

液体カーテンの架橋に伴う振動および波の発生

筑波大学システム情報系 京藤 敏達 (Harumichi KYOTOH)
筑波大学システム情報工学研究科 劉 業コン (Yekun LIU)
筑波大学工学システム学類 伊藤雅裕 (Masahiro ITOH)
大日本印刷技術開発センター 中野公一 (Koichi NAKANO)

2013 年 10 月

概要

本研究の題目中にある液体カーテンの振動は、RIMS1645(2009)で議論され、最新の話題が Kyotoh et al.(2014)に掲載されるため、本稿では述べない。本稿では、後半の波の発生について紹介する。

低ウエバー数のカーテンが移動する基材に転移すると、カーテン表面に varicose waves が発生する。一方で、基材に予め濡れ性を付与すると、varicose waves の波長は長くなり、振幅は小さくなる。本稿では、この波の変化について、理論的に探究する。この問題の解析的な困難は、カーテンは漸変流として扱うことができるが、カーテンが基材に到達した後は流れが大きく変化する境界層流れとなる点にある。この問題を克服するために、局所的な流れの解が、適当な検査領域で運動量積分方程式を満たすようにして、大域的な解を構成した。

本研究により、varicose waves の発生は、カーテン内の液体の圧力が負になると抑制されることが判明した。また、この圧力を予測する方法について紹介する。

1 Introduction

液体カーテンは、ウエバー数が小さいとき、我々の直感に反する挙動を示す。例えば、液体ジェットがプールに流入する場合、表面張力が外力となってジェットの運動量が変化し、斜行流、斜行振動流が生じることが知られている [Kyotoh et. al. 2014]。カーテンコーティングにおいては、通常はウエバー数が大きなカーテンを生成し、基材に塗布する方法が採られている [Kistler et. al. 1997]。ウエバー数を大きくすることで、液体カーテンが基材に衝突し、基材上の空気が排除され、液体が基材上に置換される。一方、低ウエバー数域では、液体の慣性力を使って基材上の空気を液体に置換する方法は機能しない。ウエバー数が小さい場合には、基材に極微の濡れ性を与えることで、表面張力を塗布に有効に作用させることが必要である。

一般に、乾燥後の膜厚がミクロンオーダー以下の精密塗布では、吐出流量が少ないため、スロットを基材に接近させて塗布を行う (スロットコーティング)。ところが、スロットと基材の距離が小さすぎると、機械振動などの影響で塗布後の膜に段ムラが生じることがある (例えば、[中野公一 2013])。そこで、本研究では、スロットを基材から離し、段ムラを低減することを試みた。

本研究では、この低ウエバー数域のカーテンコーティングを実験的に調べ、コーティングにおける問題点を探るとともに、その原因を理論的に解明し、その対処法およびそこに現れる物理現象を探求する。第2章においては、低ウエバー数域のカーテンによる塗布実験を行い、カーテン上に顕著な波が発生すること、および、prewet (予濡れ性) [Marston et. al. 2006] によってこの波が低減されることを紹介する。第3章においては、全エネルギーが負のカーテンでは varicose waves が発生しないことを示し、基材に転移されたカーテンの全エネルギーの計算方法を提案する。

2 Experiment

本研究では精密塗布を対象とし、作動液体は粘度が水と同程度のニュートン流体である。したがって、粘性の効果は、基材表面で重要となるが、カーテン内部の流れでは無視することができ、ウェバー数がカーテン流れの支配パラメータとなる。

ウェバー数が臨界値よりも小さいときのカーテンでは、カーテン最下端の sinuous な擾乱がカーテン全体に伝播する。一方で、varicose waves は、流速が小さいと波長が長い成分が定在波となって現れる。本研究では、カーテンと移動する基材の相互作用の結果として生じる現象に着目した実験を行う。

2.1 Experimental facility

図1左に実験装置の概略を示す。スロットダイ (幅 60mm、間隙 0.3mm) へポンプ (TACMINA TPL2M-028) で液体を送り込み、高さ 5mm の位置からベルトコンベア の幅 60mm のステンレス製プレートの上へ液膜カーテンを架橋させる。ベルトのロール部下方に設置したスクレーパーによりプレート上の液体をそぎ落としてタンクで受け止め、タンクからポンプへと液体を循環させる。

図1右はカーテンの生成方法を示す。スロットダイから吐出した液体はエッジガイドに架橋され基材にカーテンとして到達し、カーテン内の液体は移動する基材表面に塗布される。

本実験で使用した液体は、精密塗布で使用される有機溶剤系の塗液を想定し、精製水に 5% wt のエタノールを混合して作成した。この液体の物性値は、密度 ($\rho = 989 \text{ kg/m}^3$)、表面張力 ($\gamma = 56.7 \text{ mN/m}$)、粘度 ($\mu = 0.0111 \text{ Pa}\cdot\text{s}$) である。

また、基材後方から噴霧器 (Panasonic EH-SA32) によって霧を噴き付けることで、プレートに予濡れ性を付与した (図2参照)。プレートの濡れ具合は、基材と噴霧器の距離を変えることで調整した。

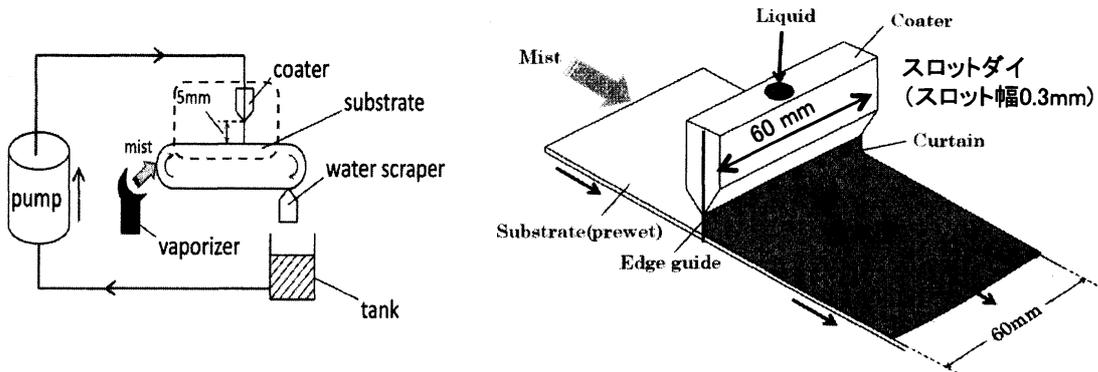


図1: 実験装置の概略図.

