数理解析研究所講究録
第 1891 巻 2014 年 1-18

数論的量子カオスと量子エルゴード性

小山　信也 (Shin-ya Koyama)　(東洋大学 (Toyo University))*

1. 背景と目的

数論的量子カオスは，1992 年の暮れに，米国プリンストン大学のピーター・サルナック教授に よって提唱された数論の分野である．その目的を端的に述べれば

> 数論的群のスペクトル λ とその固有関数 u_λ を，特に $\lambda \to \infty$ の時に詳しく研究すること

であると言える．

こうした研究の数論における重要性は，2つの観点から論ずることができる．第一点は，スペクトルがゼータの零点とみなせることである．この見方は，リーマン予想の解決に直結する．ゼータの零点には，リーマン予想を含め未解明な部分が多い．ゼータの側だけでなく，逆にスペクトル側の研究も進め，双方から歩み寄る形でそれらの関係を求め，謎を解き明かしていくことが求められる．

そして第二点は，スペクトルの存在そのものが数論的であるということである．これは保型形式の存在理論（フィリップス，サルナックによる固有値消失理論）を踏まえると納得できる．セルバーグが発見したように，合同部分群など整数を用いて定義される群の基本領域は，ラプラシアンの固有値を豊富に持つわけだが，サルナックが 看破したように，それは一般の双曲多様体がほとんど持っていない性質だった．固有値が存在すること自体が数論に特有の現象なのである．したがって，従来から幾何学や解析学で研究されてきたスペクトルというものを，数論の研究対象として考え直す必要があるのは当然である．

このように数論的立場からスペクトルを観察しようとする動きは，歴史的にはヒルベルトの第八問題「素数分布に関する未解決問題，特にリーマンの予想」(1900年)，及びその後のヒルベルト-ポリャの提案「リーマン・ゼータ関数の零点と，何らかの自己共役作用素の固有値との対応

* 〒 350-8585 川越市鯨井 2100　東洋大学 理工学部

づけ」(1915年頃) にその起源を見ることができる．半世紀後，セルバーグ跡公式とセルバーグ・ゼータの発見 (1956年) によって数論とラプラシアンのスペクトルの類似が（固有値が豊富に存在するという仮定の下に）具体化した．ここまでは，上に述べた第一の観点としてのスペクトルの重要性に関係する．

そしてその後，第二の観点として，フィリップス-サルナックの固有値存在理論 (1980年代) により，固有値の豊富な存在が数論性と同値であろうとの予想が提起された．これは，固有値が常に豊富に存在するであろうというセルバーグの予想とは全く異なるものだったが，むしろ，セルバーグの発見した類似そのものが数論性と深く関わる事実であることを意味しており，この分野の数論における重要性を確立するのに大きく貢献したと言える．

こうした経緯の末に，サルナック自身が到達したのが数論的量子カオスであった．その題材の中には従来から幾何学や量子力学で扱われていたものもあったが，そこに数論的モデルや解析数論特有の手法を導入することにより，多くの新しい結果が得られた．結果は多岐に渡るが，おおむね，次の３つのタイプに分けて考えられる．

(1) **固有値 λ のばらつきに関する結果：**

固有値の分布がポアッソンまたは GOE に従う場合が古典的に知られていたが，数論的多様体の場合はその二つのモデルにまたがるような分布を呈することが数値計算によりわかっている．ルオ-サルナックは，この現象に初の理論的サポートを与えた．

(2) **固有関数 u_λ の L^p-ノルム**

L^∞-ノルムの $\lambda \to \infty$ における増大度を評価する問題は，その究極的な評価（L^∞-予想）がリーマン・ゼータ関数のリンデレーフ予想を含むことなどから重要である．2，3次元の数論的双曲多様体に対し，L^∞-ノルムの評価を改善する結果が得られている．

(3) **固有関数 $u_\lambda(z)$ の値分布**

固有関数の絶対値 $|u_\lambda(z)|$ が大きい複素数 z の集合は量子力学で言うところの確率振幅の大きな部分に相当する．$\lambda \to \infty$ のとき，この集合は測地線に収束する (スカーリングの発生) との予想が，一部の

