数理解析研究所講究録
第 1890 巻 2014 年 200-211

非線形シュレディンガー方程式の孤立波解の安定性解析

太田 雅人（東京理科大学 理学部数学科）
Masahito Ohta (Tokyo University of Science)

1. はじめに

非線形 Schrödinger 方程式

$$\text{(NLS)} \qquad i\partial_t u+\Delta u+|u|^{p-1}u=0, \quad (t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$$

について考える．ここで，$u=u(t,x)$ は複素数値の未知関数である．また，

$$2^*:=\begin{cases}2N/(N-2) & (N\geq 3)\\ \infty & (N=1,2)\end{cases}$$

を Sobolev の埋蔵定理 $H^1(\mathbb{R}^N)\hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$ の臨界指数とし，$1<p<2^*-1$ を仮定する．また，$1\leq q<\infty$ に対して，Lebesgue 空間 $L^q(\mathbb{R}^N)$ のノルムを

$$\|u\|_{L^q}=\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u(x)|^q\,dx\right)^{1/q}$$

と表し，$L^2:=L^2(\mathbb{R}^N,\mathbb{C})$, $H^1:=H^1(\mathbb{R}^N,\mathbb{C})$ はそれぞれ，内積

$$(u,v)_{L^2}:=\Re\int_{\mathbb{R}^N}u(x)\overline{v(x)}\,dx, \quad (u,v)_{H^1}=(u,v)_{L^2}+(\nabla u,\nabla v)_{L^2}$$

を備えた実 Hilbert 空間とする．

本稿では，(NLS) の定在波解 $u(t,x)=e^{i\omega t}\varphi(x)$ の安定性と不安定性について考える．ここで，$\omega>0$ は定数，$\varphi\in H^1(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}$ で，$\varphi(x)$ は定常問題

$$\text{(SP)} \qquad -\Delta\varphi+\omega\varphi-|\varphi|^{p-1}\varphi=0, \quad x\in\mathbb{R}^N$$

の解とする．

まず，(NLS) に関する基本的な結果をまとめておこう．$u\in H^1$ に対して，

$$E(u):=\frac{1}{2}\|\nabla u\|_{L^2}^2-\frac{1}{p+1}\|u\|_{L^{p+1}}^{p+1}, \quad Q(u):=\frac{1}{2}\|u\|_{L^2}^2$$

とおき，E をエネルギー，Q を電荷と呼ぶ．エネルギー空間 H^1 における (NLS) の初期値問題の適切性に関して次が知られている．

命題1 $1 < p < 2^*-1$ とする．任意の初期データ $u_0 \in H^1$ に対して，$T^* = T^*(u_0) \in (0,\infty]$ が存在して，初期条件 $u(0) = u_0$ を満たす (NLS) の解 $u \in C([0,T^*), H^1)$ が一意的に存在する．また，エネルギー及び電荷の保存則

$$E(u(t)) = E(u_0), \quad Q(u(t)) = Q(u_0), \quad \forall t \in [0,T^*)$$

が成り立つ．さらに，$T^* < \infty$ ならば $\lim_{t\to T^*} \|\nabla u(t)\|_{L^2} = \infty$. □

命題1を含む，より一般的な定理が Ginibre and Velo [10], Kato [14] などによって証明されている．教科書 Cazenave [5], 堤 [22] も参照のこと．

2. 定常問題

この節では，$\omega > 0$, $1 < p < 2^* - 1$ とし，定常問題

$$\text{(SP)} \qquad -\Delta\varphi + \omega\varphi - |\varphi|^{p-1}\varphi = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

について考える．(SP) に対応する作用汎関数 $S_\omega : H^1 \to \mathbb{R}$ を

$$S_\omega(u) := \frac{1}{2}\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \frac{\omega}{2}\|u\|_{L^2}^2 - \frac{1}{p+1}\|u\|_{L^{p+1}}^{p+1}$$

と定める．このとき，$S_\omega : H^1 \to \mathbb{R}$ は C^2 級であり, $\varphi \in H^1$ に対して

$$\text{(SP)} \iff S_\omega'(\varphi) = 0$$

である．また，$y \in \mathbb{R}^N$ に対して，$\tau_y u(x) = u(x+y)$ とするとき，任意の $\theta \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^N$, $u \in H^1$ に対して, $S_\omega(e^{i\theta}\tau_y u) = S_\omega(u)$ が成り立つことに注意する．

定義 (SP) の非自明解全体の集合を $\mathcal{A}_\omega := \{u \in H^1 : S_\omega'(u) = 0,\ u \neq 0\}$ とし，

$$\mathcal{G}_\omega := \{u \in \mathcal{A}_\omega : S_\omega(u) \leq S_\omega(v) \quad \forall v \in \mathcal{A}_\omega\}$$

とおく．$\mathcal{G}_\omega$ の元を (SP) の基底状態といい，$\mathcal{A}_\omega \setminus \mathcal{G}_\omega$ の元，すなわち，(SP) の非自明解で基底状態でないものを (SP) の励起状態という． □

