

成層流体中を鉛直移動する球によるジェットの形成

京都大学大学院工学研究科 仲村 将大 (Shota Nakamura)
沖野 真也 (Shinya Okino)
花崎 秀史 (Hideshi Hanazaki)

Graduate School of Engineering, Kyoto University

概要

成層流体中を一定速度で鉛直下降する球まわりの流れについて数値計算を行った。球の後流側に形成される鉛直上向きのジェットの形成過程と構造を調べ、その太さや球面付近の密度境界層・速度境界層の厚さの、成層の強さとの関係を解析した。

1 はじめに

地球上の大気や海洋などの流体は、濃度や温度により鉛直方向に密度勾配を持っていることが多く、このような流体は成層流体と呼ばれる。

従来、成層流体の水平流れについては、大気・海洋現象への応用から数多くの研究が行われてきた。一方、鉛直運動に関しては、最近まで、Ochoa & Van Woert[1]による球まわりの流れの可視化実験や、Torresら[2]による数値計算があるのみであった。しかし、鉛直運動についても系統的な実験が行われるようになった。

成層流体中において球が鉛直移動する際、球の後流側に速度が大きい部分が発生し、これをジェットと呼んでいる。Hanazakiら[3]は、ジェットをシャドウグラフ法により可視化し、ジェットの形状を、Fig. 1のようにフルード数 Fr 、レイノルズ数 Re により A~G の 7 タイプに分類した。ただし、 $Fr = W/Na$ 、 $Re = 2Wa/\nu$ (N : プラント・ヴァイサラ振動数、 a : 球の半径、 W : 球の移動速度、 ν : 動粘性係数) である。このうち、A~C タイプのジェットに関しては、ほぼ軸対称な流れである。本研究では、A~C タイプの流れについて軸対称性を仮定して数値計算を行い、ジェットの形成過程や内部構造を調べた。また、その太さや密度境界層・速度境界層の厚さの Fr 依存性や Re 依存性等を解析した。

2 支配方程式と数値計算法

支配方程式は、連続の式、ブシネスク近似を施したナビエ・ストークス方程式、密度の輸送方程式であり、長さを $2a$ 、速度を W 、密度攪乱を $-2a(\partial\bar{\rho}^*/\partial z^*)$ 、圧力攪乱を $\rho_0 W^2$ で無次元化する (a : 球の半径、 W : 球の移動速度、 $\partial\bar{\rho}^*/\partial z^*$: 鉛直密度勾配、 ρ_0 : 代表密度)。球と共に移動する移動座標系を用いると、支配方程式は以下ようになる。

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p' - \left(\frac{2}{Fr}\right)^2 \rho' \hat{\mathbf{z}} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (2)$$

$$\frac{D\rho'}{Dt} = w - 1 + \frac{1}{ReSc} \nabla^2 \rho'. \quad (3)$$

ここで、 \mathbf{u} は速度ベクトル (w は z 方向成分)、 ρ' は密度攪乱、 p' は圧力攪乱、 t は時間、 $\hat{\mathbf{z}}$ は鉛直方向の単位ベクトルである。式 (3) は塩分濃度の拡散方程式から求められる式であり、密度が塩

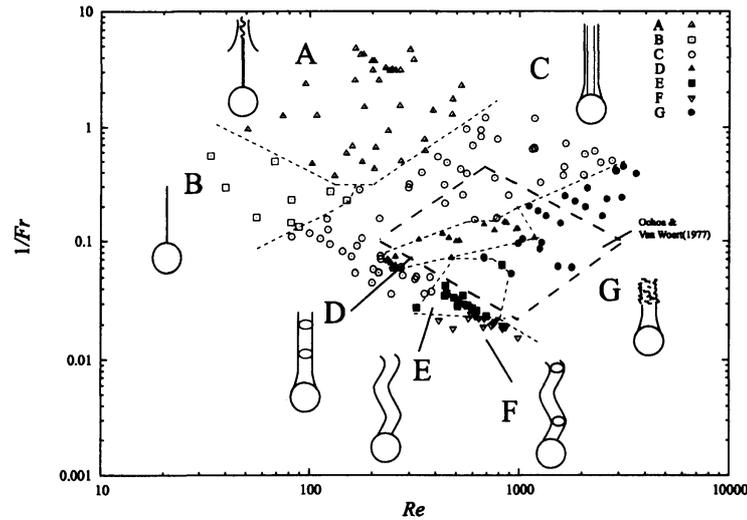


Fig. 1: Classification of the wake structures with Fr and Re . From Hanazaki, Kashimoto & Okamura (2009).

分濃度に比例することを用いている。また、パラメータはレイノルズ数 $Re = 2Wa/\nu$ 、フルード数 $Fr = W/Na$ 、シュミット数 $Sc = \nu/\kappa$ の3つであるが、塩分中では $Sc = 600 \sim 700$ でほぼ一定であるので、本研究では $Sc = 700$ に固定した。よって流れ場は Re と Fr の2つのパラメータに支配される。

密度 ρ は以下のように分解することができる。

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \bar{\rho}(z, t) + \rho'(\mathbf{x}, t) = \bar{\rho}(0, 0) - z + t + \rho'(\mathbf{x}, t) \quad (4)$$

これは、成層のために上方ほど密度が小さく、移動座標系のために時間と共に密度が増加するということを意味する。

数値計算法には、Torresら [2] や Hanazakiら [4] と同様、MAC (marker and cell) 法を用いた。球の中心を原点とした円柱座標系を用い、水平方向を r 、鉛直方向を z とする。計算領域は、半径100の球の内部である。また、計算格子には Fig. 3 のような境界適合格子を用い、格子点数は ξ 方向に360点、 η 方向に1000点存在する。 $Sc = 700$ と大きく、密度（塩分濃度）境界層が非常に薄いために、球面近傍とジェットが形成する z 軸近傍においては格子を細かくしており、最小格子間隔は ξ 方向に 1.6×10^{-4} 、 η 方向に 4.3×10^{-4} である。