2.2 Experimental results

図3はカーテン表面の写真である。写真の左半分は dry-substrate、右半分は prewet-substrate 上に塗布した場合であり、両者の差異を明瞭にするために2つの写真を合成してある。図3(a), (b), (c)の順に液体流量が増加しウェバー数は大きくなる。また、基材に到達するカーテンのウェバー数 We_s は臨界値よりも小さく、基材と平行な波峰をもつ varicose waves が顕著に発生している。さらに、この varicose waves の波峰が変調し ripple 状の波が見られる。この varicose waves は、カーテン内の液体が鉛直下方から基材方向に運動を変える際に生じた運動量変化に伴う圧力増分がカーテンの表面張力と釣り合う形で、発生したと考えられる。

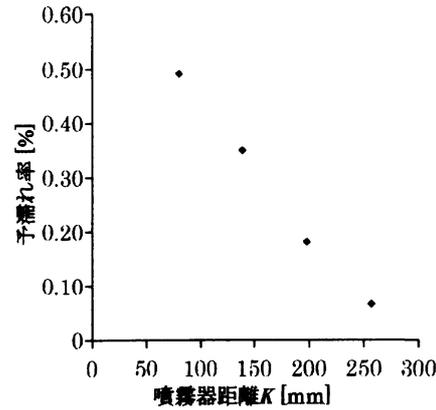


図 2: ミストの基材への塗布割合 (%). 予濡れ率は、ミスト流量/カーテンによる塗液流量 $\times 100$ (%) で定義されている。

写真の右半分は、基材にミストを噴霧した際のカーテン表面の写真である。噴霧したミストの量は塗布する液体の 0.5% 以下と少ないため (図 2 参照)、塗布膜の品質にほとんど影響を与えない。一方で、カーテン表面形状には顕著な差異が見られる。

図 3(d) は、カーテンの正面および側面写真である。予濡れ性 (prewet) による湿潤線の後退が見られる。この湿潤線の後退は、予濡れ性により湿潤線にメニスカスが形成され、カーテン裏面と基材の接触角が小さくなったためと考えられる。

図 3(a), (b), (c) から、予濡れ性がカーテンに与える影響は、ウェバー数が小さいほど顕著に現れる。とくに、ウェバー数が最小となる図 3(a) においては、varicose waves がほぼ消失している。また、予濡れ性によって、varicose waves の波長が長くなっていることから、予濡れ性によってカーテンが厚くなっていることが推察される。

3 Momentum integral equation for stationary liquid curtain

第 2 章の実験から、低ウェバー数域のカーテンでは varicose waves が顕著に現れること、この varicose waves の波峰が変調し、ripple 波 (wavelets) がエッジガイド間に停留すること、および、予濡れ性によってこれらの波は波長が長くなると共に振幅が小さくなることから、観察された。本章では、これらの現象を予測し説明することを試みる。

まず、§3.1 では、[Kistler 1984] が導いた運動量積分方程式を、流れが定常流の場合について、式のチェックも含めて再度導出する。その後、カーテンの支配方程式の一般解の性質を調べさらに、varicose waves はカーテン流れのベルヌーイ定数が負のときには、存在できないことを示す。

3.1 Momentum integral equation for liquid curtain

液体カーテンの中心曲線に沿う距離座標を \hat{s} , 中心曲線の法線方向座標を \hat{n} , \hat{s} , \hat{n} 方向の流速を \hat{u} , \hat{v} とおく。また、式を簡潔に表示するためにカーテン中心線が水平面となす角度を α とおく。 \hat{s} -方向流速はカーテン表面の剪断応力が 0 となる条件から次式を満たす。

$$\hat{u} = \hat{U} + \frac{\hat{n}^2}{2\hat{H}} \left\{ \frac{d\hat{U}}{d\hat{s}} \frac{d\hat{H}}{d\hat{s}} - \frac{\hat{U}}{\hat{H}} \left(\frac{d\hat{H}}{d\hat{s}} \right)^2 - \hat{U} \frac{d^2\hat{H}}{d\hat{s}^2} \right\} \quad (1)$$

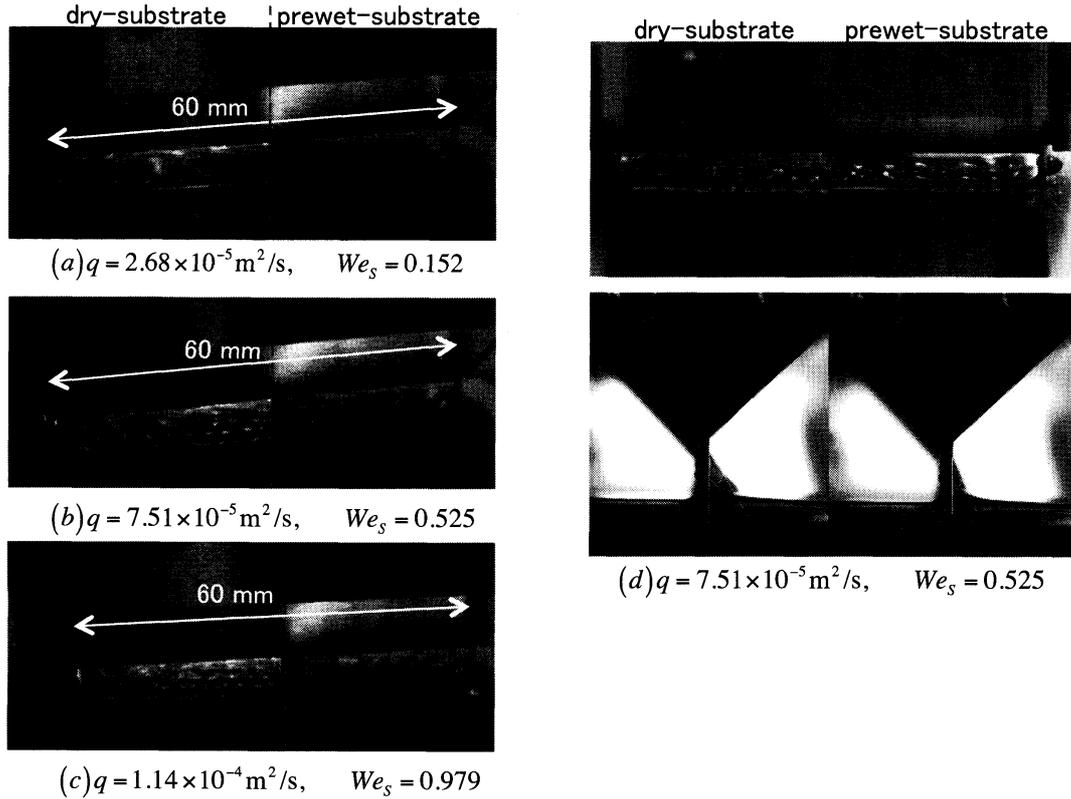


図 3: カーテン表面の写真. 写真は基材上流側から下流に向かって撮影. 基材速度 V_{sub} は 0.45 m/s に固定, カーテン最下端流速を U_S とすると, $V_{sub}/U_S = (a) 1.38, (b) 1.12, (c) 0.914$ の割合で液膜は伸張している. q は単位幅流量, We_s はカーテンの基材上 (最下端) におけるウェバー数である. 図の左半分は基材表面は dry, 右半分は wet の状態にある. 図 (d) は, 図 (b) の正面および側面写真である. 予濡れ性によって湿润線における基材との接触角が小さくなり表面張力によりカーテンが基材上流方向に引っ張られたと考えられる.