物理学者によりなされていた．数論的多様体の場合はそういう現象は起き得ないことが証明された．

(3') **量子エルゴード性**

前項(3)の集合が測地線に収束しないばかりでなく，限りなく均一に分布する状態になる性質を量子エルゴード性と言う．

本稿では，量子エルゴード性をスペクトル以外のパラメーターに一般化する試み（中島さち子氏との共同研究）を紹介する．従来，量子カオスではラプラシアンのスペクトルを∞に飛ばした際の挙動を研究対象としていた．しかし，その証明を見ると，量子エルゴード性は保型L関数というある種のゼータ関数の非自明な評価と本質的に同値であることがわかる．ところが，保型L関数の評価においては，スペクトルは一つのパラメーターに過ぎない．保型L関数は他にもさまざまなパラメーターを持ち，それらすべてに関してリンデレーフ予想という究極の評価が成り立つと信じられている．リンデレーフ予想はリーマン予想の子供のようなものであり，リーマン予想が成り立てばリンデレーフ予想も正しいことから，リーマン予想の証明の過程であると位置づけられている．

そして，保型L関数の評価については，スペクトル以外の側面においても多くの研究があり，改善がなされている．それらを用いることにより，逆に量子エルゴード性と類似の性質を別の側面で得ることができるのではないだろうか．これが，本研究の発想である．

2. 量子エルゴード性の定義と結果のサーベイ

はじめに，量子エルゴード性を定義する．M を体積有限のリーマン面とし，その上のラプラシアンのスペクトル（離散もしくは連続スペクトル）を λ, その固有関数を u_λ とする．任意の集合[1] A, B に対し，

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{\int_A |u_\lambda(z)|^2\frac{dxdy}{y^2}}{\int_B |u_\lambda(z)|^2\frac{dxdy}{y^2}} = \frac{\mathrm{vol}(A)}{\mathrm{vol}(B)} \tag{1}$$

が成り立つ時，M は**量子エルゴード性**を満たす（あるいは**量子エルゴード的**である）という．双曲空間における通常の積分は $\frac{dxdy}{y^2}$ を用いて表わされるから，一般に

$$\mathrm{vol}(A) = \int_A \frac{dxdy}{y^2}$$

[1] 正確にはジョルダン可測集合である．これは，積分が定義されるような集合という意味である．

となる．したがって (1) は，$\frac{dxdy}{y^2}$ に関する積分とそれに固有関数の2乗を掛けた $|u_\lambda(z)|^2\frac{dxdy}{y^2}$ に関する積分が，$\lambda \to \infty$ の極限において等しいということだ．極限を取るときに λ として離散もしくは連続スペクトルのいずれか一方のみを渡らせることにより，離散・連続の各スペクトルに関する量子エルゴード性を別々に定義できる．大きな哲学としては，数論的多様体に対してはスペクトル λ をどのように渡らせて極限を取っても量子エルゴード性が成立すると予想されるが，少なくとも証明の段階では，量子エルゴード性は，離散・連続の各スペクトルについて，別々に扱われる．

本稿で扱うのは，λ が連続スペクトルの場合であり，u_λ はアイゼンシュタイン級数となる（連続スペクトルを含んだ場合のスペクトル理論について拙著『リーマン予想のこれまでとこれから』第10章で解説した）．

標準的な記号 $\lambda = \frac{1}{4} + r^2$ を用い r で結果を表すと便利である．この設定で量子エルゴード性 (1) を示すには，次式が示せれば良い．

$$\int_A |u_\lambda(z)|^2 \frac{dxdy}{y^2} \sim C\mathrm{vol}(A)\log r \qquad (r \to \infty,\ C\text{ は }r\text{ に無関係な定数}). \tag{2}$$

本章では，(2) の成立が，マース波動形式の L-関数の凸評価をわずかでも改善することと，同値であるというからくりを観察する．

以下に，証明の方針をサーベイするが，これは概要の解説である．より詳しくは拙著『素数からゼータへ，そしてカオスへ』（第14章）を参照されたい．

アイゼンシュタイン級数は，H を複素上半平面とし，$z = x + iy \in H$，$\mathrm{Re}(s) > 1$，$\Gamma = SL(2, \mathbb{Z})$，

$$\Gamma_\infty = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; b \in \mathbb{Z} \right\} \subset \Gamma$$

という記号の下で

$$E(z, s) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} \mathrm{Im}(\gamma z)^s \tag{3}$$