(SP) を含む一般的な半線形楕円型方程式の基底状態及び励起状態の存在が，Strauss [21], Berestycki and Lions [2], Brezis and Lieb [4] などにより，それぞれ，異なるコンパクト性定理を用いて証明されている．

以下では，主に，Brezis and Lieb [4] に基づいて，(SP) の基底状態の存在を証明しよう．

そのための準備として，次を定義する．

$$K_\omega(u) := \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \omega\|u\|_{L^2}^2 - \|u\|_{L^{p+1}}^{p+1},$$
$$\mathcal{K}_\omega := \{u \in H^1 : K_\omega(u) = 0,\ u \neq 0\},$$
$$d(\omega) := \inf\{S_\omega(u) : u \in \mathcal{K}_\omega\},$$
$$\mathcal{M}_\omega := \{u \in \mathcal{K}_\omega : S_\omega(u) = d(\omega)\}.$$

ここで，$\lambda > 0$, $u \in H^1$ に対して

$$S_\omega(\lambda u) = \frac{\lambda^2}{2}\left(\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \omega\|u\|_{L^2}^2\right) - \frac{\lambda^{p+1}}{p+1}\|u\|_{L^{p+1}}^{p+1}$$

であり，$K_\omega(u) = \partial_\lambda S_\omega(\lambda u)|_{\lambda=1} = \langle S'_\omega(u), u\rangle$, $\mathcal{G}_\omega \subset \mathcal{A}_\omega \subset \mathcal{K}_\omega$ に注意する．

基底状態の存在を示すための鍵となるのは，次の2つの基本定理である．

Lieb のコンパクト性定理 ([17]) $\{u_n\}$ は $H^1(\mathbb{R}^N)$ の有界列で，ある $q \in (2, 2^*)$ に対して，$\inf_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} > 0$ を満たすとする．このとき，$\mathbb{R}^N$ の点列 $\{y_n\}$, $v \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$, 部分列 $\{n_j\}$ で，$\tau_{y_{n_j}} u_{n_j} \rightharpoonup v$ weakly in $H^1(\mathbb{R}^N)$ を満たすものが存在する．

Brezis-Lieb の補題 ([3]) $1 < q < \infty$ とする．$\{u_n\}$ は $L^q(\mathbb{R}^N)$ の有界列で，$u_n \to u$ a.e. in $\mathbb{R}^N$ とする．このとき，$u \in L^q(\mathbb{R}^N)$ であり

$$\lim_{n\to\infty}\{\|u_n\|_{L^q}^q - \|u_n - u\|_{L^q}^q\} = \|u\|_{L^q}^q.$$

注意 $2 \leq q < 2^*$ のとき，$\{u_n\}$ が H^1 の有界列ならば，部分列をとることにより，Brezis-Lieb の補題の仮定は満たされる．

また，X が Hilbert 空間のとき，$u_n \rightharpoonup u$ weakly in X ならば

$$\lim_{n\to\infty}\{\|u_n\|_X^2 - \|u_n - u\|_X^2\} = \|u\|_X^2$$

が成り立つことは容易に分かる． □

Lieb のコンパクト性定理と Brezis-Lieb の補題の証明はこの節の最後に与える．以下，この2つの基本定理を用いて，(SP) の基底状態の存在を示す．

補題 1 $\mathcal{M}_\omega \subset \mathcal{G}_\omega$.

証明 $u \in \mathcal{M}_\omega$ とする．このとき，$\langle K'_\omega(u), u\rangle = \partial_\lambda K_\omega(\lambda u)|_{\lambda=1} \neq 0$ だから，Lagrange の未定乗数定理より，$\exists\mu \in \mathbb{R}$ s.t. $S'_\omega(u) = \mu K'_\omega(u)$. このとき

$$0 = K_\omega(u) = \langle S'_\omega(u), u\rangle = \mu\langle K'_\omega(u), u\rangle, \quad \langle K'_\omega(u), u\rangle \neq 0$$

だから，$\mu = 0$ であり，$S'_\omega(u) = 0$. よって，$u \in \mathcal{A}_\omega$.

さらに，$\mathcal{A}_\omega \subset \mathcal{K}_\omega$ だから，$\forall v \in \mathcal{A}_\omega$ に対して，$S_\omega(u) = d(\omega) \le S_\omega(v)$. よって，$u \in \mathcal{G}_\omega$ となり，$\mathcal{M}_\omega \subset \mathcal{G}_\omega$ が示された． □

補題 2 $\mathcal{M}_\omega$ が空集合でないならば $\mathcal{G}_\omega = \mathcal{M}_\omega$.