また, \hat{n} 方向流速 \hat{v} は表面の運動学的条件を満たすように決定され, \hat{n} の 1 次関数で与えられる.

$$\hat{v} = \frac{\hat{n} + \hat{H}/2}{\hat{H}} (\hat{v}^+ - \hat{v}^-) + \hat{v}^-, \quad \hat{v}^+ = \hat{u}^+ \frac{1}{2\hat{\ell}^+} \frac{d\hat{H}}{d\hat{s}}, \quad \hat{v}^- = -\hat{u}^- \frac{1}{2\hat{\ell}^-} \frac{d\hat{H}}{d\hat{s}}, \quad (2)$$

ここで,

$$\hat{u}^+ = \hat{u}|_{\hat{n}=\hat{H}/2}, \quad \hat{u}^- = \hat{u}|_{\hat{n}=-\hat{H}/2}, \quad \hat{\ell}^+ = 1 + \frac{\hat{H}}{2} \frac{d\alpha}{d\hat{s}}, \quad \hat{\ell}^- = 1 - \frac{\hat{H}}{2} \frac{d\alpha}{d\hat{s}}. \quad (3)$$

さらに, 圧力も同様に線形補間関数で近似して

$$\hat{p} = \frac{\hat{n} + \hat{H}/2}{\hat{H}} (\hat{p}^+ - \hat{p}^-) + \hat{p}^- \quad (4)$$

となる. ここで, \hat{p}^+, \hat{p}^- はカーテン表面の垂直応力の連続条件から

$$\hat{p}^+ = \frac{\hat{\kappa}^+}{C_a} + \hat{\tau}_{\hat{n}\hat{n}}^+ - \frac{1}{2\hat{\ell}^+} \frac{d\hat{H}}{d\hat{s}} \hat{\tau}_{\hat{n}\hat{s}}^+ \quad (5)$$

$$\hat{p}^- = -\frac{\hat{\kappa}^-}{C_a} + \hat{\tau}_{\hat{n}\hat{n}}^- + \frac{1}{2\hat{\ell}^-} \frac{d\hat{H}}{d\hat{s}} \hat{\tau}_{\hat{n}\hat{s}}^- \quad (6)$$

とおくことができる。 $\hat{\kappa}^\pm$ は、カーテン表面 $\hat{n} = \pm \hat{H}/2$ の曲率であり、次式で与えられる。

$$\hat{\kappa}^\delta = \frac{\frac{d\alpha}{d\hat{s}}}{\sqrt{\left(1 + \frac{\delta}{2} \hat{H} \frac{d\alpha}{d\hat{s}}\right)^2 + \left(\frac{\delta}{2} \frac{d\hat{H}}{d\hat{s}}\right)^2}} - \frac{\frac{\delta}{2} \left(1 + \frac{\delta}{2} \hat{H} \frac{d\alpha}{d\hat{s}}\right) \frac{d^2 \hat{H}}{d\hat{s}^2} - \left(\frac{\delta}{2} \frac{d\hat{H}}{d\hat{s}}\right)^2 \frac{d\alpha}{d\hat{s}} - \frac{\delta^2}{4} \hat{H} \frac{d\hat{H}}{d\hat{s}} \frac{d^2 \alpha}{d\hat{s}^2}}{\sqrt{\left(1 + \frac{\delta}{2} \hat{H} \frac{d\alpha}{d\hat{s}}\right)^2 + \left(\frac{\delta}{2} \frac{d\hat{H}}{d\hat{s}}\right)^2}}. \quad (7)$$

ただし、 $\delta = \pm 1$ である。以上の式(1), (2), (4)を粘性流体の運動方程式に代入し、スケールファクター $(1+n d\alpha/ds)$ を掛けた後に \hat{n} に関して $-\hat{H}/2 \leq \hat{n} \leq \hat{H}/2$ で積分し、長波近似を行うと

$$\hat{H} \frac{d\hat{U}}{d\hat{s}} + \hat{U} \frac{d\hat{H}}{d\hat{s}} = 0 \quad (8)$$

$$Re \hat{H} \hat{U} \frac{d\hat{U}}{d\hat{s}} - 4 \left(\frac{d\hat{U}}{d\hat{s}} \frac{d\hat{H}}{d\hat{s}} + \hat{H} \frac{d^2 \hat{U}}{d\hat{s}^2} \right) - \frac{\hat{H}}{2C_a} \frac{d}{d\hat{s}} (\hat{\kappa}^+ - \hat{\kappa}^-) - S_t \hat{H} \sin \alpha = 0 \quad (9)$$

$$\left(-Re \hat{H} \hat{U}^2 + 4\hat{H} \frac{d\hat{U}}{d\hat{s}} \right) \frac{d\alpha}{d\hat{s}} + \frac{1}{C_a} (\hat{\kappa}^+ + \hat{\kappa}^-) + S_t \hat{H} \cos \alpha + \hat{p}_a^+ - \hat{p}_a^- = 0, \quad (10)$$

を得る。ここで、無次元量は次式で定義される。

$$C_a = \frac{\mu q}{\gamma \hat{H}_I}, \quad Re = \frac{\rho q}{\mu}, \quad S_t = \frac{\rho g \hat{H}_I^3}{\mu q}, \quad (11)$$

ただし、 q は単位幅流量、代表長さをスロットの間隙 \hat{H}_I とした。

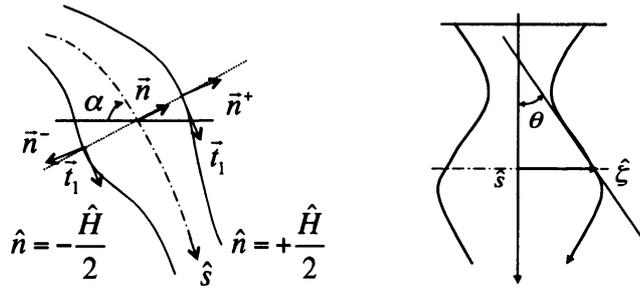


図 4: 座標系. Coordinate transformation from \hat{s} to $\hat{\zeta}$.

