + b_k \sigma(k)) = \prod_{1 \leq k \leq n} (a_k^{\hat{\sigma}(k)} \cdot b_k^{\sigma(k)}) > 0$$

( $\hat{\sigma}(k) = \widehat{\sigma(k)} = 1 - \sigma(k)$  とする。下の  $\hat{x}(n)$  についても同様) と表せ、これは  $r = .\sigma(1)\cdots\sigma(n) \in Q_2 \cup \{0\}$ ,  $s = r + 2^{-n}$  に対応する  $L$  の値の差

$$(3-0) \quad L(s) - L(r) = P(\sigma)$$

になっています。

$1/n \leq a_n \leq 1 - 1/n$  for almost all  $n$  の場合は  $L$  は continuous になることが確かめられ、この continuous の場合は、 $L(x)$  の値は formula by Lomnicki-Ulam ([6])

$$(3-1) \quad \begin{aligned} L(x) &= \sum_{x(n)=1} P(x(1), \dots, x(n-1), 0) \\ &= \sum_{n \geq 1} x(n) P(x(1), \dots, x(n-1), \hat{x}(n)) \end{aligned}$$

where  $P(x(1), \dots, x(n-1), 0) = P(x(1), \dots, x(n-1)) a_n$

によって計算できます。 $L(x)$  は seq.  $(a_n)_{n \geq 1}$  から generate されましたが、これを  $n$  だけ shift した seq.  $(a_k)_{k > n}$  から generate される関数  $L^{[n]}(x) =$

$L(x; (a_k)_{k>n})$  を考えます。2進展開  $x = .x(1)x(2)\cdots x(n)\cdots$  を  $n$  ずらして得られる小数部分を  $T^n x = .x(n+1)x(n+2)\cdots$ , また、小数第  $n$  位で truncate したものを  $x^{(n)} = .x(1)x(2)\cdots x(n)$  と表しますと

$$(3-2) \quad L(x) = L(x^{(n)}) + P(x(1), \dots, x(n)) L^{[n]}(T^n x) \quad (n \geq 1)$$

となります。これは zoom in すればするほど

$$L = L^{[0]}, L^{[1]}, L^{[2]}, \dots, L^{[n]} \dots$$

の構造が順次現れてくる、という  $L$  の自己相似的フラクタル構造を示しています。(3-2) で  $n=1$  としますと

$$L(x) = a_1 \cdot L^{[1]}(Tx) \text{ if } x(1) = 0,$$

$$L(x) = a_1 + b_1 \cdot L^{[1]}(Tx) \text{ if } x(1) = 1$$

となりますが、これらの式において  $(a_1, a_2, \dots)$  を  $(a_n, a_{n+1}, \dots)$  に置き換えますと

$$L^{[n-1]}(x) = a_n \cdot L^{[n]}(Tx) \text{ if } x(1) = 0;$$

$$L^{[n-1]}(x) = a_n + b_n \cdot L^{[n]}(Tx) \text{ if } x(1) = 1.$$

よって、de Rham curve の場合と同様に affine 変換

$$\phi_n^0, \phi_n^1 : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]^2 \quad (n \geq 1)$$

$$\phi_n^0(x, y) = (x/2, a_n y), \quad \phi_n^1(x, y) = (x/2 + 1/2, b_n y + a_n)$$

i.e.,

$$\phi_n^0 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \phi_n^1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 \\ a_n \end{bmatrix}$$

を考え、 $L^{[n]}$  のグラフを  $G^{[n]}(x) = (x, L^{[n]}(x))$  ( $G^{[0]} = G, L^{[0]} = L$  とする) と表しますと、すべての  $x \in [0, 1], n \geq 1$  について

$$(3-3) \quad G^{[n-1]}(x/2) = \phi_n^0(G^{[n]}(x)), \quad G^{[n-1]}((x+1)/2) = \phi_n^1(G^{[n]}(x))$$

となります。これは de Rham curve の場合の関数方程式 (2-1) に対応するものです。 $\phi_n^0, \phi_n^1$  は正方形  $[0, 1]^2$  をそれぞれ長方形  $[0, 1/2] \times [0, a_n], [1/2, 1] \times [a_n, 1]$  に contract し、この2つの長方形は1点

$$\phi_n^0(1, 1) = (1/2, a_n) = \phi_n^1(0, 0)$$

のみを共有しています。したがって (3-3) が主張していることは、 $L^{[n-1]}$  のグラフは  $L^{[n]}$  のグラフを affine 変換  $\phi_n^0, \phi_n^1$  で写したものを1点  $(1/2, a_n)$  で繋げたものである、ということです。以上のことから、任意の  $x = .x(1)x(2)\cdots \in [0, 1]$  について

$$(x, L(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_1^{x(1)} \phi_2^{x(2)} \cdots \phi_n^{x(n)}(0, 0)$$