証明 $\mathcal{G}_\omega \subset \mathcal{M}_\omega$ を示せばよい．$u \in \mathcal{G}_\omega$ を任意にとる．また，$\mathcal{M}_\omega$ は空でないから，$w \in \mathcal{M}_\omega$ をとる．このとき，補題 1 より，$w \in \mathcal{A}_\omega$ であり，$u \in \mathcal{G}_\omega$ だから，$S_\omega(u) \le S_\omega(w) = d(\omega)$.

一方，$u \in \mathcal{G}_\omega \subset \mathcal{K}_\omega$ だから，$d(\omega)$ の定義より，$d(\omega) \le S_\omega(u)$.

よって，$S_\omega(u) = d(\omega)$ となり，$u \in \mathcal{M}_\omega$. よって，$\mathcal{G}_\omega \subset \mathcal{M}_\omega$ が示された． □

補題 2 より，$\mathcal{M}_\omega$ が空でないことを示せばよいが，より強い次の定理を示そう．

定理 3 $\{u_n\} \subset H^1$, $K_\omega(u_n) \to 0$, $S_\omega(u_n) \to d(\omega)$ とする．このとき，$\{y_n\} \subset \mathbb{R}^N$, 部分列 $\{n_j\}$, $v \in \mathcal{M}_\omega$ が存在して，$\tau_{y_{n_j}} u_{n_j} \to v$ in $H^1(\mathbb{R}^N)$. □

定理 3 を証明するために，いくつか準備をする．まず，汎関数

$$\tilde{S}_\omega(u) := \frac{p-1}{2(p+1)}\left(\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \omega\|u\|_{L^2}^2\right), \quad V(u) := \frac{p-1}{2(p+1)}\|u\|_{L^{p+1}}^{p+1}$$

を定義する．このとき，

$$S_\omega(u) = \tilde{S}_\omega(u) + \frac{1}{p+1}K_\omega(u) = V(u) + \frac{1}{2}K_\omega(u),$$

$$d(\omega) = \inf\{\tilde{S}_\omega(u) : u \in \mathcal{K}_\omega\} = \inf\{V(u) : u \in \mathcal{K}_\omega\}$$

であり，$d(\omega) \ge 0$ に注意する．

補題 4 $d(\omega) > 0$.

証明 $u \in \mathcal{K}_\omega$ を任意にとる．このとき，$K_\omega(u) = 0$ と Sobolev の不等式より，正定数 C_1, C_2, C_3 が存在して

$$C_1\tilde{S}_\omega(u) = \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \omega\|u\|_{L^2}^2 = \|u\|_{L^{p+1}}^{p+1} \le C_2\|u\|_{H^1}^{p+1} \le C_3\tilde{S}_\omega(u)^{(p+1)/2}.$$

ここで，$u \ne 0$ だから，$\tilde{S}_\omega(u)^{(p-1)/2} \ge C_1/C_3$. よって，$d(\omega) \ge (C_1/C_3)^{2/(p-1)} > 0$ が成り立つ． □

補題 5 $K_\omega(u) < 0$ ならば，$\tilde{S}_\omega(u) > d(\omega)$, $V(u) > d(\omega)$.

証明 $\lambda \mapsto K_\omega(\lambda u)$ のグラフより，$\exists \lambda_0 \in (0,1)$ s.t. $K_\omega(\lambda_0 u) = 0$. また，$u \ne 0$ だから，$\lambda_0 u \in \mathcal{K}_\omega$. これから，$d(\omega) \le \tilde{S}_\omega(\lambda_0 u) < \tilde{S}_\omega(u)$, $d(\omega) \le V(\lambda_0 u) < V(u)$ となる． □

以上の準備のもとで，定理3を証明しよう．

定理3の証明 まず，$S_\omega(u_n) \to d(\omega)$, $K_\omega(u_n) \to 0$ より，$\tilde{S}_\omega(u_n) \to d(\omega)$ だから，$\{u_n\}$ は H^1 の有界列である．また，$V(u_n) \to d(\omega)$ であり，補題4より，$d(\omega) > 0$ だから，Lieb のコンパクト性定理より，$\{y_n\} \subset \mathbb{R}^N$, 部分列 (以下, 部分列を同じ記号で書く), $v \in H^1 \setminus \{0\}$ が存在して，$v_n := \tau_{y_n} u_n \rightharpoonup v$ weakly in H^1.