また、式(8), (9), (10)において、カーテン表面局率を

$$\hat{\kappa}^\delta = \frac{d\alpha}{d\hat{s}} - \frac{\delta}{2} \left\{ \hat{H} \left(\frac{d\alpha}{d\hat{s}} \right)^2 + \frac{d^2 \hat{H}}{d\hat{s}^2} \right\} \quad (12)$$

で近似し、連続の式 $\hat{U} = q/\hat{H}$ を考慮すると、 \hat{s} および \hat{n} 方向の運動方程式は、

$$-\frac{Re}{\hat{H}^3} \frac{d\hat{H}}{d\hat{s}} - \frac{4}{\hat{H}^3} \left\{ \left(\frac{d\hat{H}}{d\hat{s}} \right)^2 - \hat{H} \frac{d^2 \hat{H}}{d\hat{s}^2} \right\} - \frac{1}{2C_a} \frac{d}{d\hat{s}} \left\{ \hat{H} \left(\frac{d\alpha}{d\hat{s}} \right)^2 + \frac{d^2 \hat{H}}{d\hat{s}^2} \right\} - S_t \sin \alpha = 0, \quad (13)$$

$$\left(-\frac{Re}{\hat{H}} + \frac{2}{C_a} - \frac{4}{\hat{H}} \frac{d\hat{H}}{d\hat{s}} \right) \frac{d\alpha}{d\hat{s}} + S_t \hat{H} \cos \alpha = 0, \quad (14)$$

となる。

3.2 Equation for vertical curtain

本節では、実験で観察された varicose waves の特性を調べるために、カーテンの方程式(8), (9) および(10)をできる限り簡単化し、 $\alpha = \text{const.}$ とする。さらに、§3.2.1 では、粘性と重力を無視する。結果的に、2つの

タイプのカーテン、meniscus-type と varicose-type のカーテンが存在することを示す (§3.2.2, §3.2.3)。また、大振幅の解を取り扱えるように表面に沿う座標系を用いる ([Higgins et. al 1979])。

液体カーテンの中心線が鉛直、 $\alpha = \pi/2$ の場合について、カーテンの特性を調べる。基礎方程式は、式 (8), (9), (10) から、

$$-Re \frac{1}{\hat{H}^2} \frac{d\hat{H}}{d\hat{s}} - \frac{4}{\hat{H}^2} \left\{ \left(\frac{d\hat{H}}{d\hat{s}} \right)^2 - \hat{H} \frac{d^2\hat{H}}{d\hat{s}^2} \right\} - \frac{\hat{H}}{C_a} \frac{d\hat{\kappa}^+}{d\hat{s}} - S_t \hat{H} = 0, \quad (15)$$

ただし、

$$\hat{\kappa}^+ = - \frac{\frac{1}{2} \frac{d^2\hat{H}}{d\hat{s}^2}}{\sqrt[5/2]{1 + \left(\frac{1}{2} \frac{d\hat{H}}{d\hat{s}} \right)^2}}, \quad (16)$$

である。式 (15) は長波近似後の方程式であり、 $|d\hat{H}/d\hat{s}|$ が小さい場合に適用される。本研究では、表面張力によるカーテン内部の圧力勾配項は近似せずに解析を行う。

カーテン中心線の距離座標 \hat{s} からカーテン表面に沿う距離座標を $\hat{\zeta}$ 、カーテン表面の勾配を θ とすると (図 4 参照)、

$$d\hat{\zeta}^2 = d\hat{s}^2 + \left(\frac{d\hat{H}}{2} \right)^2, \quad \frac{d\hat{s}}{d\hat{\zeta}} = \cos \theta, \quad (17)$$

であり、最終的に式 (17) および式 (15) は

$$\frac{d\hat{H}}{d\hat{\zeta}} = 2 \sin \theta, \quad \frac{d\hat{s}}{d\hat{\zeta}} = \cos \theta, \quad (18)$$

$$\frac{1}{C_a} \frac{d^2\theta}{d\hat{\zeta}^2} = -Re \frac{2 \sin \theta}{\hat{H}^3} + \left(\frac{8}{\hat{H}^2 \cos^2 \theta} \frac{d\theta}{d\hat{\zeta}} - 16 \frac{\sin^2 \theta}{\hat{H}^3 \cos \theta} \right) - S_t \cos \theta, \quad (19)$$

となる。

式 (19) の右辺第二項は粘性力であり、有限の \hat{H} に対して θ が $\pi/2$ に漸近すると無限大となる。当然、このような場合はモデルの適用外である。

さて、液体カーテンの粘性を無視し、式 (21) を考慮すると、式 (19) は 1 回積分でき、次式が得られる。

$$\frac{1}{C_a} \frac{d\theta}{d\hat{\zeta}} = Re \frac{1}{2\hat{H}^2} - S_t \hat{s} - \hat{E}, \quad (20)$$

ここで、 \hat{E} はベルヌーイ定数である。上式右辺第 2 項は、ストークス数 S_t が小さい場合は落下距離と共に緩やかに増加する。

3.2.1 Curtain with no gravity

ストークス数が非常に小さい、すなわち重力が無視できるときのカーテン形状の特性について述べる。

式 (20) で $S_t = 0$ とおくと、未知関数 \hat{H} と θ の常微分方程式系

$$\frac{d\hat{H}}{d\hat{\zeta}} = 2 \sin \theta, \quad (21)$$

$$\frac{1}{C_a} \frac{d\theta}{d\hat{\zeta}} = Re \frac{1}{2\hat{H}^2} - \hat{E}, \quad (22)$$

が得られる。この方程式系の解ベクトル $(\hat{H}_{\hat{\zeta}}, \theta_{\hat{\zeta}})$ を相空間 (\hat{H}, θ) 上に描くことで解の大域的な振舞いを予測することができる。上式より $\hat{E} < 0$ のときは θ は単調増加関数のため varicose waves は存在しない。また、解軌道は、式 (22) から $\hat{\zeta}$ を消去し積分することにより、

$$\frac{Re}{2\hat{H}} + \hat{E}\hat{H} = \frac{2}{C_a} \cos \theta + \hat{M}, \quad (23)$$

となる。ここで、 \hat{M} は積分定数である。図5は \hat{M} を定数としたときのコンターを示す。 \hat{E} が正のときは渦状点が存在し、varicose wave が現れる。一方で、 \hat{E} が負のときは、 θ が単調増加しカーテン表面は螺旋線を描く。螺旋線が交叉する位置では表面が2価となり、物理的に意味のない解となる。したがって、 \hat{E} が負のときは液体カーテンは有限長でしか架橋されない。

以上の結果から、鉛直カーテンは、カーテン全体にわたり、曲率が一定符号の場合 (Meniscus-type) と渦状点が存在し波動となる場合 (Varicose-type) に分類されることが分かる。