3 数値計算結果

3.1 ベル型構造と内部重力波

Fig. 4(a) は $Fr = 0.3, Re = 247$ における、静止系でみた場合の速度ベクトル図、(b) は鉛直速度 $(w-1)$ の等高線図である。(c) は式3における拡散項 $\nabla^2 \rho' / ReSc$ の強度分布（グレースケール）であり、Hanazakiら [3] によるシャドウグラフに対応する。Fig. 4(a) より、 z 軸付近に上向きの速度を持つジェットが存在していることが分かる。同時に、ジェットを囲むように、下向きの速度成分を持つ構造が形成されるが、これは、実験において確認されたベル型構造である。この

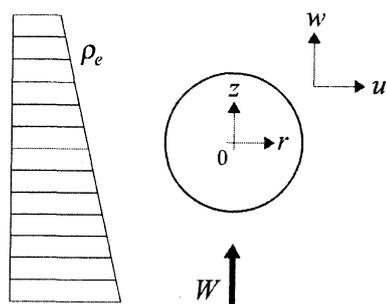


Fig. 2: Schematic figure of a sphere moving downward in a stratified fluid. A frame moving vertically downward with the sphere is used, and the linearly stratified fluid moves up at a constant speed W relative to the sphere.

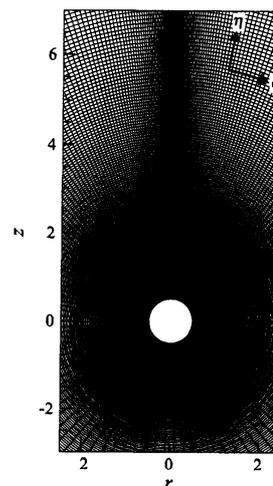


Fig. 3: Computational grid near the sphere. Every two grid line is drawn.

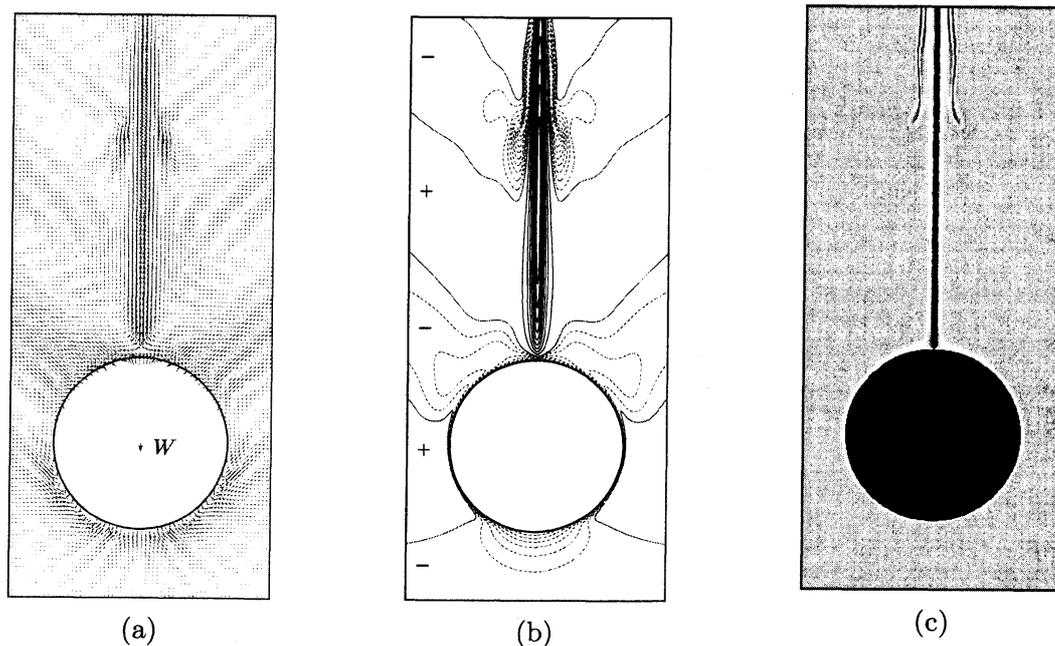


Fig. 4: Typical results at a low Froude number ($Fr = 0.3$, $Re = 247$, steady state at $t = 30$). (a) Velocity vector diagram in stationary frame. (b) Contours of vertical velocity in stationary frame ($w - 1$). The interval of $\Delta(w - 1) = (w_{\max} - 1)/10$ for $w - 1 > 0$ (solid lines), and $|w_{\min} - 1|/10$ for $w - 1 < 0$ (dashed lines). Broad lines represent $w - 1 = 0$. (c) Gray-scale image of the distribution of molecular diffusion of density $\nabla^2 \rho' / ReSc$.