となることもわかります。Fig. 5, 6, 7 参照。

De Rham curve  $M$  は convex (下に凸) でした。次の Example II で考える  $L$  は条件  $a_n < 1/2$  ( $n \geq 2$ ) を満たしていますので、次の弱い意味で convex になります。すなわち  $r = .\sigma(1)\cdots\sigma(n) \in Q_2 \cup \{0\}$ ,  $s = r + 2^{-n}$  に対し、 $a_{n+1} < 1/2$  ならば

$$L\left(\frac{1}{2}(r+s)\right) < \frac{1}{2}(L(r) + L(s))$$

となります。実際、(3-0) を  $(r+s)/2 = r+2^{-(n+1)}$  と  $\sigma \wedge 0 = (\sigma(1), \dots, \sigma(n), 0)$  に apply すると  $L((r+s)/2) - L(r) = P(\sigma) \cdot a_{n+1}$  となりますが、これに (3-0) を代入すれば

$$\begin{aligned} L\left(\frac{1}{2}(r+s)\right) &= L(r) + P(\sigma) \cdot a_{n+1} = L(r) + (L(s) - L(r)) \cdot a_{n+1} \\ &< L(r) + (L(s) - L(r)) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(L(r) + L(s)). \end{aligned}$$

講究録 [3] では、 $(a_n)_{n \geq 1}$  が 0 に収束する場合を考えましたが、ここでは、以下、 $(a_n)_{n \geq 1}$  が  $1/2$  に収束する次のような特別な場合を考えます。

### Example II.

$$a_1 = b_1 = \frac{1}{2}, \quad a_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right), \quad b_n = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \quad (n \geq 2)$$

この場合 もちろん  $L$  は continuous になります。  $\varepsilon_n = b_n - a_n$ , i.e.,  $\varepsilon_1 = 0$ ,  $\varepsilon_n = 1/n^2$  ( $n \geq 2$ ) とおきますと  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$  であり

$$(3-4) \quad \prod_{n \geq 1} (1 - \varepsilon_n) = \prod_{n \geq 2} (1 - 1/n^2) = 1/2,$$

$$(3-5) \quad \prod_{n \geq 1} (1 + \varepsilon_n) = \prod_{n \geq 2} (1 + 1/n^2) = C$$

となります。ここで  $C$  は 2 に近い定数

$$1 < C = (e^\pi - e^{-\pi})/4\pi = 1.8380 \dots < 2$$

です。  $L$  は次の性質を持つことを示します。

$$(*) \quad L'(0) = L'_+(0) = 1/2, \quad L'(1) = L'_-(1) = C.$$

$Q_2$  の点以外では微分可能であり、 $Q_2$  の点  $r$  においては left derivative 及び right derivative を持つが、それらの値は異なる  $L'_-(r) > L'_+(r)$  ので、 $Q_2$  の各点では微分不可能である。

Formula (3-0) における  $r, s$  については  $1/2 \leq P(\sigma) \cdot 2^n \leq C$  より  $(1/2) \cdot (s - r) \leq L(s) - L(r) \leq C \cdot (s - r)$  となります。  $L$  が increasing で

あることを考慮すると、 $0 \leq r < s \leq 1$  となる任意の  $r, s \in \mathbb{Q}_2 \cup \{0, 1\}$  について

$$(1/2) \cdot (s - r) \leq L(s) - L(r) \leq C \cdot (s - r)$$

となります。よって、 $L$  が continuous であることから、任意の  $0 \leq x < y \leq 1$  について

$$(1/2) \cdot (y - x) \leq L(y) - L(x) \leq C \cdot (y - x).$$

つまり、 $L$  は bi-Lipschitz continuous です。ここで  $(a_n)_{n \geq 1}$  を  $(a_n)_{n > p}$  に shift して同じ議論をすれば、 $L^{[p]}$  について次の結果が得られます：