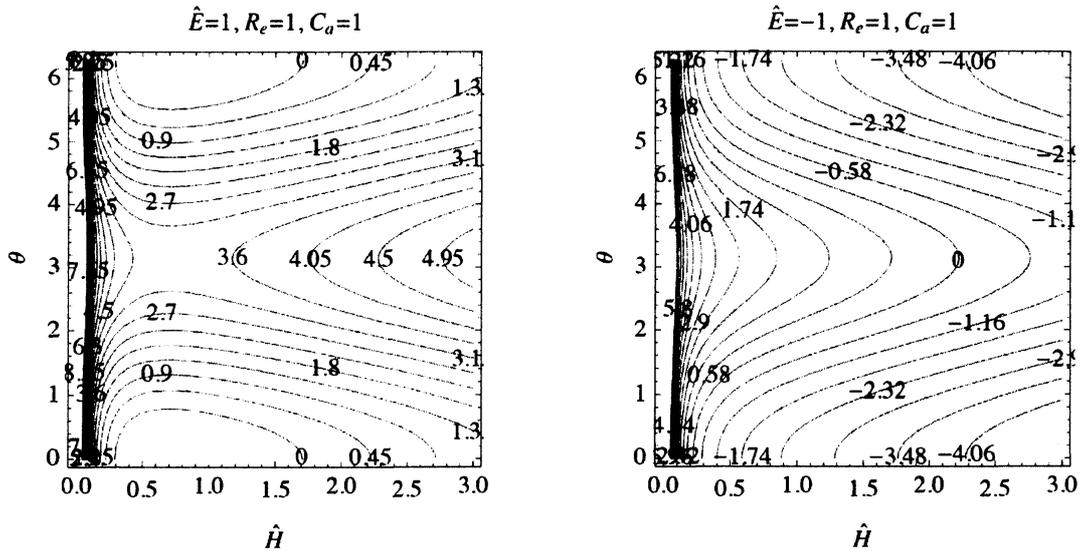


図5: 相空間 \hat{H} - θ 平面内の解軌跡。全エネルギー \hat{E} が正のときは渦状点 (varicose waves) が存在する。等高線は $\hat{M} = const.$ を表す。

3.2.2 Meniscus-type curtain

まず、ウェバー数が0のとき (流れがない場合) のカーテンの架橋について調べ、その解をベースにしてウェバー数を増加させたときのカーテンの解を求める。

スロットダイからの液体カーテンが液面に架橋する場合を想定し、スロットダイ出口のメニスカスの角度 θ_I を与え、接触角が $\theta = \pi/2$ となる架橋高さ \hat{h} を求める (この \hat{h} をメニスカスの高さとして定義する)。ただし、本研究では長波近似の方程式を用いており、近似方程式の厳密解が $\theta \sim \pi/2$ の解を与えるときは物理現象に対しては適用外であるとする。

簡単な解析から、 θ_I を固定したとき、架橋高さが最大となる条件およびその値は次式で与えられる。

$$\hat{E} = -S_t \hat{h} \equiv \hat{E}_{cr}, \quad (24)$$

$$\hat{h} = \sqrt{\frac{2}{C_a S_t}} \sqrt{1 - \sin \theta_I} \quad (25)$$

上第2式は、キャピラリー長さ $L_C = \sqrt{\gamma/(\rho g)}$ を用いると、

$$\hat{h} = \frac{L_C}{H_I} \sqrt{2(1 - \sin \theta_I)} \quad (26)$$

と表すことができる。カーテン内に流れがあるとき、この架橋高さがどのようになるかを調べた。図6は、メニスカス型、すなわち varicose waves を伴わないときのカーテン表面形状である。

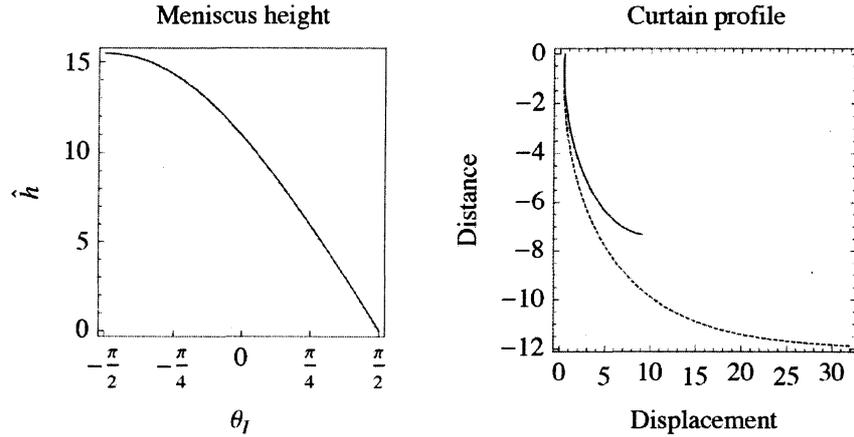


図 6: スロット出口における θ_I を与えたときの meniscus-type カーテンが存在する最大高さ。ただし、 $Re = 0$ である。右図は、 $\theta_I = -\pi/16$ のときのカーテン形状。破線は $C_a S_t = 0.0166$ および $R_e = 0$ 、実線は $C_a = 0.00283$, $S_t = 5.88$ および $R_e = 45$ 。カーテン内の流速により架橋高さが小さくなる。

また、図 7 は、 \hat{E} の値は負で、その大きさを変化させたときのカーテン形状の変化を示す。 $|\hat{E}|$ が 0 に近づくると架橋距離は大きくなるが、重力の影響により距離の増加と共に varicose-type に遷移する様子が見られる。また、 $|\hat{E}|$ が増加するにつれて架橋高さは小さくなる。

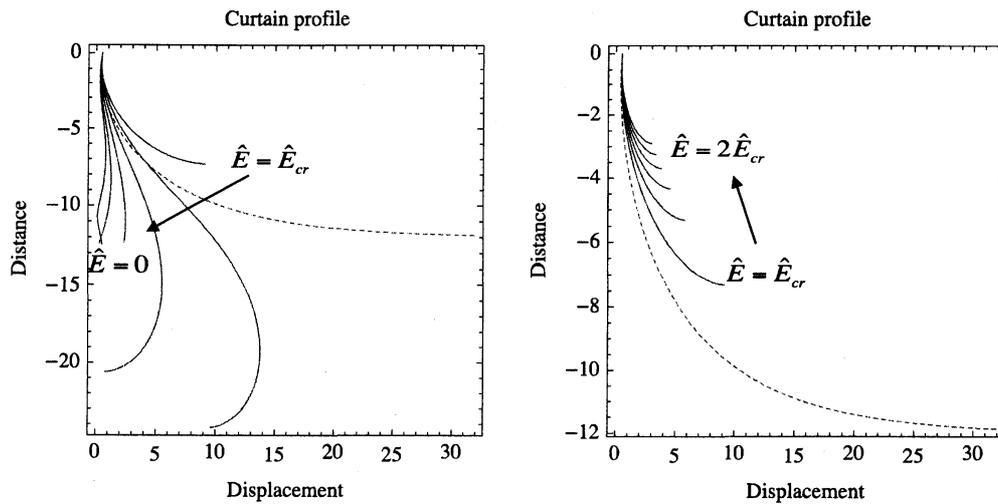


図 7: カーテン表面形状 (Meniscus-type)。ただし、 $\hat{E}_{cr} < 0$, $C_a = 0.00283$, $S_t = 5.88$ and $R_e = 45$. $\theta_I = -\pi/16$