により定義される級数である．$E(z, s)$ のフーリエ展開は，次のようになる．

$$E(z,s)=y^s+y^{1-s}\frac{\widehat{\zeta}(s-1)}{\widehat{\zeta}(s)}+\frac{2}{\widehat{\zeta}(2s)}\sum_{n=1}^{\infty}|n|^{s-\frac{1}{2}}\sigma_{1-2s}(n)e^{2\pi inx}K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi|n|y)\sqrt{y}. \tag{4}$$

ここで

$$\sigma_s(n)=\sum_{d|n}d^s$$

である．本章の目標とする結果は

$$\int_A\left|E\left(z,\frac{1}{2}+ir\right)\right|^2\frac{dxdy}{y^2}\sim\frac{48}{\pi}\mathrm{vol}(A)\log r \qquad (r\to\infty)$$

である．以下に証明の方針を述べる．

いきなり A 上の定積分を考えるのは難しいので，積分範囲を基本領域 $M=\Gamma\backslash H$ 全体に広げ，その代わり A の特性関数 $f_A(z)$ を掛けた形に

$$\int_A\left|E\left(z,\frac{1}{2}+ir\right)\right|^2\frac{dxdy}{y^2}=\int_M f_A(z)\left|E\left(z,\frac{1}{2}+ir\right)\right|^2\frac{dxdy}{y^2}$$

と変形し，次に，$f_A\in L^2(M)$ を基底の一次結合に分解し，各基底に対する積分が，$\lambda\to\infty$ でどうなるかを調べる．

その際の基底の選び方を $L^2(M)$ のスペクトル分解による基底とする．すなわち，ラプラシアンの固有関数 u_j （これをカスプ形式と呼ぶ）と，不完全アイゼンシュタイン級数を選ぶことにより，積分を計算する．

はじめに，f_A をカスプ形式で置き換えた積分を計算した結果が，次の通りである．

命題 1 $M=SL(2,\mathbb{Z})\backslash H$ とする．u_j を，マース波動形式のうちカスプ形式（$L^2(M)$ に属するラプラシアンの固有関数）とする．任意の u_j に対し

$$\lim_{r\to\infty}\int_M u_j(z)\left|E\left(z,\frac{1}{2}+ir\right)\right|^2\frac{dxdy}{y^2}=0$$

が成り立つ．

証明

$$J_j(r)=\int_M u_j(z)E\left(z,\frac{1}{2}+ir\right)E\left(z,\frac{1}{2}-ir\right)\frac{dxdy}{y^2} \tag{5}$$

とおく．この積分を調べるため，まず

$$I_j(s) = \int_M u_j(z) E\left(z, \frac{1}{2} + ir\right) E(z,s) \frac{dxdy}{y^2}. \tag{6}$$

を考える．u_j がカスプ形式であることから，ここで登場したすべての積分は収束する．積分 (6) を，$E(z,s)$ の定義 (3):

$$E(z,s) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} \mathrm{Im}(\gamma z)^s$$

を用いて基本領域 $M = \Gamma \backslash H$ 上から H 上の定積分に開くことにより，

$$\begin{aligned} I_j(s) &= \int_{\Gamma_\infty \backslash H} u_j(z) E\left(z, \frac{1}{2} + ir\right) y^s \frac{dxdy}{y^2} \\ &= \int_0^\infty \int_0^1 u_j(z) E\left(z, \frac{1}{2} + ir\right) y^s \frac{dxdy}{y^2} \end{aligned} \tag{7}$$

を得る．カスプ形式の空間は偶と奇のカスプ形式の空間の直和として表される．カスプ形式が偶であるとは，$u_j(-\overline{z}) = u_j(z)$ が成り立つことであり，奇であるとは，$u_j(-\overline{z}) = -u_j(z)$ が成り立つことだ．$E(z,s) = E(1-\overline{z}, s)$ より，もし u_j が奇であれば $I_j(s) \equiv 0$ であるから証明すべきことはない．以後，u_j を偶とする．すると，$e^{2\pi inx} + e^{-2\pi inx} = 2\cos(2\pi nx)$ よりフーリエ展開において n の項と $-n$ の項がまとめられる．さらに，第8章で行ったように適当な定数倍を施し正規化すれば

$$u_j(z) = \sqrt{y} \sum_{n=1}^\infty a_j(n) K_{ir_j}(2\pi|n|y) \cos(2\pi nx) \qquad (a_j(1) = 1) \tag{8}$$

