

圧力擾乱抑制のための高精度粒子法の展開
Accurate Particle Methods for Attenuating Pressure Fluctuations

京都大学・工学研究科 後藤 仁志
Hitoshi Gotoh
Graduate School of Engineering
Kyoto University

講演要旨

MPS 法・ISPH 法に代表される半陰解法型粒子法の最大の弱点である圧力擾乱を抑制するための高精度粒子法に関して、講演者の研究グループの最近の取り組みを中心に紹介する。また、講演当日には、防波堤の耐波設計ツールとしての数値波動水槽への適用など、水工学上の問題への粒子法の貢献に関しても言及した。

1. MPS法と圧力擾乱

MPS法(Koshizuka and Oka, 1996)では、計算の安定化のために粒子間には常に斥力が作用している。このため、たとえ静水状態であっても個々の粒子は相互に反発し合い、粒子の座標は常に微小な変動を呈する。このことは粒子数密度（単位体積あたりの粒子数）の変動を意味し、粒子数密度の標準値からの偏差を陽に含む生成項を有するPoisson方程式

$$\nabla^2 p_{k+1} = \frac{\rho}{\Delta t^2} \frac{n_k^* - n_0}{n_0} \quad (1)$$

(p : 圧力, ρ : 流体密度, Δt : 計算時間間隔, n_k^* : k ステップの粒子数密度, n_0 : 粒子数密度の標準値)を陰的に解いて得られる圧力解は、瞬間値としては相当レベルの擾乱を伴うことになる。図-1は矩形水槽内の静水状態の圧力の瞬間値の空間分布、水槽底面の定点の圧力時系列と粒子数密度時系列の一例である。粒子数密度は変動はしつつも標準値付近に保たれているが（体積保存性は良好）、圧力に関しては、顕著なスパイク状の擾乱が見られる。

2. Poisson方程式の生成項と圧力擾乱の低減

上記の圧力擾乱の存在は、あくまで瞬間値としてのものであり、数ステップ分の移動平均をとればスパイク状の擾乱は消え、圧力値は静水圧値とよく一致する。しかし、瞬間圧力値が大きな擾乱を伴うことは、動圧評価上は問題であることから、幾つかの改善法が提案されている。最も簡便な方法としては僅かな圧縮性を許容す

る方法があるが、僅かな圧縮性の導入は圧力ノイズを低減させるが、ピーク圧力値も同様に低減するので衝撃圧の評価には使えない。

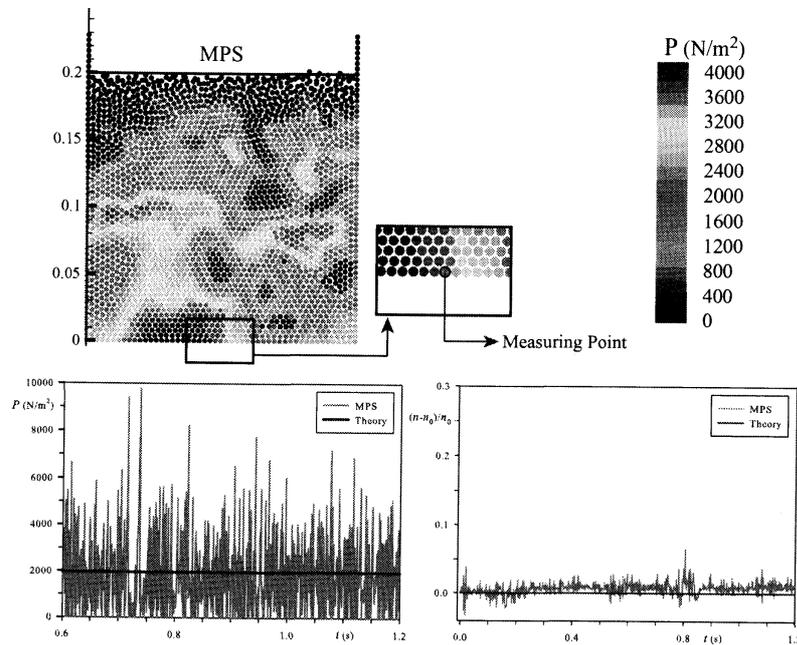


図-1 矩形水槽内の静水状態の圧力

比較的簡単な方法として半陰解法型粒子法の開発初期に導入されたのが、速度発散型の生成項を有するPoisson方程式

$$\frac{\Delta t}{\rho} (\nabla^2 p_{k+1})_i = \nabla \cdot \mathbf{u}^* \quad (2)$$