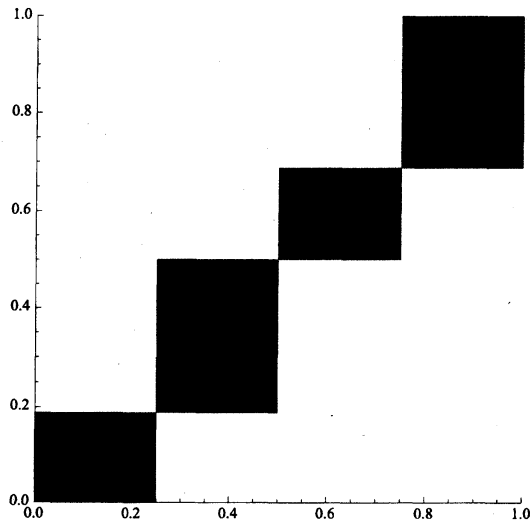


FIG. 5. Step 2

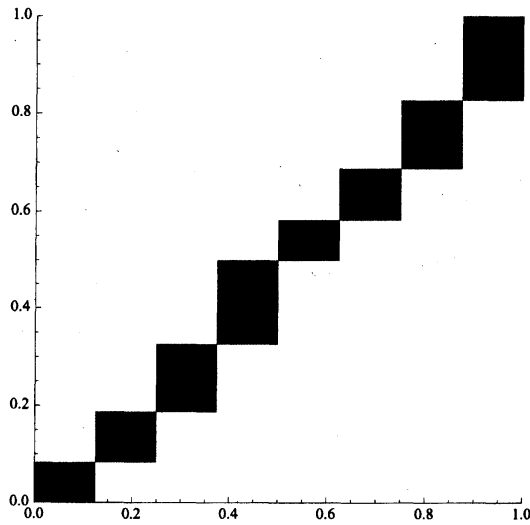


FIG. 6. Step 3

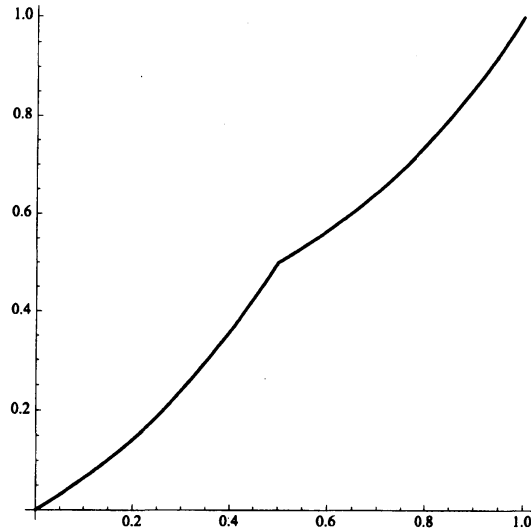


FIG. 7. Example II

任意の  $0 \leq x < y \leq 1$  について

$$(3-6) \quad B^{(p)} \cdot (y-x) \leq L^{(p)}(y) - L^{(p)}(x) \leq C^{(p)} \cdot (y-x)$$

ここで、 $B^{(p)}$ ,  $C^{(p)}$  は無限積 (3-4), (3-5) の末尾の部分

$$B^{(p)} = \prod_{n>p} (1 - 1/n^2), \quad C^{(p)} = \prod_{n>p} (1 + 1/n^2) \quad (p \geq 1)$$

(ただし、 $B^{(0)} = 1/2$ ,  $C^{(0)} = C$ ) です。無限積 (3-4), (3-5) は収束していますから  $B^{(p)}, C^{(p)} \rightarrow 1$  ( $p \rightarrow \infty$ ) となっています：

$$1/2 = B^{(0)} \leq B^{(1)} \leq \dots \leq B^{(p)} \leq \dots < 1 < \dots C^{(p)} \leq \dots \leq C^{(1)} \leq C^{(0)} = C.$$

Finite seq.  $(\sigma(1), \dots, \sigma(p))$ , infinite seq.  $(x(1), x(2), \dots)$  に対し

$$\Delta(\sigma(1), \dots, \sigma(p)) = P(\sigma(1), \dots, \sigma(p)) \cdot 2^p = \prod_{1 \leq k \leq p} (1 + \varepsilon_k \cdot \sigma^*(k)),$$

$$\Delta(x(1), x(2), \dots) = \lim_{p \rightarrow \infty} \Delta(x(1), \dots, x(p)) = \prod_{k \geq 1} (1 + \varepsilon_k \cdot x^*(k))$$

where  $\sigma^*(k) = 2\sigma(k) - 1$ ,  $x^*(k) = 2x(k) - 1$  と定めます。  
無限積の収束については次の事実が知られています。