3.2.3 Varicose-type curtain

varicose-type curtain の厚さ \hat{H} を、式 (22) の停留値 \hat{H}_S 近傍の値とし、さらに、その大きさはスロット出口厚さ程度であるため、

$$\hat{E} = \frac{Re}{2\hat{H}^2}, \quad \hat{H}_S \sim 1 \quad (27)$$

とおく。図 8 は $\hat{H}_S = 1.1$ としたときのカーテン形状を示す。重力に依る流速の増加に伴って波長が短くなり、粘性の影響で変動が大きくなっている。一般に粘性は振幅を低減させる。本計算では、スロットダイ出口の接

触角を定値で与えているため、この値に到達する varicose waves の発生源（下流）での振幅が大きくなったと解釈される。

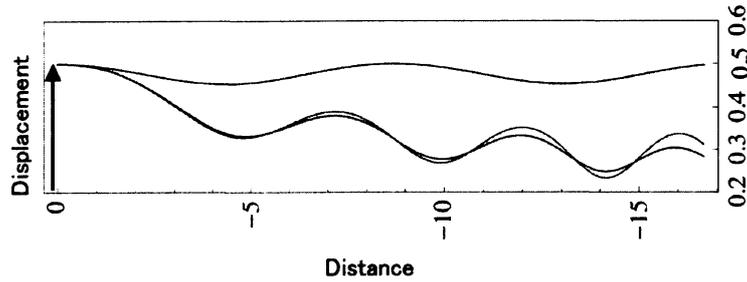


図 8: カーテン形状. ただし、 $C_a = 0.00283$, $S_t = 5.88$, $Re = 45$. また、 $\hat{H}_S = 1.1$. 赤線は重力を無視、青線は粘性を無視、最後に黒線は式 (19) に基づく.

3.3 Asymptotic analysis of curtain equations

次章の運動量積分方程式では、カーテン表面の曲率を長波近似した方程式を用いる。以下、長波近似した方程式を示す。

カーテンの落下高さが小さい場合は、 $\alpha \approx \text{const.}$ として基材上のカーテン形状を近似することができる。さらに、式 (13) において粘性を無視すると、1 回積分できてベルヌーイの定理

$$\frac{Re}{2\hat{H}^2} - \frac{1}{2C_a} \frac{d^2\hat{H}}{d\hat{s}^2} = \hat{E} + S_t \hat{s} \sin \alpha, \quad (28)$$

が得られる。同様に、式 (13) において粘性を無視し、カーテン幅 \hat{H} を掛けて積分すると

$$\int_0^{\hat{s}} \hat{H} \sin \alpha d\hat{s}_I = \frac{1}{S_t} \left[\frac{Re}{\hat{H}} - \frac{1}{2C_a} \left\{ \hat{H} \frac{d^2\hat{H}}{d\hat{s}^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{d\hat{H}}{d\hat{s}} \right)^2 \right\} \right]_0^{\hat{s}}, \quad (29)$$

を得る。上式は、後にカーテンの断面積 (54) を計算する際に利用する。

4 Boundary conditions for stationary liquid curtain with moving substrate

前節までの議論より、カーテン厚さの支配方程式に 2 つの境界条件を課すことで、その解が決定される。本研究で対象とするカーテンの基材への架橋に関しては、基材上の液膜内の流れとカーテン内流れの接続条件により、これらパラメータが決定される。

4.1 Modeling of curtain attachment to the moving substrate

図 9 に、移動する基材に液体カーテンが架橋している模式図を示す。図 (a) は基材上でヒールが発達し、基材の運動方向に向かって負の圧力勾配が生じる。図 (b) は、pull に近い状態であり、カーテン内に圧力勾配が生じるが、平均圧力は 0 に近い。また、図 (c) は湿潤線でメニスカスが発達し、境界層中には圧力勾配は生じず、表面局率から $E < 0$ であると推察される。

前節の議論から、カーテンが基材に衝突しヒールが生成もしくは運動量が圧力に変換されると $E > 0$ となりカーテンは varicose-type、基材の濡れ性によりメニスカスが発達すると $E < 0$ となりカーテンはメニスカ

ス-type となる。本研究で対象とする低ウエバー数域のカーテンコーティングでは、慣性力の影響が小さいためヒールは発生しないと考えられる。本節では、これらカーテンの型を定量的に求める方法について議論する。

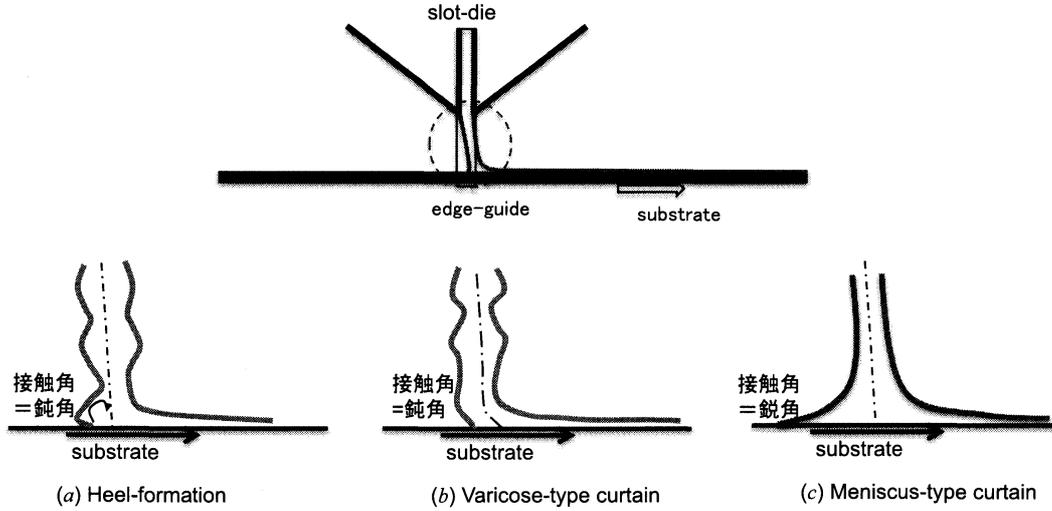


図 9: 液体カーテンの基材への架橋。下図は湿潤線の接触角の違いによるカーテン厚さの変化を模式的に示したものである。(a) は慣性力が大きく、ヒールが発達し varicose waves が発生、(b) は基材に転移したカーテンの接触角が大きく、境界層内に圧力勾配が存在し varicose waves が発生、(c) はメニスカスが発達し、カーテン内の全エネルギーが負となる場合を示す。