である(\mathbf{u}^* :陽的計算後の速度)。このPoisson方程式を用いる場合を後述の計算結果の比較ではMPS-DIVと呼ぶこととする。なお、MPS法では発散を

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{u} \rangle_i = \frac{D_s}{n_0} \sum_{j \neq i} \frac{(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) \cdot (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^2} w(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|) \quad (3)$$

と記述する。ここに、 D_s : 次元数, \mathbf{u}_i : 粒子*i*の速度ベクトル, \mathbf{r}_i : 粒子*i*の位置ベクトル, $w(r)$: kernel関数である。

図-2に、矩形水槽内の静水状態の圧力に関する計算結果を示すが、標準MPS法(粒子数密度偏差型生成項)と比較すると圧力擾乱は著しく改善されているが、体積保存性に大きな問題があり、この例では流体の体積は初期状態と比較して5%程度縮小する。体積保存性を確保しつつ圧力擾乱を低減するには、更なる工夫が必要と言える。

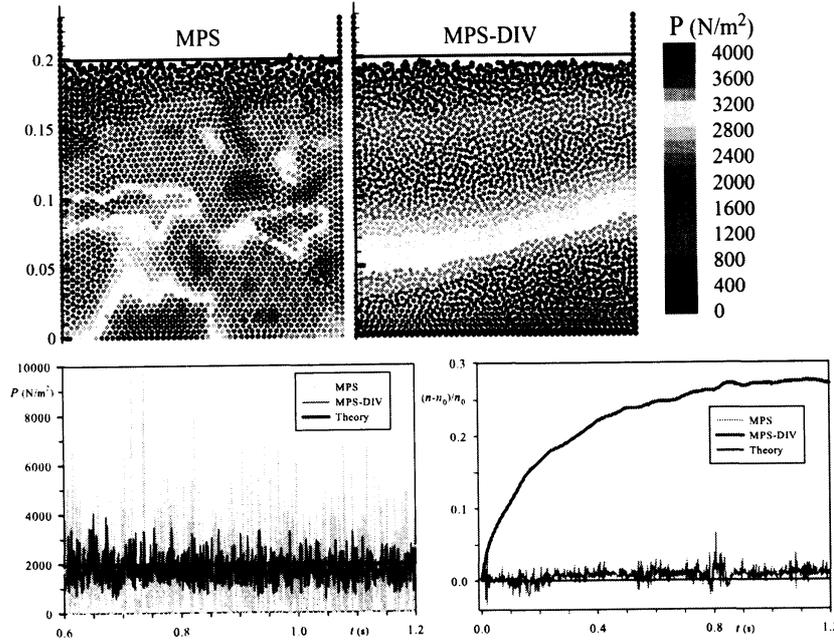


図-2 矩形水槽内の静水状態の圧力(MPS-DIV)

3. 高精度粒子法のオプションと圧力擾乱の低減

3.1 CMPS法 [Khayyer and Gotoh, 2008]

離散化の過程で運動量が保存されるには、粒子 i, j 間の作用力が反対称 (Anti-symmetric, 逆向き・等大) な関係を満たす必要がある。また角運動量に関しては、付加的なトルクが発生しないことが求められるので、2力が反対称かつ同一作用線上に存在すること(radial)が求められる。標準MPS法の圧力勾配モデル

$$\langle \nabla p \rangle_i = \frac{D_s}{n_0} \sum_{j \neq i} \frac{p_j - \hat{p}_i}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^2} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) w(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|) \quad (4)$$

$$\hat{p}_i = \min_{j \in J} (p_i, p_j) \quad , \quad J = \{j : w(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|) \neq 0\}$$

は、反対称ではないが、radialである。Laplacianモデル(粘性項)

$$\nu \langle \nabla^2 \mathbf{u} \rangle_i = \frac{2\nu D_s}{n_0 \lambda} \sum_{j \neq i} (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) w(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|) \quad (5)$$

(ν : 動粘性係数, λ : モデル定数) は、反対称であるが、radialではない。つまり、少なくとも運動量保存性を保証するには、反対称な勾配モデルを導入する必要があるが、CMPS法では、反対称な勾配モデル

$$\langle \nabla p \rangle_i = \frac{D_s}{n_0} \sum_{j \neq i} \frac{(p_i + p_j) - (\hat{p}_i + \hat{p}_j)}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^2} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) w(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|) \quad (6)$$

が用いられる。CMPS法やCMPS法に歪速度型の粘性項を導入したCMPS-SBV法は、MPS法と比較して、巻き波型砕波に見られるair chamberの出現や2次jetの発生・飛距

離などの現象の細部の再現性に優れていることが確認されている(Khayyer and Gotoh, 2008).