また, Brezis-Lieb の補題より

$$\tilde{S}_\omega(v_n) - \tilde{S}_\omega(v_n - v) \to \tilde{S}_\omega(v), \tag{1}$$

$$K_\omega(v_n) - K_\omega(v_n - v) \to K_\omega(v). \tag{2}$$

ここで，$K_\omega(v) > 0$ と仮定すると，$K_\omega(v_n) = K_\omega(u_n) \to 0$ だから，(2) より，$K_\omega(v_n - v) \to -K(v) < 0$. よって，十分大きな n に対して，$K_\omega(v_n - v) < 0$ だから，補題5より，$\tilde{S}_\omega(v_n - v) > d$. このとき，$\tilde{S}_\omega(v_n) = \tilde{S}_\omega(u_n) \to d(\omega)$ だから，(1) より，$\tilde{S}_\omega(v) \le 0$ となるが，これは $v \neq 0$ であることと矛盾する．よって，$K_\omega(v) \le 0$ である．

また，$K_\omega(v) < 0$ と仮定すると，補題5より，$\tilde{S}_\omega(v) > d$ となるが，一方で，$v_n \rightharpoonup v$ weakly in H^1 より，$\tilde{S}_\omega(v) \le \liminf_{n\to\infty} \tilde{S}_\omega(v_n) = d(\omega)$ だから，これも矛盾である．よって，$K_\omega(v) = 0$ となり，$v \in \mathcal{K}_\omega$. さらに，$d(\omega)$ の定義と $v_n \rightharpoonup v$ weakly in H^1 より，

$$d(\omega) \le S_\omega(v) = \tilde{S}_\omega(v) \le \liminf_{n\to\infty} \tilde{S}_\omega(v_n) = d(\omega).$$

これから，$S_\omega(v) = d(\omega)$ だから，$v \in \mathcal{M}_\omega$. さらに，$\|v_n\|_{H^1} \to \|v\|_{H^1}$ だから，$v_n \to v$ in H^1 となることが分かる． □

最後に，Lieb のコンパクト性定理と Brezis-Lieb の補題の証明を与える．

Lieb のコンパクト性定理の証明 はじめに，

$$C_1 = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)}, \quad C_2 = \inf_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|^q_{L^q(\mathbb{R}^N)}, \quad C_3 = \frac{C_1+1}{C_2}$$

とおく．また，$y = (y^1, ..., y^N) \in \mathbb{Z}^N$ に対して，

$$Q_y = \{x = (x^1, ..., x^N) \in \mathbb{R}^N : y^j < x^j < y^j + 1 \ (j = 1, ..., N)\}$$

とおく．このとき，$\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists y_n \in \mathbb{Z}^N$ s.t.

$$\|u_n\|^2_{H^1(Q_{y_n})} \le C_3 \|u_n\|^q_{L^q(Q_{y_n})} \tag{3}$$

が成り立つ．実際，これが成り立たないと仮定すると，$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ s.t.

$$\|u_{n_0}\|^2_{H^1(Q_y)} > C_3 \|u_{n_0}\|^q_{L^q(Q_y)}, \quad \forall y \in \mathbb{Z}^N.$$

このとき，

$$\begin{aligned} C_1 \geq \|u_{n_0}\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} &= \sum_{y \in \mathbb{Z}^N} \|u_{n_0}\|^2_{H^1(Q_y)} \\ &\geq C_3 \sum_{y \in \mathbb{Z}^N} \|u_{n_0}\|^q_{L^q(Q_y)} = C_3 \|u_{n_0}\|^q_{L^q(\mathbb{R}^N)} \geq C_3 C_2 = C_1 + 1 \end{aligned}$$

となり，矛盾が生じる．故に，(3) を満たす点列 $\{y_n\} \subset \mathbb{R}^N$ が存在する．

この点列 $\{y_n\} \subset \mathbb{R}^N$ に対して，$v_n := \tau_{y_n} u_n$ とおくと

$$\|v_n\|^2_{H^1(Q_0)} \leq C_3 \|v_n\|^q_{L^q(Q_0)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

さらに，Sobolev の埋蔵定理より，N と q のみに依存する定数 $C_4 > 0$ が存在して，$C_4 \|v_n\|^2_{L^q(Q_0)} \leq \|v_n\|^2_{H^1(Q_0)}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ だから，

$$0 < C_4 / C_3 \leq \|v_n\|^{q-2}_{L^q(Q_0)}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{4}$$

が成り立つ．ここで，$\{v_n\}$ は $H^1(\mathbb{R}^N)$ の有界列だから，ある部分列 $\{n_j\}$ と $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ が存在して，$v_{n_j} \rightharpoonup v$ weakly in $H^1(\mathbb{R}^N)$. さらに，埋め込み $H^1(Q_0) \hookrightarrow L^q(Q_0)$ はコンパクトだから，(4) より，$\|v\|_{L^q(Q_0)} \geq (C_4/C_3)^{1/(q-2)} > 0$ となり，$v \neq 0$ である． □

Brezis-Lieb の補題の証明　まず，$M = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|u_n\|_{L^q}$ とおくと，Fatou の補題より，$\|u\|^q_{L^q} \leq \liminf_{n \to \infty} \|u_n\|^q_{L^q} \leq M^q$ であり，$u \in L^q(\mathbb{R}^N)$ に注意する．

$v_n(x) = u_n(x) - u(x)$ とおく．また，$\varepsilon > 0$ を任意にとり，

$$W_{\varepsilon,n}(x) = \Big[\big| |v_n(x) + u(x)|^q - |v_n(x)|^q - |u(x)|^q \big| - \varepsilon |v_n(x)|^q \Big]_+$$

とおく．ここで，$\alpha \in \mathbb{R}$ に対して，$[\alpha]_+ = \max\{\alpha, 0\}$ である．

仮定より，$n \to \infty$ のとき，$W_{\varepsilon,n} \to 0$ a.e. in $\mathbb{R}^N$.