**Fact 2.**  $\sum_{n \geq 1} |u_n| < +\infty$  ( $u_n > -1$ ) ならば、 $\prod_{n \geq 1} (1 + u_n)$  は収束する。  
(無限積については「収束する」という意味は 0 と  $+\infty$  の間の有限確定値になるということです。)

我々の場合  $\varepsilon_k = 1/k^2$  ( $k \geq 2$ ),  $\sum_{k \geq 1} 1/k^2 < +\infty$  であり、 $x^*(k) = \pm 1$  ですから、上の無限積  $\Delta(x(1), x(2), \dots)$  は必ず収束します。(3-4), (3-5)

より

$$1/2 = \Delta(0, 0, \dots) \leq \Delta(x(1), x(2), \dots) \leq \Delta(1, 1, \dots) = C.$$

**Assertion 2.** (1)  $x = .x(1)x(2)\dots \in [0, 1] \setminus Q_2$  のときは

$$L'(x) = \Delta(x(1), x(2), \dots).$$

(2)  $x = .x(1)x(2)\dots x(n)1000\dots = .x(1)x(2)\dots x(n)0111\dots \in Q_2$   
( $n \geq 0$ ) のときは

$$L'_+(x) = \Delta(x(1), x(2), \dots, x(n), 1, 0, 0, 0\dots),$$

$$L'_-(x) = \Delta(x(1), x(2), \dots, x(n), 0, 1, 1, 1\dots).$$

*Proof.* (1)  $x = .x(1)x(2)\dots \in [0, 1] \setminus Q_2$  のときは、この binary expansion は unique であることに注意します。いま、 $p \geq 1$  を fix して  $x = .x(1)\dots x(p)x(p+1)x(p+2)\dots$  と小数第  $p$  位までが一致するような任意の数

$$y = .x(1)\dots x(p)y(p+1)y(p+2)\dots$$

(ただし  $y \neq x$ ) を考えます。 $x \in (0, 1) \setminus Q_2$  のときは  $x$  の expansion の中には  $0, 1$  両方が無限個現れているため、このような  $y$  は  $x$  の open neighborhood  $(x - 2^{-p}, x + 2^{-p})$  の任意の点を表しています。また、 $x = 0 = .000\dots$  のときは  $y$  は  $x = 0$  の open neighborhood  $[0, x + 2^{-p})$  の任意の点を表し、 $x = 1 = .111\dots$  のときは  $y$  は  $x = 1$  の open neighborhood  $(x - 2^{-p}, 1]$  の任意の点を表しています。この  $x$  と  $y$  に formula (3-2) を適用しますと

$$L(y) - L(x) = P(x(1), \dots, x(p)) (L^{[p]}(T^p y) - L^{[p]}(T^p x))$$

を得ます。 $y - x = 2^{-p} (T^p y - T^p x)$  ゆえ

$$\frac{L(y) - L(x)}{y - x} = \Delta(x(1), \dots, x(p)) \cdot \frac{L^{[p]}(T^p y) - L^{[p]}(T^p x)}{T^p y - T^p x}.$$

(3-6) により右辺の分数は  $B^{(p)}$  と  $C^{(p)}$  で挟まれますから、結局

$$B^{(p)} \cdot \Delta(x(1), \dots, x(p)) \leq \frac{L(y) - L(x)}{y - x} \leq C^{(p)} \cdot \Delta(x(1), \dots, x(p)).$$

$p \rightarrow \infty$  は  $y \rightarrow x$  と同じであり、 $B^{(p)}, C^{(p)} \rightarrow 1$  ( $p \rightarrow \infty$ ) ですから  $L'(x) = \Delta(x)$  が得られました。

(2) この場合の証明は本質的に上の  $x = 0, 1$  の場合と同じです。

$x = .x(1)x(2)\dots x(n)1000\dots$  に対し、上で考えた  $y$  を  $p > n$  なる  $p$  について考えれば、これは  $[x, x + 2^{-p})$  の任意の点を表しています。また、 $x = .x(1)x(2)\dots x(n)0111\dots$  に対し、同様に  $p > n$  なる  $p$  について  $y$  を考えれば、これは  $(x - 2^{-p}, x]$  の任意の点を表しています。よって、(2) の結論を得ます。  $\square$