3.2 HS [Khayyer and Gotoh, 2009]

標準MPS法では、圧力のPoisson方程式の導出に際しては、質量保存則

$$\frac{1}{n_0} \frac{Dn}{Dt} + \nabla \cdot (\Delta \mathbf{u}_k^{**}) = 0 \quad (7)$$

において ($\Delta \mathbf{u}_k^{**}$: 第2段階すなわち陰的計算の速度修正量), 粒子数密度の時間微分項は,

$$\frac{Dn}{Dt} = \frac{n_0 - n_k^*}{\Delta t} \quad (8)$$

と記述されるが, 粒子数密度の定義に戻ってこの項を

$$\frac{Dn}{Dt} = \sum_{i \neq j} \frac{Dw(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|)}{Dt} \quad ; \quad n = \sum_{i \neq j} w(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|) \quad (9)$$

とすることで, Poisson方程式は

$$\left(\nabla^2 p_{k+1} \right)_i = - \frac{\rho}{n_0 \Delta t} \sum_{i \neq j} \frac{r_c}{r_{ij}^3} \mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{u}_{ij} \quad (10)$$

となる(r_c : 影響半径, すなわちkernelの中心から外縁までの距離). このように粒子数密度の定義を用いた生成項をKhayyer and Gotoh (2009) は, HS(Higher-order Source)と名付けた.

図-3にCMPS法及びCMPS-HS法によって計算された矩形水槽内の静水状態の圧力を, 図-4にはダム崩壊流れを, 標準MPS法と比較して示す. CMPS法及びCMPS-HS法によって圧力の擾乱が効果的に低減していることが分かる.

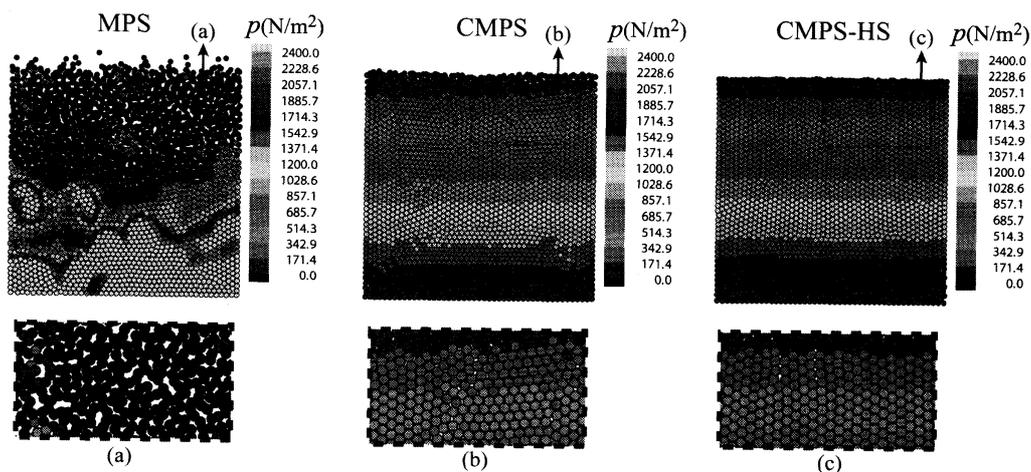


図-3 静水状態の比較(MPS, CMPS, CMPS-HS)