また，$\exists C_\varepsilon > 0$ s.t. $\big||a+b|^q - |a|^q\big| \leq \varepsilon |a|^q + C_\varepsilon |b|^q$ $(a, b \in \mathbb{C})$ だから

$$\begin{aligned} &\big| |v_n(x) + u(x)|^q - |v_n(x)|^q - |u(x)|^q \big| \\ &\leq \big| |v_n(x) + u(x)|^q - |v_n(x)|^q \big| + |u(x)|^q \leq \varepsilon |v_n(x)|^q + (C_\varepsilon + 1) |u(x)|^q. \end{aligned}$$

よって，$0 \le W_{\varepsilon,n} \le (C_\varepsilon + 1)|u|^q \in L^1(\mathbb{R}^N)$ だから，Lebesgue の優収束定理より，$n \to \infty$ のとき，$\int_{\mathbb{R}^N} W_{\varepsilon,n}(x)\,dx \to 0$ が成り立つ．さらに，

$$\big|\,|v_n(x)+u(x)|^q - |v_n(x)|^q - |u(x)|^q\,\big| \le W_{\varepsilon,n}(x) + \varepsilon |v_n(x)|^q$$

だから，$I_n := \int_{\mathbb{R}^N} \big|\,|v_n(x)+u(x)|^q - |v_n(x)|^q - |u(x)|^q\,\big|\,dx$ とおくと，

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} I_n &\le \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} W_{\varepsilon,n}(x)\,dx + \varepsilon \limsup_{n\to\infty} \|v_n\|_{L^q}^q \\ &\le \varepsilon \sup_{n\in\mathbb{N}} \{\|u_n\|_{L^q} + \|u\|_{L^q}\}^q \le \varepsilon (2M)^q.\end{aligned}$$

ここで，$\varepsilon > 0$ は任意だから，$I_n \to 0$ となり，補題が証明された． □

3. 基底状態の安定性

この節では，非線形 Schrödinger 方程式

$$\text{(NLS)} \qquad i\partial_t u + \Delta u + |u|^{p-1}u = 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$$

の定在波解 $u(t,x) = e^{i\omega t}\phi_\omega(x)$ の安定性について考える．ここで，$1 < p < 2^* - 1$，$\omega > 0$ とし，$\phi_\omega(x)$ は定常問題

$$\text{(SP)} \qquad -\Delta\varphi + \omega\varphi - |\varphi|^{p-1}\varphi = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

の基底状態とする．このとき，次が成り立つ．

定理 1　$1 < p < 1 + 4/N$, $\omega > 0$, $\phi_\omega \in \mathcal{G}_\omega$ とする．このとき，(NLS) の定在波解 $e^{i\omega t}\phi_\omega(x)$ は次の意味で安定である：$\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$ s.t. $\|u_0 - \phi_\omega\|_{H^1} < \delta$ ならば，$u(0) = u_0$ なる (NLS) の解 $u(t)$ は時間大域的に存在し，$\forall t \in [0,\infty)$ に対して

$$\inf_{w\in\mathcal{G}_\omega} \|u(t) - w\|_{H^1} < \varepsilon.$$

注意　$\phi_\omega \in \mathcal{G}_\omega$ とすると，対称性より，$\{e^{i\theta}\tau_y\phi_\omega : \theta \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^N\} \subset \mathcal{G}_\omega$ である．

一方，$\exists\theta \in \mathbb{R}$ s.t. $e^{i\theta}\phi_\omega(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^N$ ([5] p.266 参照）であり，Gidas-Ni-Nirenberg [9] より，ある $y \in \mathbb{R}^N$ が存在して，$e^{i\theta}\tau_y\phi_\omega(x)$ は原点に関して球対称となる．さらに，(SP) の正値球対称解は一意的 (Kwong [15]) だから，

$$\mathcal{G}_\omega = \{e^{i\theta}\tau_y\phi_\omega : \theta \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}^N\}$$

が成り立つ．この基底状態の一意性と定理 1 から次が成り立つ．

定理 1' $1 < p < 1 + 4/N$, $\omega > 0$, $\phi_\omega \in \mathcal{G}_\omega$ とする．このとき，(NLS) の定在波解 $e^{i\omega t}\phi_\omega(x)$ は次の意味で安定である：$\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$ s.t. $\|u_0 - \phi_\omega\|_{H^1} < \delta$ ならば，$u(0) = u_0$ なる (NLS) の解 $u(t)$ は時間大域的に存在し，$\forall t \in [0, \infty)$ に対して

$$\inf_{\theta\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R}^N} \|u(t) - e^{i\theta}\tau_y\phi_\omega\|_{H^1} < \varepsilon$$