ベル型構造が下向きの速度成分を持つということは Fig. 4(b) より明らかである。また, Fig. 4(b) 中で, $w - 1$ が正の部分と負の部分が交互に存在していることが分かる。これは, 下降する球によって生成された内部重力波 (風下波) であり, この内部重力波によってベル型構造が形成していることが分かる。

速度場 (Fig. 4(a), (b)) と密度場 (Fig. 4(c)) のベル型構造の位置を比較すると, 密度場におけるベル型構造の方がやや上方に位置している。成層流体中において, 鉛直速度が,

$$w \propto \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t) \quad , \quad (5)$$

で見積もることができるのに対し, 密度の拡散は,

$$\nabla^2 \rho' \propto \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t) \quad , \quad (6)$$

であり, w と比べて位相が $\pi/2$ ずれている。これが, 速度場と密度場におけるベル型構造の位置のずれの原因だと考えられる。

Fig. 5 は, $Fr = 0.3, 0.8, 1.5$ のときの $w - 1$ の等高線図である。それぞれの Fr において内部重力波が発生しているが, Fr が大きいほど内部重力波の波長は長くなることが分かる。線形理論を考えると, 内部重力波の等位相線は, 媒介変数 $\sigma (0 < \sigma \leq 1)$ を用いて以下のように表される [2][5].

$$r = \frac{1}{2} Fr \Phi \left(\frac{(\sigma^{-4} + \sigma^{-2} - 1)(1 - \sigma^2)^3}{(1 - \sigma^2)^3 + \sigma^2(2 - \sigma^2)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad , \quad (7)$$

$$z = \frac{1}{2} Fr \Phi \sigma (2 - \sigma^2) \left(\frac{\sigma^{-4} + \sigma^{-2} - 1}{(1 - \sigma^2)^3 + \sigma^2(2 - \sigma^2)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad . \quad (8)$$

ただし, Φ は位相である。 z 軸上では $\sigma = 1$ であり, このとき, 式 (7), (8) は,

$$r = 0 \quad , \quad (9)$$

$$z = \frac{1}{2} Fr \Phi \quad , \quad (10)$$

となる。式 (10) より, 位相 Φ が 2π 増加すると z は πFr 増加する。つまり, z 軸において, 内部重力波の鉛直方向の波長は,

$$\lambda_z = \pi Fr \quad , \quad (11)$$

となり, 理論的にも波長が Fr に比例するということが言える。また, Fig. 5 より, Fr が大きくなり内部重力波の波長が長くなるにつれて, ベル型構造もより上方に位置していることが分かる。

3.2 ジェットの形成過程

ここでは, $Fr = 0.3, Re = 200$ の場合を例に, ジェットの形成過程について考察する。等密度面の時間変化を Fig. 6 に示す。ここで図示される等密度面は, $t = 0$ において $z = -1$ に位置する等密度面であり, その値は, $\rho = \bar{\rho}(z = -1, t = 0) = 1$ である。この図から, 初期段階では球が等密度面を引き込むが, 時間が経つと等密度面に穴が開いているということが分かる。

ジェットの形成過程を詳しく考察するため, 密度等高線図 (Fig. 7) と静止系での速度ベクトル図 (Fig. 8) を用いる。密度等高線図は Fig. 6 のような等密度面図の鉛直断面であり, 等高線の

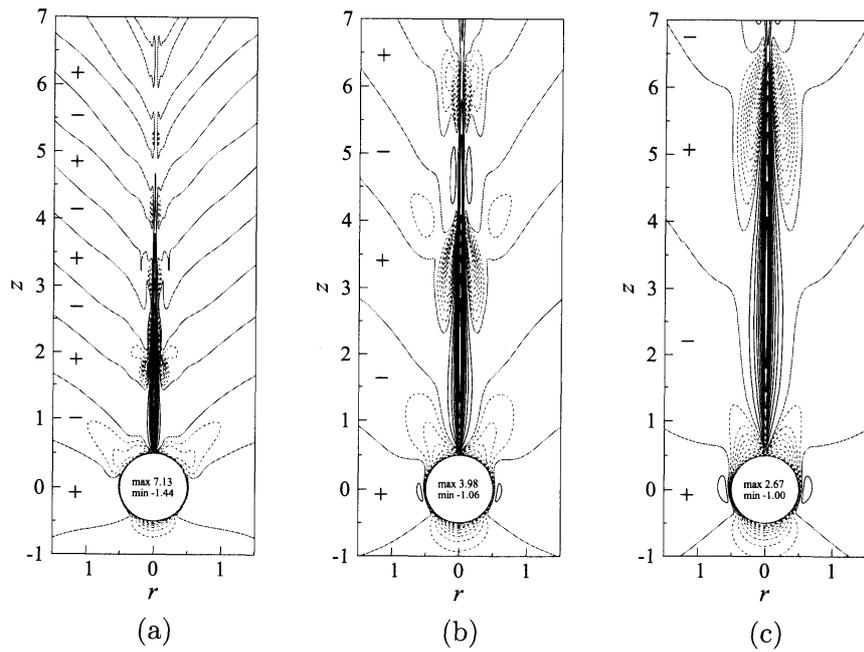


Fig. 5: Contours of vertical velocity in stationary frame, i.e. $w - 1$, at $t = 30$. The interval of $\Delta(w - 1) = (w_{\max} - 1)/10$ for $w - 1 > 0$ (solid lines), and $|w_{\min} - 1|/10$ for $w - 1 < 0$ (dashed lines). Broad lines represent $w - 1 = 0$. (a) $Fr = 0.3$, (b) $Fr = 0.8$, (c) $Fr = 1.5$.