と表せる．ただし $\frac{1}{4} + r_j^2 = \lambda_j$ である．$a_j(n)$ は乗法的になり，これを用いてオイラー積を持つような L-関数：

$$\begin{aligned} L(s, u_j) &= \sum_{n=1}^\infty \frac{a_j(n)}{n^s} \\ &= \prod_p \left(1 - \frac{a_j(p)}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}}\right)^{-1}. \end{aligned} \tag{9}$$

が定義できる．2種のフーリエ展開 (4) と (8) を (7) に代入すると，

$$I_j(s)=\int_0^\infty\int_0^1\left(y\sum_{n=1}^\infty a_j(n)K_{ir_j}(2\pi|n|y)\cos(2\pi nx)\right)$$
$$\left(y^{\frac{1}{2}+ir}+y^{\frac{1}{2}-ir}\frac{\widehat{\zeta}(ir)}{\widehat{\zeta}(1+2ir)}+\frac{2\sqrt{y}}{\widehat{\zeta}(1+2ir)}\sum_{m=1}^\infty\frac{\sigma_{-2ir}(m)}{m^{-ir}}e^{2\pi imx}K_{ir}(2\pi my)\right)$$
$$y^s\frac{dxdy}{y^2}.$$

となる．ここで，

$$\int_0^1\cos(2\pi nx)dz=\begin{cases}0 & (n\neq 0)\\ 1 & (n=0),\end{cases}$$

であるから，展開する過程で公式

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))$$

を用いることにより $n=m$ の項だけが残り，$ny\longmapsto y$ と置き直して

$$I_j(s)=\frac{2}{\widehat{\zeta}(1+2ir)}\left(\sum_{n=1}^\infty\frac{\sigma_{-2ir}(n)a_j(n)}{n^{s-ir}}\right)\int_0^\infty K_{ir}(2\pi y)K_{ir_j}(2\pi y)y^s\frac{dy}{y}$$

となる．ベッセル関数に関する積分は公式として知られており，

$$\int_0^\infty K_{ir}(2\pi y)K_{ir_j}(2\pi y)y^s\frac{dy}{y}=\frac{\Gamma(\frac{s+ir_j+ir}{2})\Gamma(\frac{s+ir_j-ir}{2})\Gamma(\frac{s-ir_j+ir}{2})\Gamma(\frac{s-ir_j-ir}{2})}{\pi^s\Gamma(s)}$$

であるから，

$$R(s)=\sum_{n=1}^\infty\frac{\sigma_{-2ir}(n)a_j(n)}{n^{s-ir}}$$

とおけば，

$$I_j(s)=\frac{2\pi^{-s}}{\widehat{\zeta}(1+2ir)}\times\frac{\Gamma(\frac{s+ir_j+ir}{2})\Gamma(\frac{s+ir_j-ir}{2})\Gamma(\frac{s-ir_j+ir}{2})\Gamma(\frac{s-ir_j-ir}{2})}{\Gamma(s)}R(s)$$

と表される．$R(s)$ は次のように計算できる：

$$
\begin{aligned}
R(s) &= \prod_p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_j(p^k)\sigma_{-2ir}(p^k)}{p^{k(s-ir)}} \\
&= \prod_p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_j(p^k)}{p^{k(s-ir)}} \sum_{l=0}^{k} p^{-2irl} \\
&= \prod_p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_j(p^k)}{p^{k(s-ir)}} \frac{1-p^{-2ir(k+1)}}{1-p^{-2ir}} \\
&= \frac{1}{1-p^{-2ir}} \prod_p \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_j(p^k) p^{-k(s-ir)} - p^{-2ir} \sum_{k=0}^{\infty} a_j(p^k) p^{-k(s+ir)} \right) \\
&= \frac{1}{1-p^{-2ir}} \prod_p \left(\frac{1}{1-a_j(p)p^{-(s-ir)}+p^{-2(s-ir)}} - \frac{p^{-2ir}}{1-a_j(p)p^{-(s+ir)}+p^{-2(s+ir)}} \right) \\
&= \prod_p \frac{1-p^{-2s}}{(1-a_j(p)p^{-(s-ir)}+p^{-2(s-ir)})} \frac{1}{(1-a_j(p)p^{-(s+ir)}+p^{-2(s+ir)})} \\
&= \frac{L(s-ir,u_j)L(s+ir,u_j)}{\zeta(2s)}.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