が成り立つ． □

定理 1 は Cazenave and Lions [6] による．また，非線形 Klein-Gordon 方程式

$$\text{(NLKG)} \qquad \partial_t^2 u - \Delta u + u = |u|^{p-1}u, \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$$

に対して，同様の結果が Shatah [19] により証明された．Cazenave and Lions [6] と Shatah [19] の証明はどちらも基底状態の変分的特徴付けに基づいている．一方，定在波解のまわりで方程式を線形化し，その線形化作用素のスペクトル解析を用いて安定性を示す方法が Weinstein [23], Grillakis, Shatah and Strauss [13] で与えられている．一方，不安定性に関しては次が成り立つ．

定理 2 $1+4/N \le p < 2^* - 1$, $\omega > 0$, $\phi_\omega \in \mathcal{G}_\omega$ とする．このとき，$\forall\varepsilon > 0$, $\exists u_0 \in H^1$ s.t. $\|u_0 - \phi_\omega\|_{H^1} < \varepsilon$ かつ $T^*(u_0) < \infty$. 特に，(NLS) の定在波解 $e^{i\omega t}\phi_\omega(x)$ は定理 1 の意味で安定ではない． □

定理 2 は Berestycki and Cazenave [1] による（証明については，教科書 [5, 22] を参照のこと）．また，(NLKG) に対して，同様の結果が Shatah and Strauss [20] により証明されている．さらに，関連する論文として [13, 11, 7, 18] をあげておく．

以下，Shatah [19] に従って，定理 1 を証明しよう．$\omega > 0$ に対して

$$\mathcal{R}_\omega^+ := \{u \in H^1 : S_\omega(u) < d(\omega),\ V(u) > d(\omega)\},$$
$$\mathcal{R}_\omega^- := \{u \in H^1 : S_\omega(u) < d(\omega),\ V(u) < d(\omega)\}$$

と定める．

補題 3 $\mathcal{R}_\omega^+$ は (NLS) の流れに関して不変である．すなわち，$u_0 \in \mathcal{R}_\omega^+$ とし，$u(t)$ を $u(0) = u_0$ なる (NLS) の解とすると，$\forall t \in [0, T^*)$ に対して，$u(t) \in \mathcal{R}_\omega^+$ が成り立つ．また，$\mathcal{R}_\omega^-$ も (NLS) の流れに関して不変である．

証明 $\mathcal{R}_\omega^-$ に関しても同様だから，$\mathcal{R}_\omega^+$ が不変集合であることを示す．

$u_0 \in \mathcal{R}_\omega^+$ とし，$u(t)$ を $u(0) = u_0$ なる (NLS) の解とする．このとき，エネルギー及び電荷の保存則より

$$S_\omega(u(t)) = S_\omega(u_0) < d(\omega), \quad \forall t \in [0, T^*). \tag{5}$$

よって，$V(u(t)) > d(\omega), \forall t \in [0, T^*)$ を示せばよい．これが成り立たないと仮定すると，$\exists t_0 \in (0, T^*)$ s.t. $V(u(t_0)) = d(\omega)$. このとき，§2の補題5より，$K_\omega(u(t_0)) \geq 0$ だから，

$$S_\omega(u(t_0)) = V(u(t_0)) + \frac{1}{2} K_\omega(u(t_0)) \geq d(\omega)$$

となるが，これは (5) と矛盾する．故に，$V(u(t)) > d(\omega), \forall t \in [0, T^*)$ が成り立ち，$\mathcal{R}_\omega^+$ が不変集合であることが示された． □

補題4 $1 < p < 1 + 4/N$ のとき，$\forall \omega > 0$ に対して，$d''(\omega) > 0$.

証明 (SP) のスケール不変性より，$\varphi_\omega(x) = \omega^{1/(p-1)} \varphi(\sqrt{\omega} x)$ とすると，$\varphi_\omega \in \mathcal{A}_\omega \iff \varphi \in \mathcal{A}_1$. これから，$d(\omega) = \omega^{1+2/(p-1)-N/2} d(1)$ となり，補題が従う． □

補題5 $1 < p < 1 + 4/N$ とする．$\omega_0 > 0$ に対して，次を満たす $\varepsilon_0 > 0$ が存在する: $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \exists \delta > 0$ s.t. $\|u_0 - \phi_{\omega_0}\|_{H^1} < \delta$, $u(t)$ を $u(0) = u_0$ なる (NLS) の解とすると，

$$d(\omega_0 - \varepsilon) < V(u(t)) < d(\omega_0 + \varepsilon), \quad \forall t \in [0, T^*).$$

証明 補題4より，$d''(\omega_0) > 0$ だから，$\exists \varepsilon_0 > 0$ s.t.