4.2 Momentum balance and boundary layer equation

カーテンは基材との粘着により基材の移動方向に引っ張られ、また、基材によってカーテンの運動量が基材の移動方向に変化しカーテン最下端における圧力変動を生じる。これらに加えて、低ウエバー数域のカーテンコーティングでは、表面張力による圧力を考慮する必要がある。以下では、これらの影響を、カーテンおよび基材を含む検査領域における運動量保存則を用いて評価する。

本研究では、カーテンは自由表面で囲まれているため粘性を無視し、基材上の境界層は粘性を考慮する。このとき鉛直方向および水平方向の運動量保存則より、基材が流体に与える力は次式のとおりである。

$$F_{pb} = F_{pI} \sin \alpha_I + \left(-2\gamma + \frac{\rho q^2}{H_I} \right) \sin \alpha_I + \rho A g + \gamma \sin \alpha_b, \quad (30)$$

$$F_{\tau b} = -F_{pI} \cos \alpha_I - \left(-2\gamma + \frac{\rho q^2}{H_I} \right) \cos \alpha_I - \gamma \cos \alpha_b + \gamma + \rho q V_{sub}. \quad (31)$$

ここで、 A は検査領域に含まれる液体の断面積、 V_{sub} は基材の移動速度である。基材上の剪断力 $F_{\tau b}$ および全圧力 F_{pb} は、境界層方程式

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (32)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p_\infty}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (33)$$

を境界条件

$$u = V_{sub}, v = 0 \quad \text{at } y = 0 \quad (34)$$

$$u \rightarrow u_\infty \equiv V_S \cos \alpha_S \quad \text{at } y = \infty \quad (35)$$

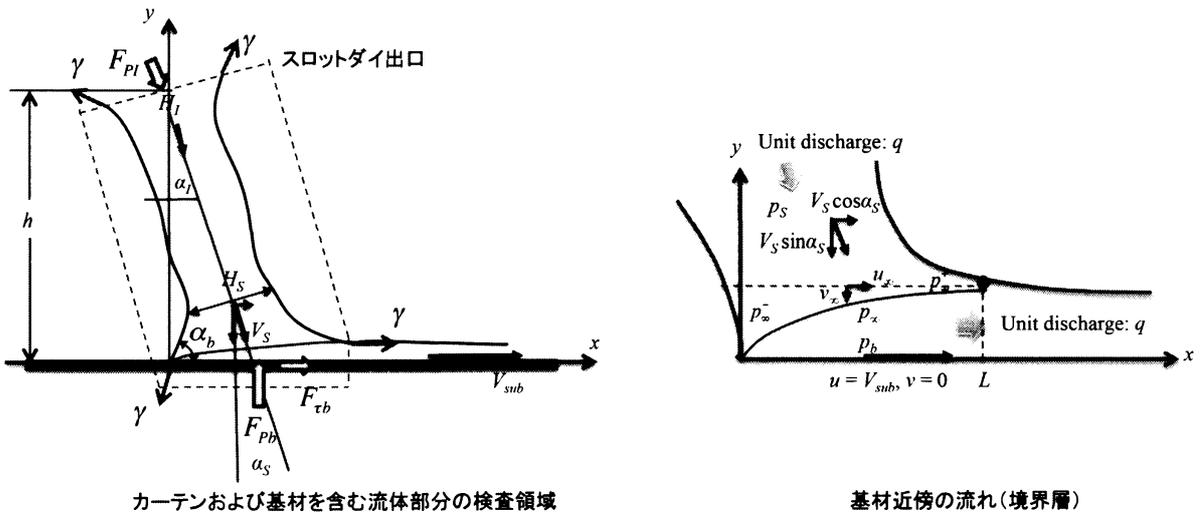


図 10: カーテンと液膜を含む流れの検査領域および基材近傍の境界層

のもとで解けば、 p_∞ で表すことができる。ここで、 p_∞ はカーテン内部の圧力、 L は基材上の境界層長さで右端を通過する流量が q となるように選ばれる。本研究では、境界層の幅および圧力がカーテンに及ぼす影響の全体像を把握するために、境界層方程式の解析解を近似的に求める。

まず、流速 u は近似的に相似則を満たし、

$$u = F(\eta), \quad \eta = \frac{y}{\Delta(x)} \quad (36)$$

と表されると仮定する。上式を連続式 (32) に代入し、 v を求めると

$$v = \frac{d\Delta}{dx} \int_0^\eta \eta_I F'(\eta_I) d\eta_I \quad (37)$$

となる。境界条件 (34)、(35) および $F'(1) = 0$ を満たす近似解を

$$F(\eta) = (1 - \eta)^2 V_{sub} + \eta(2 - \eta)u_\infty \quad \text{for } \eta \leq 1 \quad (38)$$

と置き、運動方程式 (33) に代入後、 $0 \leq y \leq \Delta(x)$ で積分し運動量積分方程式を求めると、

$$\frac{\rho}{15} (3V_{sub}^2 - u_\infty V_{sub} - 2u_\infty^2) \frac{d\Delta}{dx} - \frac{2\mu(V_{sub} - u_\infty)}{\Delta} - m\Delta = 0 \quad (39)$$

を得る。ここで、

$$\frac{\partial p_\infty}{\partial x} \equiv -m = \text{const.} \quad (40)$$

とおいた。

基材上の境界層長さ L は、基材が移送する流量がスロットダイからの流出量に等しくなる条件

$$q = \int_0^\Delta u dy \quad (41)$$

を満たすときの x の値として与えられる。最終的に、 L およびこの間の剪断力は、

$$L = \frac{\rho(3V_{sub}^2 - u_\infty V_{sub})}{30m} \ln \left[1 + \left(\frac{3q}{V_{sub} + 2u_\infty} \right)^2 \frac{m}{2\mu(V_{sub} - u_\infty)} \right] \quad (42)$$

$$F_{\tau b} = \frac{\rho(V_{sub} - u_\infty)(3V_{sub} + 2u_\infty)}{15} \sqrt{\frac{2\mu(V_{sub} - u_\infty)}{m}} \tan^{-1} \left[\frac{3q}{V_{sub} + 2u_\infty} \sqrt{\frac{m}{2\mu(V_{sub} - u_\infty)}} \right] \quad (43)$$