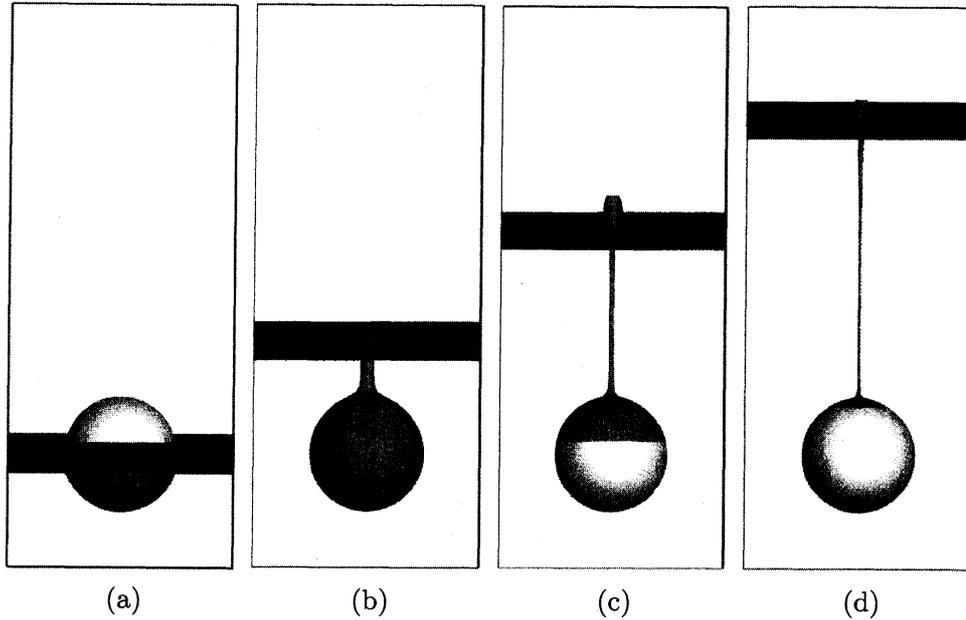


Fig. 6: Typical deformation process of an isopycnal surface ($Fr = 0.3$, $Re = 200$). The surface is initially located at $z = -1$ as a horizontal plane. (a) $t = 1.0$, (b) $t = 2.0$, (c) $t = 3.0$, (d) $t = 4.0$.

間隔は $\Delta\rho = 0.5$ となっている。また、球を表す円の内部に描かれる線は、球面上での密度の値を示しており、Fig. 6(c) のように、等密度面に穴が開いている状態を意味する。

$t = 0.5$ (Fig. 7(a)) では、球面上における等高線の位置は $t = 0$ から変わっておらず、密度の値も変化していないということが分かる。すなわち、密度は球面上で保存されていることが分かる。式 (4) を物質微分すると、

$$\frac{D\rho}{Dt} = -w + 1 + \frac{D\rho'}{Dt} \quad , \quad (12)$$

となり、これと式 (3) より、

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{1}{ReSc} \nabla^2 \rho' = \frac{1}{ReSc} \nabla^2 \rho \quad , \quad (13)$$

が得られる。この式は、密度の保存 ($D\rho/Dt = 0$) とは、拡散がない状態であることを意味し、初期の段階では拡散が無視できるということになる。時間が経過すると、球によって引き込まれた流体と、周囲 (平均場) の流体との密度差が大きくなるため、拡散が始まる。 $t = 1.0$ では、等高線の位置が $t = 0$ から変わっており、球面上で密度の値が変化していることが分かる。つまり、密度はもはや保存されておらず、拡散が始まっているといえる。球によって上方から引き込まれた流体は、周囲の流体よりも密度が小さいために浮力が働き、元の位置に戻ろうと上昇する。その結果、球の進行方向とは逆向きの速度成分を持つジェットが形成される (Fig. 8(b))。

Fig. 9(a), (b) はそれぞれ、球面上における $\nabla^2 \rho' / ReSc$, ρ' の時間変化を示している。ただし、 θ は下側よみ点からの角度である。球面上での速度は 0 であるので、式 (3), (13) はそれぞれ以下のように変形できる。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{ReSc} \nabla^2 \rho' \quad , \quad (14)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -1 + \frac{1}{ReSc} \nabla^2 \rho \quad . \quad (15)$$

Fig. 9(a) を見ると、前述のとおり、初期段階では拡散の効果は小さく ($\nabla^2 \rho' / ReSc \simeq 0$)、式 (14) から、密度が保存 ($\partial \rho / \partial t \simeq 0$) されていることが分かる。このとき、式 (15) から、 $\partial \rho' / \partial t \simeq -1$ となり、密度攪乱 ρ' は時間と共に減少する。これは、Fig. 9(b) から確認できる。時間が経過すると、 $\nabla^2 \rho' / ReSc$ は 1 に収束している。 $\nabla^2 \rho' / ReSc = 1$ を式 (15) に代入すると、 $\partial \rho' / \partial t = 0$ となるので、 $\nabla^2 \rho' / ReSc = 1$ は、球面上において ρ' が定常化するという意味する。Fig. 9(a), (b) から、拡散は、球の下半分 ($\theta \leq 90^\circ$) ではすぐに顕著になり、上側よみ点 ($\theta = 180^\circ$) で最も時間がかかるということが分かる。また、球の上側ほど定常になるのに時間がかかり、 $|\rho'|$ の値は大きくなる。

3.3 引き込み距離

前節で述べた通り、球は上方から流体を引き込んでいる。球面上のある点における、引き込み距離を有次元で L^* とすると、この点での密度攪乱は、

$$\rho'^* = -L^* \frac{\partial \bar{\rho}^*}{\partial z^*} \quad , \quad (16)$$

で表される。これを無次元化すると、

$$\rho' = \frac{\rho'^*}{-2a \frac{\partial \bar{\rho}^*}{\partial z^*}} = -\frac{L^*}{2a} = -L \quad , \quad (17)$$