$$d''(\omega) \geq \frac{1}{2} d''(\omega_0), \quad \forall \omega \in (\omega_0 - \varepsilon_0, \omega_0 + \varepsilon_0).$$

$\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ を任意にとる．ここで，$d(\omega) = S_\omega(\phi_\omega) = E(\phi_\omega) + \omega Q(\phi_\omega)$ と $S'_\omega(\phi_\omega) = 0$ より，$d'(\omega) = Q(\phi_\omega) > 0$ だから，$d(\omega_0 - \varepsilon) < d(\omega_0) < d(\omega_0 + \varepsilon)$. また，$d(\omega_0) = V(\phi_{\omega_0})$ だから，$\delta > 0$ を十分小さくとれば，$\|u_0 - \phi_{\omega_0}\|_{H^1} < \delta$ のとき，

$$d(\omega_0 - \varepsilon) < V(u_0) < d(\omega_0 + \varepsilon).$$

よって，$S_{\omega_0 \pm \varepsilon}(u_0) < d(\omega_0 \pm \varepsilon)$（復号同順）であれば，$u_0 \in \mathcal{R}_{\omega_0 - \varepsilon}^+ \cap \mathcal{R}_{\omega_0 + \varepsilon}^-$ となり，補題3より，$d(\omega_0 - \varepsilon) < V(u(t)) < d(\omega_0 + \varepsilon), \forall t \in [0, T^*)$ が成り立つ．

以下，$\delta > 0$ を十分小さくとれば，

$$\|u_0 - \phi_{\omega_0}\|_{H^1} < \delta \text{ のとき，} S_{\omega_0 \pm \varepsilon}(u_0) < d(\omega_0 \pm \varepsilon)$$

が成り立つことを示そう．まず，

$$S_{\omega_0 \pm \varepsilon}(\phi_{\omega_0}) = S_{\omega_0}(\phi_{\omega_0}) \pm \varepsilon Q(\phi_{\omega_0}) = d(\omega_0) \pm \varepsilon d'(\omega_0).$$

また，Taylor 展開により，$\omega_1 \in (\omega_0 - \varepsilon, \omega_0 + \varepsilon)$ が存在して，

$$d(\omega_0 \pm \varepsilon) = d(\omega_0) \pm \varepsilon d'(\omega_0) + \frac{\varepsilon^2}{2} d''(\omega_1) \geq S_{\omega_0 \pm \varepsilon}(\phi_{\omega_0}) + \frac{\varepsilon^2}{4} d''(\omega_0).$$

さらに，$\|u_0 - \phi_{\omega_0}\|_{H^1} < \delta$ より，$S_{\omega_0 \pm \varepsilon}(u_0) = S_{\omega_0 \pm \varepsilon}(\phi_{\omega_0}) + O(\delta)$ だから，$\delta > 0$ を十分小さくとれば，$S_{\omega_0 \pm \varepsilon}(u_0) < d(\omega_0 \pm \varepsilon)$ が成り立つ． □

定理1の証明　背理法で証明する．$e^{i\omega t}\phi_\omega(x)$ が定理1の意味で安定でないと仮定すると，$\varepsilon_0 > 0$, (NLS) の解の列 $\{u_n(t)\}$, 時刻列 $\{t_n\}$ $(0 < t_n < T^*(u_n(0)))$ が存在して

$$\|u_n(0) - \phi_\omega\|_{H^1} \to 0, \tag{6}$$

$$\inf_{w \in \mathcal{G}_\omega} \|u_n(t_n) - w\|_{H^1} \geq \varepsilon_0 \quad (\forall n \in \mathbb{N}). \tag{7}$$

ここで, $v_n := u_n(t_n)$ とおくと，エネルギー及び電荷の保存則と (6) より,

$$S_\omega(v_n) = S_\omega(u_n(t_n)) = S_\omega(u_n(0)) \to S_\omega(\phi_\omega) = d(\omega).$$

また，補題5より，適当な部分列 (以下，部分列を同じ記号でかく) に対して，$V(v_n) \to d(\omega)$ だから，§2の定理3より，$\{y_n\} \subset \mathbb{R}^N$, $\varphi \in \mathcal{G}_\omega$ が存在して，部分列をとることにより，$\tau_{y_n} v_n \to \varphi$ in H^1. このとき，$\tau_{-y_n}\varphi \in \mathcal{G}_\omega$ だから

$$\inf_{w \in \mathcal{G}_\omega} \|u_n(t_n) - w\|_{H^1} \leq \|v_n - \tau_{-y_n}\varphi\|_{H^1} = \|\tau_{y_n} v_n - \varphi\|_{H^1} \to 0$$