この Assertion により、 $L'(0) = 1/2$ ,  $L'(1) = C$ , また  $Q_2$  の点以外では微分可能であり、 $Q_2$  の点においては left derivative 及び right derivative が存在することもわかりました。最後に、 $Q_2$  の各点  $x$  では微分不可能であることを言うために  $L'_-(x) > L'_+(x)$  を示します。Assertion (2) を用いて  $L'_+(x)/L'_-(x)$  を計算します。 $n+1 = m$ ,  $\Delta(x(1), \dots, x(n)) = \Delta$  とおきますと  $L'_+(x) = \Delta \cdot (1 + \varepsilon_m) \cdot B^{(m)}$ ,  $L'_-(x) = \Delta \cdot (1 - \varepsilon_m) \cdot C^{(m)}$  ですから

$$L'_+(x)/L'_-(x) = \frac{1 + \varepsilon_m}{1 - \varepsilon_m} \cdot \frac{B^{(m)}}{C^{(m)}}$$

となります。これは  $m$  のみに関係する数ですので屈折率 (refraction) の意味を込めて  $ref(m)$  と表すことにしますと、 $B^{(m)} = m/(m+1)$  より

$$ref(m) = \frac{1 + \varepsilon_m}{1 - \varepsilon_m} \cdot \frac{m}{m+1} \cdot \frac{1}{C^{(m)}}$$

$m = 1, 2$  のときは直接計算しますと

$$ref(1) = (1/2)/C = .2720\dots, \quad ref(2) = (25/18)/C = .7556\dots$$

$m \geq 3$  のときは

$$\frac{1 + \varepsilon_m}{1 - \varepsilon_m} \cdot \frac{m}{m+1} = \frac{m^2 + 1}{m^2 - 1} \cdot \frac{m}{m+1} < 1$$

と評価でき、 $C^{(m)}$  はその定義より  $C^{(m)} > 1$  ですから、結局常に  $ref(m) < 1$  となることがわかります。数値計算の結果は次のようになります。

$$ref(3) = .708\dots < ref(4) = .727\dots < ref(5) = .753\dots < ref(100) = .980\dots$$

以上から、 $Q_2$  の各点  $x$  では  $L'_-(x) > L'_+(x)$  となり、微分不可能であることがわかりました。Fig. 7 は Fig. 5, Fig. 6 を経て描かれたものですが、このグラフ Fig. 7 上では、 $ref(1) = .2720\dots < 1$  は「さざ波」のように見ることができですが、 $ref(2) = .7556\dots$  は変化が小さすぎてほとんど見ることが不可能です。また、 $ref(m)$  の式から  $ref(m) \rightarrow 1$  ( $m \rightarrow \infty$ ) となりますので、zoom in すればするほど、グラフは屈折しなくなっていくこともわかります。

#### 4. CONCLUSION

Example I と Example II とは、一方は Corner Cutting、他方は確率論的、と全く異なる方法で構成されたにもかかわらず、そのグラフは幾何学的に大変類似していることが了解されたと思います。どちらも strictly increasing, continuous で自己相似的フラクタル構造をもち、微分可能でない点は可算個あるけれども他では微分可能であり、zoom in すればするほど微分可能に近くなる、という性質をえています。ただ少し残念なのは、微分可能・不可能性に関する性質が通常の視覚では捉えきれないほど非常にミクロで微妙なも

のであるため、既に示したグラフ上にははっきりと見えるようには現れてくれないことです。しかし、何らかの工夫をすれば「見える」ようにできるかもしれません。たぶんそれは Wavelet 変換のようなものと思われませんが、今後の課題です。

## REFERENCES

- [1] S.C.Althoen, K.E.Schilling, M.F.Wyneken, *A Four-gon Conclusion*, The College Math.Journal, 25, No.4 (1994), 266-279.
- [2] G. de Rham, *Un peu de mathématiques à propos d'une courbe plane*, Revue de Mathématiques Élémentaires, II (1947), 678-689.
- [3] A. Kato, *Sorgenfrey topologies on the plane and unfair coin tossing*, 数理解析研究所講究録, 1833 (2013年5月), 47-69.
- [4] A. Kato, *Generalized metric topologies of the Earth*, Topology Proceedings, 42 (2013), 73-90.
- [5] A. Kato, *Exotic increasing functions by infinite tosses of infinitely many unfair coins*, Preprint.
- [6] Z.Lomnicki and S.Ulam, *Sur la théorie de la mesure dans les espaces combinatoires et son application au calcul des probabilités I, Variables indépendantes*, Fund.Math.23 (1934), 237-278.
- [7] V. Yu. Protasov, *On the regularity of the de Rham curves*, Izvestiya: Mathematics 68:3 (2004), 567-606.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, NATIONAL DEFENSE ACADEMY, YOKOSUKA 239-8686, JAPAN

*E-mail address:* akiokato@nda.ac.jp