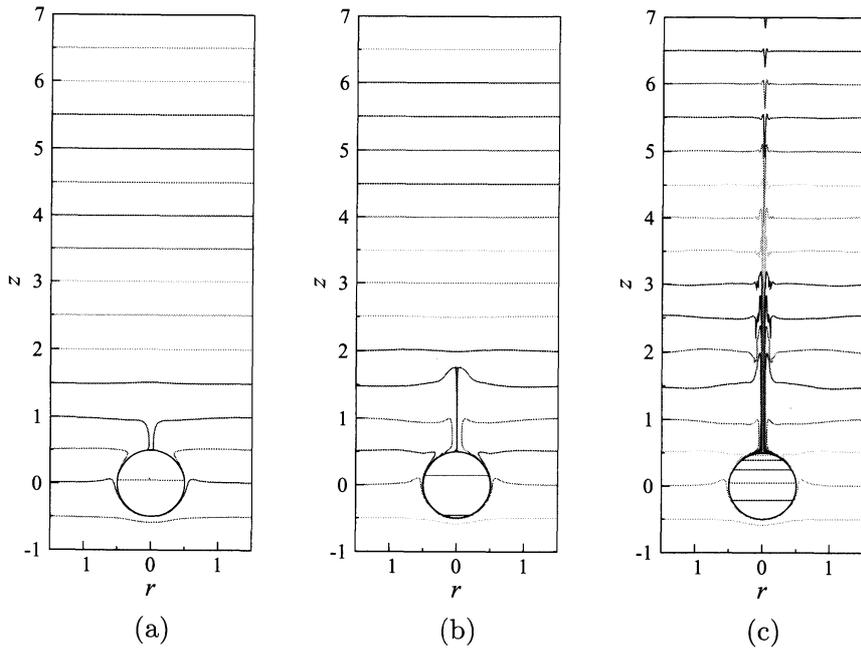


Fig. 7: Time development of the isopycnal lines of total density ρ ($Fr = 0.3, Re = 200$). The lines drawn in the circle represent the density distribution on the sphere surface. Contour interval $\Delta\rho = 0.5$. (a) $t = 0.5$, (b) $t = 1.0$, (c) $t = 10.0$.

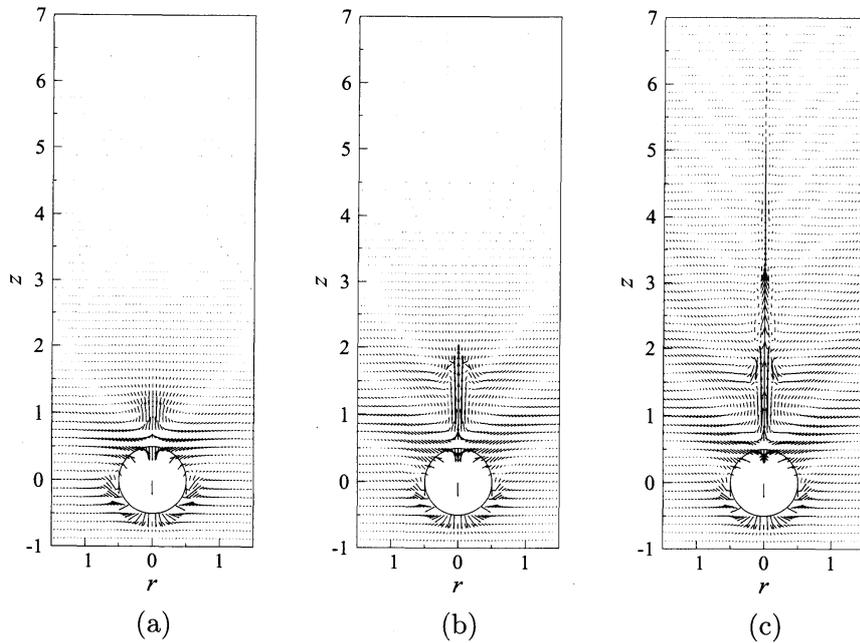


Fig. 8: Time development of velocity vector diagram in a stationary frame. (a) $t = 0.5$, (b) $t = 1.0$, (c) $t = 10.0$.

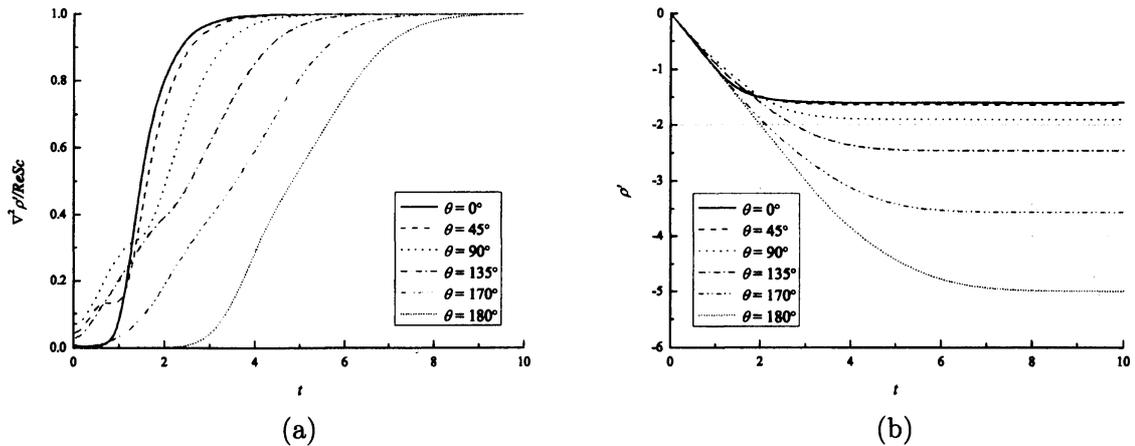


Fig. 9: (a) Time development of the density diffusion $\nabla^2 \rho' / ReSc$ at selected six points on the sphere surface. (b) Time development of the density perturbation ρ' at selected six points on the sphere surface. In both figures, θ is the angle measured from the lower stagnation point of the sphere. ($Fr = 0.3$, $Re = 200$).