となるが，これは (7) と矛盾する．故に，$e^{i\omega t}\phi_\omega(x)$ は安定である． □

4. おわりに

非線形 Schrödinger 方程式 (NLS) の基底状態 $e^{i\omega t}\phi_\omega(x)$ の存在と安定性に関してよく知られた結果を証明も含めて紹介した．基底状態の安定性と不安定性に関しては，(NLS) の非線形項を一般化した方程式や他の方程式との結合系に対してもよく研究されている．一方，励起状態に関しては，多くが未解決問題として残されている．$N = 1$ の場合は $\mathcal{A}_\omega = \mathcal{G}_\omega$ であるが，$N \geq 2$ の場合，様々なタイプの励起状態が存在する．Grillakis [12] は $1 + 4/N < p < 2^* - 1$ のとき，球対称な励起状態は線形不安定性であることを示したが，$1 < p < 1 + 4/N$ のとき，球対称な励起状態の線形不安定性は分かっていない．これに関して，Mizumachi [16] は $N = 2$, $1 < p < 3$ の場合に，球対称でない，ある種の励起状態の線形不安定性を示した．一方，Georgiev and Ohta [8] により，(NLS) に対して，線形不安定性から非線形不安定性が従うことが一般的に証明された．これから，$1 + 4/N < p < 2^* - 1$ のとき，球対称な励起状態は定理1の意味で安定ではないが，定理2のように爆発の意味で不安定かどうかは分かっていない．

参考文献

[1] H. Berestycki and T. Cazenave, Instabilité des états stationnaires dans les équations de Schrödinger et de Klein-Gordon non linéaires, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **293** (1981) 489–492.

[2] H. Berestycki and P.-L. Lions, Nonlinear scalar field equations I, II, Arch. Rational Mech. Anal. **82** (1983) 313–375.

[3] H. Brezis and E.H. Lieb, A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals, Proc. Amer. Math. Soc. **88** (1983) 486–490.

[4] H. Brezis and E.H. Lieb, Minimum action solutions of some vector field equations, Comm. Math. Phys. **96** (1984) 97–113.

[5] T. Cazenave, Semilinear Schrödinger equations, Courant Lecture Notes in Mathematics 10, Amer. Math. Soc., 2003.

[6] T. Cazenave and P.-L. Lions, Orbital stability of standing waves for some nonlinear Schrödinger equations, Comm. Math. Phys. **85** (1982) 549–561.

[7] R. Cipolatti, On the instability of ground states for a Davey-Stewartson system, Ann. Inst. H. Poincaré, Phys. Théor. **58** (1993) 85–104.

[8] V. Georgiev and M. Ohta, Nonlinear instability of linearly unstable standing waves for nonlinear Schrödinger equations, J. Math. Soc. Japan **64** (2012) 533–548.

[9] B. Gidas, W.M. Ni and L. Nirenberg, Symmetry of positive solutions of nonlinear elliptic equations in $\mathbb{R}^n$, Advances in Math. Suppl. Stud., **7A**, (1981), 369–402.

[10] J. Ginibre and G. Velo, On a class of nonlinear Schrödinger equations. I. The Cauchy problem, general case, J. Funct. Anal. **32** (1979) 1–32.

[11] J.M. Gonçalves Ribeiro, Instability symmetric stationary states for some nonlinear Schrödinger equations with an external magnetic field, Ann. Inst. H. Poincaré, Phys. Théor. **54** (1991) 403–433.

[12] M. Grillakis, Linearized instability for nonlinear Schrödinger and Klein-Gordon equations, Comm. Pure Appl. Math. **41** (1988) 747–774.

[13] M. Grillakis, J. Shatah and W. Strauss, Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry. I, J. Funct. Anal. **74** (1987) 160–197.

[14] T. Kato, On nonlinear Schrödinger equations, Ann. Inst. H. Poincaré, Phys. Théor. **46** (1987) 113–129.

[15] M.K. Kwong, Uniqueness of positive solutions of $\Delta u - u + u^p = 0$ in $\mathbb{R}^n$, Arch. Rational Mech. Anal. **105** (1989) 234–266.

[16] T. Mizumachi, Instability of vortex solitons for 2D focusing NLS, Adv. Differential Equations **12** (2007) 241–264.

[17] E.H. Lieb, On the lowest eigenvalue of the Laplacian for the intersection of two domains, Invent. Math. **74** (1983) 441–448.

[18] M. Ohta, Instability of standing waves for the generalized Davey-Stewartson system, Ann. Inst. H. Poincaré, Phys. Théor. **62** (1995) 69–80.

[19] J. Shatah, Stable standing waves of nonlinear Klein-Gordon equations, Comm. Math. Phys. **91** (1983) 313–327.

[20] J. Shatah and W. Strauss, Instability of nonlinear bound states, Comm. Math. Phys. **100** (1985) 173–190.

[21] W. Strauss, Existence of solitary waves in higher dimensions, Comm. Math. Phys. **55** (1977) 149–162.

[22] 堤 誉志雄, 偏微分方程式論, 培風館, 2004.

[23] M.I. Weinstein, Lyapunov stability of ground states of nonlinear dispersive evolution equations, Comm. Pure Appl. Math. **39** (1986) 51–67.