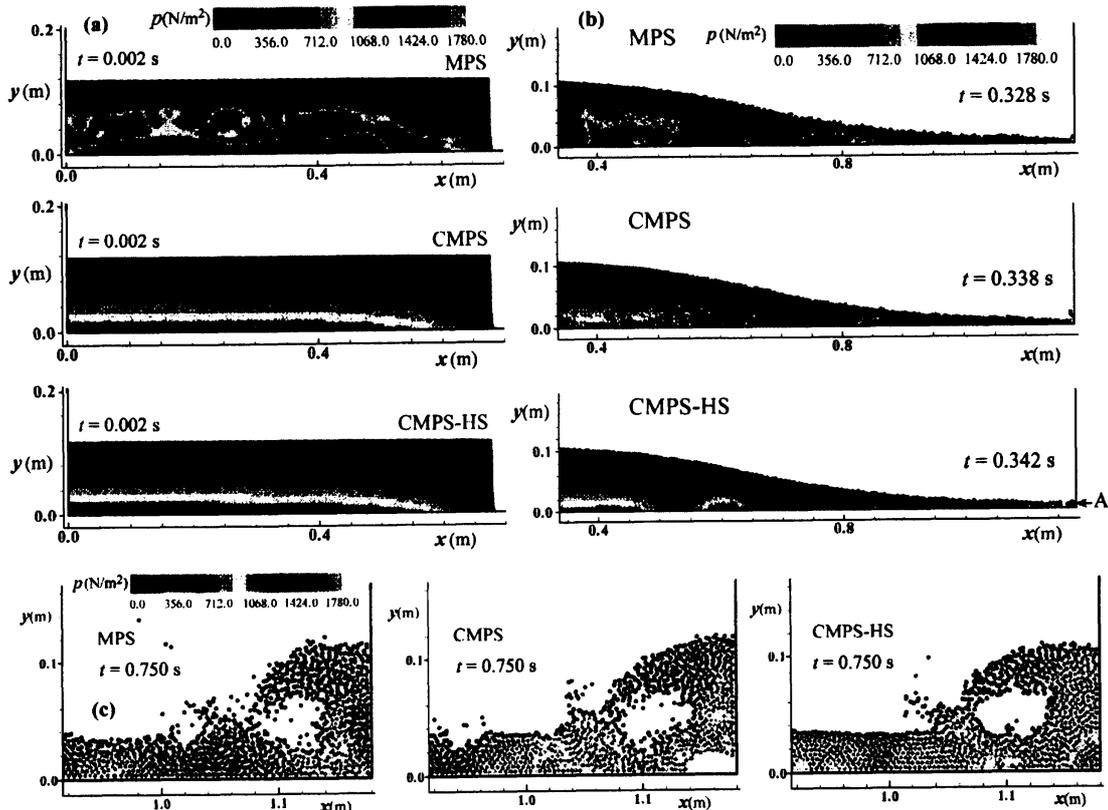


図-4 ダム崩壊流れと碎波の比較(MPS, CMPS, CMPS-HS)

3.3 HL [Khayyer and Gotoh, 2010]

Laplacianは勾配の発散であるから,

$$\langle \nabla^2 \phi \rangle_i = \nabla \cdot \langle \nabla \phi \rangle_i \quad (11)$$

勾配をSPH法の標準型勾配モデル

$$\langle \nabla \phi \rangle_i = \frac{1}{\sum_{i \neq j} w_{ij}} \sum_{i \neq j} (\phi_j - \phi_i) \nabla w_{ij} = \frac{1}{\sum_{i \neq j} w_{ij}} \sum_{i \neq j} \phi_{ij} \nabla w_{ij} \quad ; \quad \phi_{ij} = \phi_j - \phi_i \quad (12)$$

で与え、非圧縮性流体ではkernel関数の影響域内の総和が粒子数密度の標準値(n_0)に一致することを考慮すると,

$$\nabla \cdot \langle \nabla \phi \rangle_i = \frac{1}{n_0} \sum_{i \neq j} (\nabla \phi_{ij} \cdot \nabla w_{ij} + \phi_{ij} \nabla^2 w_{ij}) \quad ; \quad n_0 = (n_i)_0 = \left(\sum_{i \neq j} w_{ij} \right)_0 \quad (13)$$

が得られる。2次元場でMPS法のkernel関数を用いると

$$\nabla \cdot \langle \nabla \phi \rangle_i = \frac{1}{n_0} \sum_{i \neq j} \left(\frac{3\phi_{ij} r_e}{r_{ij}^3} \right) \quad (14)$$