となる。すなわち、球面上における ρ' は、どれだけ上方から流体を引き込んでいるかを意味し、 ρ' が負に大きいほど、長距離引き込んでいることを意味する。

Fig. 10(a), (b) はそれぞれ、上側よどみ点 ($\theta = 180^\circ$) における密度攪乱 ρ' の時間変化の Fr 依存性、 Re 依存性を示したグラフである。それぞれのパラメータについて、初期段階では ρ' は時間と共に減少し、最終的には定常になっていることが確認できる。Fig. 10(a) から、 Fr が大きい、すなわち成層が弱いほど、定常になるまでに時間がかかり、そのため、流体をより長い距離引き込んでいることが分かる。また、Fig. 10(b) より、 $50 \leq Re \leq 1000$ の範囲においては、定常になるまでの時間、引き込み距離は、 Re にはあまり依存性しないことが分かる。この引き込み距離に関して、Higginson[6] によって議論されており、球によって与えられた流体の運動エネルギーと、変位によるポテンシャルエネルギーとのバランスから、引き込み距離はおおよそ Fr に比例することが分かっている。

3.4 ジェットの太さ

Fig. 11(a) は、静止系での鉛直速度 $w-1$ が最大になる高さにおける、ジェットの断面内の $w-1$ の分布を、様々な Fr で示した図である。 Fr が大きく（成層が弱く）なるほど、 $w-1$ は小さくなっていることが分かる。成層が強い、 $Fr = 0.3$ の場合だと、球の移動速度の約 7 倍の速度を持つジェットが形成する。また、 Fr が大きくなると、ジェットが太くなっていることが確認できる。 $w-1$ の値が最大値の半分になる幅（半値幅）をジェットの太さと定義し、ジェットの太さの Fr 依存性を Fig. 11(b) に示す。この図より、強成層（低 Fr ）の下では、ジェットの太さが \sqrt{Fr} に比例していることが分かる。 Fr が大きくなると、密度が一般的な流体に近づくので、ジェットの太さは一定値に漸近する。

Fig. 12(a) は、ジェット断面内の $\nabla^2 \rho' / ReSc$ の分布を、様々な Fr で示した図である。球が流体を引き込むことで、ジェット内において密度変化が大きくなっているため、 $\nabla^2 \rho' / ReSc$ は大き

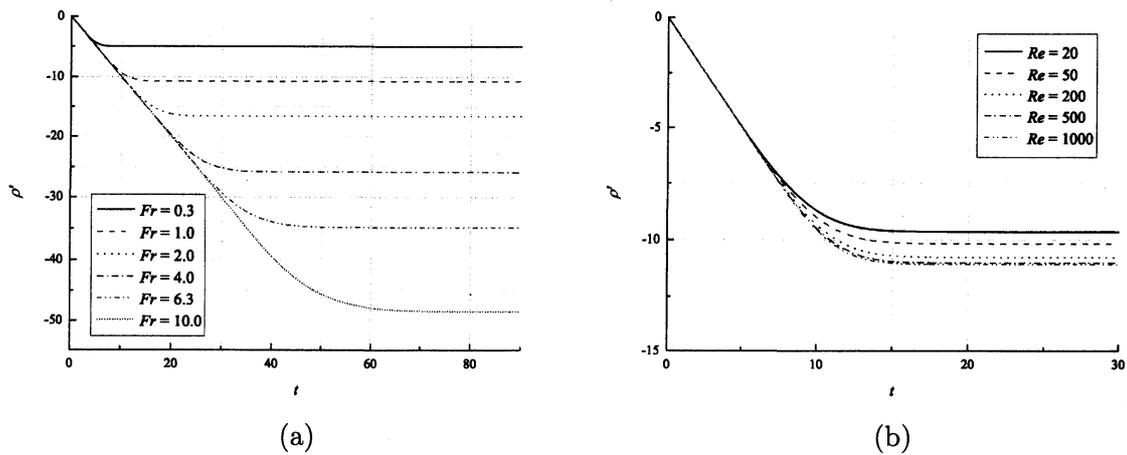


Fig. 10: Time development of the density perturbation ρ' at the upper stagnation point of the sphere ($\theta = 180^\circ$). (a) Froude number dependence ($Re = 200$), (b) Reynolds number dependence ($Fr = 1$).

くなる (Fig. 4(c) で黒くなっている領域). $w - 1$ で定義した場合と同様, $\nabla^2 \rho' / ReSc$ の半値幅をジェットのとさと定義し, Fr 依存性を示すと, Fig. 12(b) のようになる. この場合も, ジェットの太さが \sqrt{Fr} に比例していることが分かる.

同様に, Re についても, $w - 1$, $\nabla^2 \rho' / ReSc$ の半値幅でジェットのとさを定義し, Re 依存性を Fig. 13 に示すと, 双方において, ジェットの太さが $\sqrt{1/Re}$ に比例していることが分かる.

動粘性係数 ν とブラント・ヴァイサラ振動数 N を用いて次元解析を行い, 成層流体中における速度境界層の長さスケールを以下のように決める.

$$\begin{aligned} \lambda_\nu^* &= \sqrt{\frac{\nu}{N}} = \left(\frac{\nu}{2aW} \frac{W}{Na} 2a^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ \Leftrightarrow \lambda_\nu &= \frac{\lambda_\nu^*}{2a} = \left(\frac{Fr}{2Re} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (18)$$

同様に, 拡散係数 κ とブラント・ヴァイサラ振動数 N を用いて密度境界層の長さスケールを決めると,

$$\begin{aligned} \lambda_\kappa^* &= \sqrt{\frac{\kappa}{N}} = \left(\frac{\nu}{2aW} \frac{\kappa}{\nu} \frac{W}{Na} 2a^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ \Leftrightarrow \lambda_\kappa &= \frac{\lambda_\kappa^*}{2a} = \left(\frac{Fr}{2ReSc} \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (19)$$

となる. これらは, $\sqrt{Fr/Re}$ に比例しており, ジェットの太さはこの長さスケールで決まるといえる.