となる。また、平板上の平均圧力 p_b は、境界層外縁の y 方向流速が $-v_\infty \approx -q/L$ であることから

$$F_{pb} = p_b L = \bar{p}_\infty L + \frac{\rho q^2}{L} \quad (44)$$

となる。ここで、 \bar{p}_∞ は境界層外縁の平均圧力である。

カーテンが基材に引っ張られる状態で、湿潤線の接触角が 180° に近い場合は (図 9(b) 参照)、カーテンの湾曲に伴う表面張力により境界層内に圧力勾配が生じる。このような pull に近い状態では、境界層外縁までカーテンの運動方程式が成立する。そこで、境界層外縁とカーテン下端の流れの接続条件を以下の通りとする。

$$u_\infty = V_S \sin \alpha_S, \quad (45)$$

$$\bar{p}_\infty = -\frac{\gamma}{2} \frac{d^2 H}{ds^2}. \quad (46)$$

また、カーテン内圧力とカーテン表面局率の関係およびカーテン法線方向の運動方程式から、

$$p_\infty^+ - p_\infty^- = 2\gamma \frac{d\alpha}{ds}, \quad (47)$$

$$-\left(2\gamma + \rho \frac{q^2}{H}\right) \frac{d\alpha}{ds} + \rho g H \cos \alpha_S = 0. \quad (48)$$

となる。ただし、

$$H = L \sin \alpha_S, \quad m = -\frac{p_\infty^+ - p_\infty^-}{L}. \quad (49)$$

式 (47), (48) から中心線の曲率 $d\theta/ds$ を消去すると、 m , L , θ_S の関数関係

$$m = \frac{2\rho g L \sin^2 \alpha_S \cos \alpha_S}{2L \sin \alpha_S - \rho q^2 / \gamma} \approx \rho g \sin \alpha_S \cos \alpha_S, \quad (50)$$

が得られる。上式右辺の近似はウエバー数が非常に小さいときに成立する。結果的に、運動量方程式 (30) および (31) から、カーテンの傾き角 θ_I および圧力 p_b を決定することができる。

一方、基材に予濡れ性を与えた場合には湿潤線にメニスカスが形成され、カーテンが基材進行方向と逆方向に引っ張られる (図 9(c) 参照)。この場合には、境界層内の圧力は低下するが、圧力勾配は無視する。これについては次節で議論する。

4.3 Low Weber number flow

図 9(c) に示すカーテンを対象とする。この場合には、湿潤線にメニスカスが生成されるため、基材上の境界層内の圧力勾配を無視する。また、簡単のため、カーテン中心線の傾きは一定で、 $\alpha_I = \alpha_S$ とする。

運動量の釣り合い式 (30), (31) に、式 (44), (46) を代入すると

$$-2\gamma L \left(\frac{d^2 H}{ds^2} \right)_\infty + \frac{\rho q^2}{L} = - \left\{ 2\gamma H_I \left(\frac{d^2 H}{ds^2} \right)_I + 2\gamma - \frac{\rho q^2}{H_I} \right\} \sin \alpha_I + \rho A g + \gamma \sin \alpha_b, \quad (51)$$

$$\frac{\rho q (V_{sub} - u_\infty) (3V_{sub} + 2u_\infty)}{5(V_{sub} + 2u_\infty)} = \left\{ 2\gamma H_I \left(\frac{d^2 H}{ds^2} \right)_I + 2\gamma - \frac{\rho q^2}{H_I} \right\} \cos \alpha_I - \gamma \cos \alpha_b + \gamma + \rho q V_{sub}. \quad (52)$$

となる。ただし、境界層幅 L は、

$$L = \frac{3\rho q^2 (3V_{sub} + 2u_\infty)}{20\mu (V_{sub} + 2u_\infty)^2}, \quad (53)$$

また、カーテン面積 A は式 (29) より

$$A = \int_0^{h/\sin \alpha_I} H(s_I) ds_I = \frac{1}{\sin \alpha_I} \left[\frac{q^2}{gH} - \frac{\gamma}{2\rho g} \left\{ H \frac{d^2 H}{ds^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{dH}{ds} \right)^2 \right\} \right]_0^{h/\sin \alpha_I} \quad (54)$$

から計算することもできる。

方程式 (51), (52) に次元量で表記したカーテンの運動方程式 (20)

$$-\frac{\rho q^2}{2H^2} + E + \rho g s \sin \alpha = -\frac{\gamma}{2} \frac{d^2 H}{ds^2} \quad (55)$$

を考慮すると、未知数 α_I および E に対する方程式となる。ここで、境界層外縁におけるカーテン厚さ H_∞ と L の関係

$$H_\infty = L \sin \alpha_I \quad (56)$$

を与えれば、すべての未知数を決定することができる。今後は、カーテンの勾配が変化する場合など、基材上のカーテンの境界条件を決定する方法について、より一般的な方法を考案したい。

5 Conclusions

カーテン形状を予測する式 (51), (52) を導いた。また、ヒールが発達しない場合について、カーテンの傾き、全エネルギーの計算方法を示した。ヒールが発達する場合は、ヒール内で剥離が発生するため、漸変流として解析することは難しい。ただ、本研究で対象とする低ウエバー数域のカーテンではヒールは発生しないと考えられる。今後は、この方程式を解析し、実験結果と比較し、妥当な結果が得られるかを検証する必要がある。

工学的な応用として、低ウエバー数域におけるカーテンの特性に着目したカーテンコーティングの方法について議論を進めたい。最後に、非線形波動の数理として研究に値するような、より一般的なモデルを導くことが課題である。

参考文献

- [Blake et. al. 1994] T. D. Blake, A. Clarke and K. J. Ruschak, 1994, Hydrodynamic assist of dynamic wetting. *AIChE Journal* 40(2), 229–242.
- [Higgins et. al 1979] B. G. Higgins and L. E. Scriven, 1979, Interfacial shape and evolution equations for liquid films and other viscopillary flows, *Ind. Eng. Chem. Fundam.*, Vol. 18, No. 3, 208-215.
- [Kistler 1984] S. F. Kistler, 1984, *The fluid mechanics of curtain coating and related viscous free surface flows with contact lines*, PhD thesis, University of Minnesota, Minneapolis.
- [Kistler et. al. 1997] S. F. Kistler and P. M. Schweizer, 1997, *Liquid film coating*, London, ISBN 0412064812.
- [京藤ら 2008] 京藤敏達、津田武明、高木優、中野公一、2009、非定常落下液膜の運動量積分方程式、京都大学数理解析研究所 RIMS1645, 194–201.
- [Kyotoh et. al. 2014] H. Kyotoh, K. Fujita, K. Nakano and T. Tsuda, 2014, Flow of a falling liquid curtain into a pool, *Journal of Fluid Mechanics*, jfm.2013.672.
- [Marston et. al. 2006] J. O. Marston and M. J. H. Simmons, 2006, Influence of the flow field in curtain coating onto a prewet substrate. *Physics of Fluids* 18, 112102.
- [中野公一 2013] 中野公一、2013、粒子分散系材料のカーテンコーティングに関する流体力学的研究、筑波大学大学院システム情報工学研究科 博士論文。