となり、これをHL(High-order Laplacian)と呼ぶ。

3.4 ECS [Khayyer and Gotoh, 2011]

時間微分項が1次精度であること、陰解法のソルバーの精度の限界など、種々の要因が重なり、各時間ステップにおける誤差や時間進行とともに累積する誤差が生じる。このことにより、本来なら完全に確保されるべき流体の非圧縮性が僅かであるが損なわれる（粒子数密度に変動が生じる）。この問題の改善のため、Kondoh and Koshizuka(2011)はPoisson方程式の生成項に、粒子数密度の瞬間値の変動に対する補正項と粒子数密度の標準値からの偏差に対する補正項を導入した。この補正項を一般的な表式で書くと、

$$\text{PPE's Source Term} = \frac{1}{n_0} \left(\frac{Dn}{Dt} \right)_i^* + \alpha \left[\frac{1}{n_0} \left(\frac{Dn}{Dt} \right)_i^k \right] + \beta \left[\frac{1}{\Delta t} \left(\frac{n^k - n_0}{n_0} \right) \right] \quad (15)$$

となる。右辺第1項は通常の生成項の一般表示、第2項が粒子数密度の瞬間値の変動に対する補正項、第3項が粒子数密度の標準値からの偏差に対する補正項である。Kondoh and Koshizukaは、第2および第3項の係数 α , β をチューニングパラメータとしたが、Khayyer and Gotoh(2011)は、

$$\text{PPE's Source Term} = \frac{1}{n_0} \left(\frac{Dn}{Dt} \right)_i^* + \left[\left(\frac{n^k - n_0}{n_0} \right) \left[\frac{1}{n_0} \left(\frac{Dn}{Dt} \right)_i^k \right] + \left[\frac{\Delta t}{n_0} \left(\frac{Dn}{Dt} \right)_i^k \right] \right] \left[\frac{1}{\Delta t} \left(\frac{n^k - n_0}{n_0} \right) \right] \quad (16)$$

のように動的に係数を与える方法(ECS= Error Compensating parts in the Source term)を提案した。図-5 はplunging jet計算の例を示している。CMPS-HS法にHL, ECSと高精度化オプションを加えるにしたがって、air chamberの水表面が滑らかとなる。

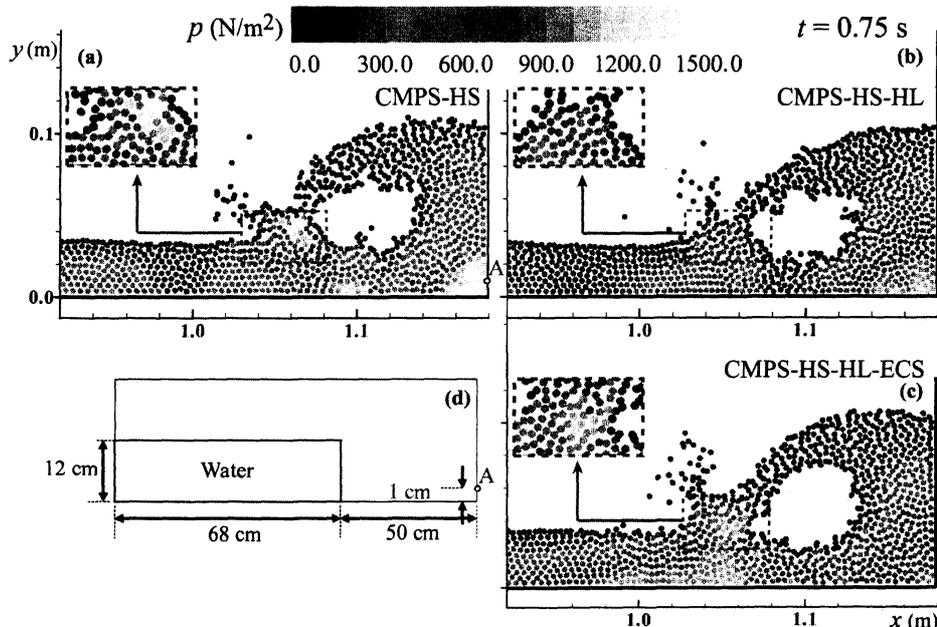


図-5 plunging jet計算の例 (HL, ECSの適用効果)