3.5 抗力係数の増加

Fig. 14(a) は, 球面における圧力の分布を, 様々な Fr で示した図である ($Re = 200$). Fr が小さくなると, 球後方で圧力が低下していることが分かる. これは, 球後方にジェットが形成され,

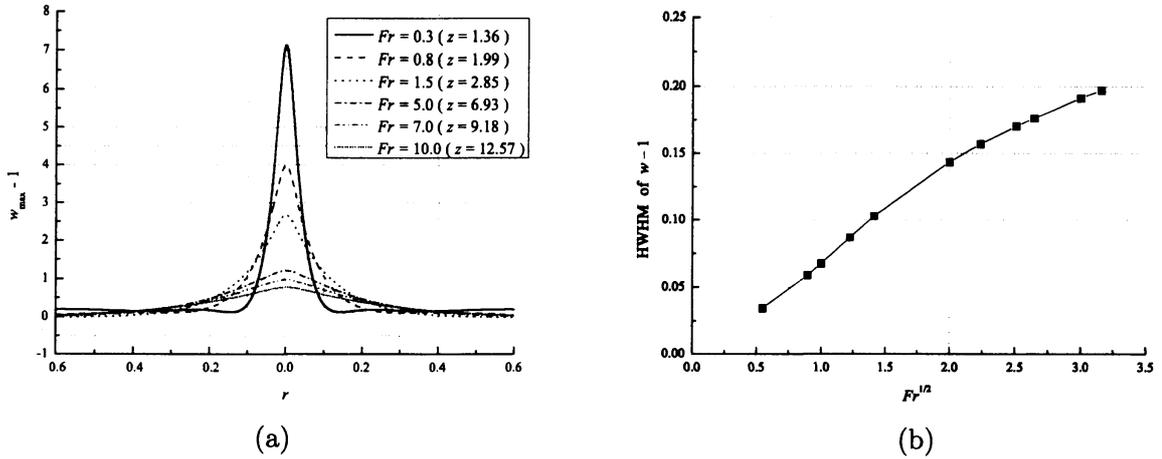


Fig. 11: (a) Froude number dependence of the steady state distribution of the vertical velocity $w - 1$ near the z axis at the height where w becomes maximum. (b) Froude number dependence of the half width at half maximum (HWHM) of $w - 1$.

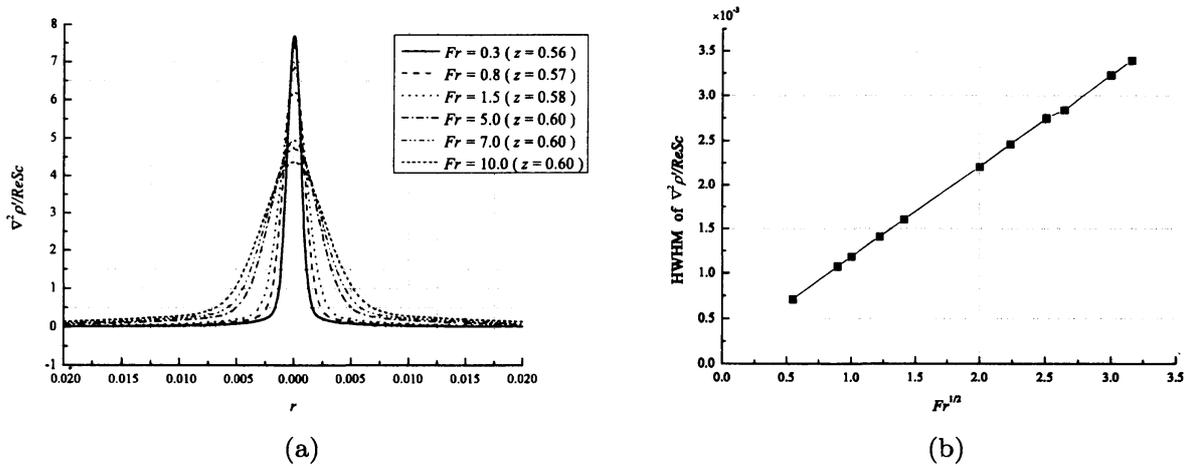


Fig. 12: (a) Froude number dependence of the steady state distribution of $\nabla^2 \rho' / ReSc$ near the z axis at the height where $\nabla^2 \rho' / ReSc$ becomes maximum. (b) Froude number dependence of the half width at half maximum (HWHM) of $\nabla^2 \rho' / ReSc$.