3.5 GC [Khayyer and Gotoh, 2011]

標準MPS法の勾配モデルは、均質な粒子配列を前提として導出されており、均質粒子配列ならば1次精度が保証されている。しかし、計算過程では時々刻々と移動する粒子の配列は不均質となるので、一般には1次精度すら保証されない。この問題への対応策として、Taylor級数との適合性を抛り所として粒子の座標の偏り（不均質性）の影響を補正することが考えられる。圧力 p の1次のTaylor級数適合性を保証するための修正行列 C_{ij} を導入した圧力勾配モデル

$$\langle \nabla p \rangle_i = \frac{D_s}{n_0} \sum_{j \neq i} \frac{p_j - p_i}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^2} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) C_{ij} w(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|) \quad (17)$$

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} \sum V_{ij} \frac{w_{ij} x_{ij}^2}{r_{ij}^2} & \sum V_{ij} \frac{w_{ij} x_{ij} y_{ij}}{r_{ij}^2} \\ \sum V_{ij} \frac{w_{ij} x_{ij} y_{ij}}{r_{ij}^2} & \sum V_{ij} \frac{w_{ij} y_{ij}^2}{r_{ij}^2} \end{pmatrix}^{-1} \quad (18)$$

をGC(=Gradient Correction)と呼ぶ (V_{ij} : 粒子の標準体積, $(x_{ij}, y_{ij}) = \mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i$)。

図-6 は、スロッシング計算の例であるが、GCの導入により、非物理的な飛沫発生が抑制され、圧力の等値線も滑らかとなる。

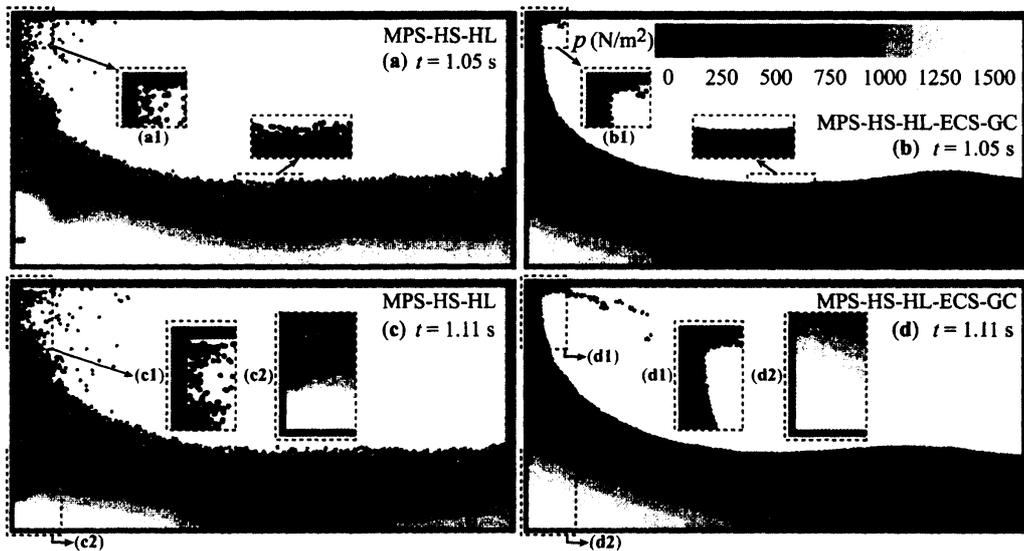


図-6 スロッシング計算の例 (ECS+GCの適用効果)

参考文献：

Khayyer, A. and Gotoh, H. (2008). "Development of CMPS method for accurate water-surface tracking in breaking waves," *Coastal Eng. J.* 50(2), 179-207.

- Khayyer, A. and Gotoh, H. (2009). "Modified Moving Particle Semi-implicit methods for the prediction of 2D wave impact pressure," *Coastal Eng.*, 56(4), 419-440.
- Khayyer, A. and Gotoh, H. (2010). "A Higher Order Laplacian Model for Enhancement and Stabilization of Pressure Calculation by the MPS Method," *Applied Ocean Res.*, 32, 124-131.
- Khayyer, A. and Gotoh, H. (2011). "Enhancement of stability and accuracy of the moving particle semi-implicit method," *Journal of Computational Physics*, 230(8), 3093-3118.
- Kondo, M. and Koshizuka, S. (2011). "Improvement of Stability in Moving Particle Semi-implicit method," *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 65, 638-654.
- Koshizuka, S. and Oka, Y. (1996). "Moving particle semi-implicit method for fragmentation of incompressible fluid," *Nuclear Science and Engineering*, 123, 421-434.