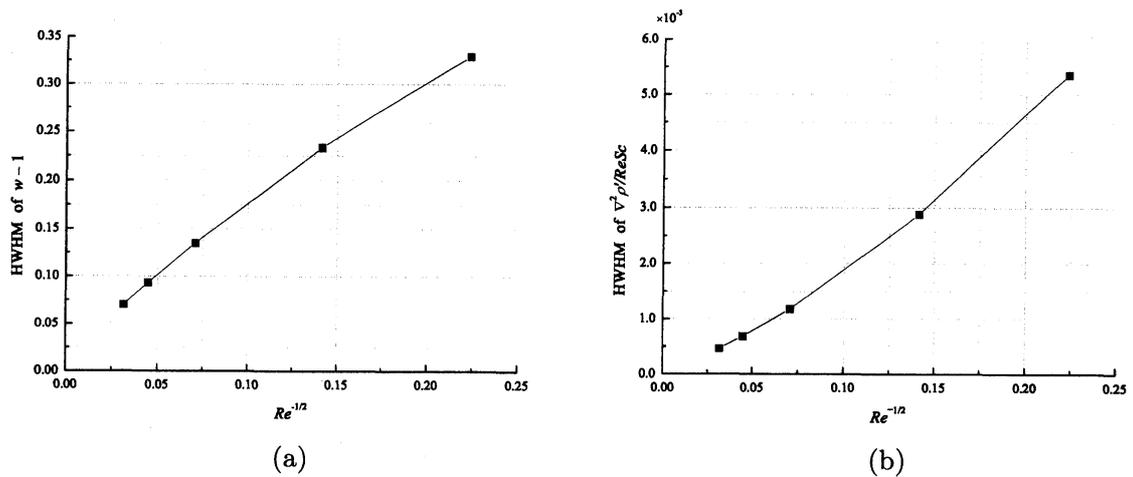


Fig. 13: Reynolds number dependence of HWHM of (a) $w - 1$, (b) $\nabla^2 \rho' / ReSc$.

速度が大きくなるためだと考えられる。そのため, Fig. 14(b)のように, 抗力係数 C_D は増加する。密度が一樣な流体中における, 抗力係数を C_D^H とすると,

$$C_D - C_D^H \propto \frac{1}{Fr} \quad , \quad (20)$$

がおおよそ成り立っており, 成層による抗力係数の増加分は $1/Fr$ に比例するということが分かる。

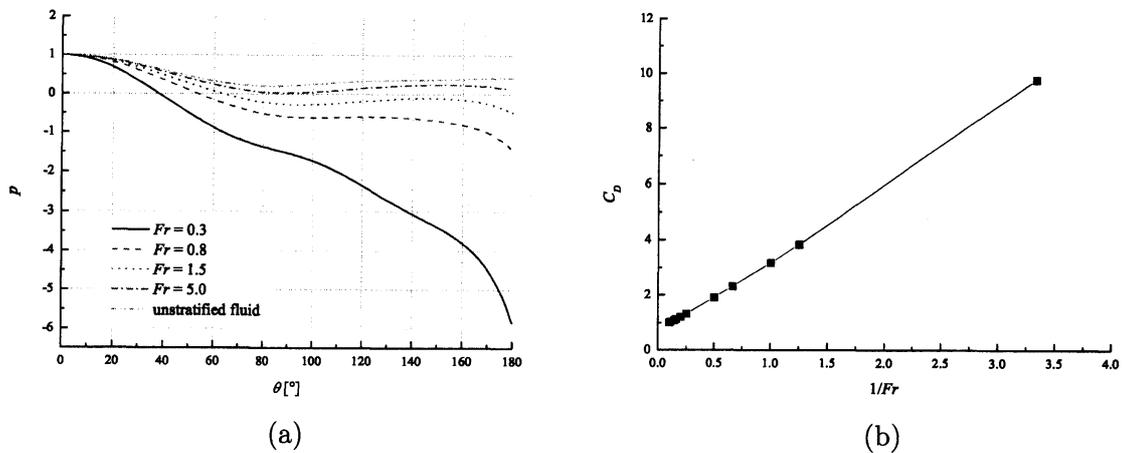


Fig. 14: (a) Pressure on the sphere surface. θ is the angle measured from the lower stagnation point. (b) Froude number dependence of the drag coefficient of the sphere. Both figures are drawn for $Re = 200$.

4 まとめ

成層流体中を鉛直移動する球によって形成されるジェットについて, 数値計算により解析した。球が移動すると後方に内部重力波が生成され, それによって, ジェットを囲むようなベル型の構造

が形成されることが分かった。そしてベル型構造が形成される位置は、内部重力波の波長 (πFr) に比例することが示された。ジェット形成過程を調べた結果、初期段階では密度は保存されるが、時間が経つにつれて保存が破れて拡散し、拡散した流体が上方に戻る際にジェットを形成することが分かった。等密度面は球によって引き込まれるが、その距離は Fr に比例し、 Re にはあまり依存しないということが示された。次元解析により、ジェットの太さは $\sqrt{Fr/Re}$ に比例することが示された。これは、 Fr が大きくなる（成層が弱くなる）につれて、ジェットが太くなるということの意味する。また、球後方にジェットが形成し速度が大きくなるため、球後方で圧力が増加し、抗力係数が $1/Fr$ に比例して増加することが示された。

参考文献

- [1] Ochoa, J. L. and Van Woert, M. L. 1977 Flow visualization of boundary layer separation in a stratified fluid. Unpublished report of Scripps Institute of Oceanography, pp. 28.
- [2] Torres, C .R., Hanazaki, H.,Castillo, J. and Van Woert, M. L. 2000 Flow past a sphere moving vertically in a stratified diffusive fluid. *J. Fluid Mech.* **417**, 211-236.
- [3] Hanazaki, H., Kashimoto, K. and Okamura, T. 2009 Jets generated by a sphere moving vertically in a stratified fluid. *J. Fluid Mech.* **638**, 173-197.
- [4] Hanazaki, H., Konishi, K. and Okamura, T. 2009 Schmidt number effects on the flow past a sphere moving vertically in a stratified diffusive fluid. *Phys. Fluids.* **21**, 026602.
- [5] Mowbray, D. E. and Rarity, B. S. H. 1967 The internal wave pattern produced by a sphere moving vertically in a density stratified liquid. *J. Fluid Mech.* **30**, 489-495.
- [6] Higginson, R. C., Dalziel, S. B. and Linden, P. F. 2003 The drag on a vertically moving grid of bars in a linearly stratified fluid. *Exp. Fluids.* **34**, 678-696.