したがって，

$$
\begin{aligned}
J_j(r) &= I_j\left(\frac{1}{2}-ir\right) \\
&= \frac{2\pi^{-\frac{1}{2}+ir}}{\widehat{\zeta}(1+2ir)} \frac{\Gamma(\frac{\frac{1}{2}+ir_j}{2})\Gamma(\frac{\frac{1}{2}+ir_j-2ir}{2})\Gamma(\frac{\frac{1}{2}-ir_j}{2})\Gamma(\frac{\frac{1}{2}-ir_j-2ir}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}-ir)} \frac{L(\frac{1-2ir}{2},u_j)L(\frac{1}{2},u_j)}{\zeta(1-2ir)}.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

スターリングの公式

$$
|\Gamma(\sigma+ir)| \sim e^{-\pi r/2}|r|^{\sigma-\frac{1}{2}} \qquad (r \to \infty)
$$

により，

$$
(11)\text{のガンマ因子} = O(|r|^{-1/2}) \tag{12}
$$

となる．ここで，良く知られているゼータ関数の評価

$$
\frac{1}{\zeta(1+2ir)} = O(\log r) \tag{13}
$$

を用いれば，(11) の数論的因子の漸近状態は $L\left(\frac{1}{2}+ir,u_j\right)$ の項を除いてすべてわかる．(12)，(13) により，

$$J_j(r)=O\left(\frac{L\left(\frac{1}{2}+ir,u_j\right)}{|r|^{\frac{1}{2}}}\right)\qquad(r\to\pm\infty)\tag{14}$$

となる．今，L-関数の凸評価は第10章表10.1で紹介したように

$$L\left(\frac{1}{2}+ir,u_j\right)=O(|r|^{\frac{1}{2}})\qquad(r\to\pm\infty)$$

であり，仮にこの凸評価が，

$$L\left(\frac{1}{2}+ir,u_j\right)=O(|r|^{\frac{1}{2}-\delta})\qquad(r\to\pm\infty)$$

とある $\delta>0$ を用いて改良されれば，(14) は

$$J_j(r)=O(|r|^{-\delta})\qquad(r\to\pm\infty)$$

となって，

$$\lim_{r\to\pm\infty}J_j(r)=0$$

となるから命題が証明される．したがって，ミアマンによる凸評価の改良

$$L\left(\frac{1}{2}+ir,u_j\right)=O(|r|^{\frac{1}{3}+\varepsilon})\qquad(\forall\varepsilon>0)\tag{15}$$

によって，命題の証明を終える．（証明終）

次に，不完全アイゼンシュタイン級数との内積を考える．初めに，不完全アイゼンシュタイン級数を定義する．$h(y)$ を 0 と ∞ で急減少な関数とする．すなわち，y が 0 または ∞ に近付く時，$h(y)=O_N(y^N)$ （$N\in\mathbb{Z}$）とする（記号 O_N の意味は，記号 O の定義に含まれる「定数倍」の定数が N によるという意味である）．したがって，$h(y)$ は y のどんなべきよりも小さいのだが，その際に付く定数は N に関して有界であるとは限らない．

$$H(s)=\int_0^\infty h(y)y^{-s}\frac{dy}{y}$$

とおくと，これは $h(y)$ の**メリン変換**と呼ばれる積分変換で，性質はよく知られている．たとえば，$H(s)$ は s に関する正則関数であり，r に関し

ては各鉛直線 $\sigma+ir$ 上急減少する．またメリン逆変換公式により，任意の $\sigma\in\mathbb{R}$ に対し，

$$h(y)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(\sigma)}H(s)y^s ds$$

である．記号 $\int_{(\sigma)}$ は $\mathrm{Re}(s)=\sigma$ の線に沿って下から上まで積分するという意味である．この h に対して収束級数

$$F_h(z)=\sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma}h(\mathrm{Im}(\gamma z))$$

を定義し，これを**不完全アイゼンシュタイン級数**と呼ぶ．この定義は，仮に $h(y)=y^s$ ならばアイゼンシュタイン級数の定義 (3) と一致するが，これは $h(y)=O_N(y^N)$ を満たさないので選べない．アイゼンシュタイン級数はラプラシアンの固有方程式を満たすが，2乗可積分ではないのでそのままでは $L^2(M)$ の基底に参加できなかった．2乗可積分でないのは $y\to 0,\infty$ における挙動が大きすぎるからであり，$h(y)$ という，$y\to 0,\infty$ で十分小さくなる関数を噛ませることによって挙動をおとなしくさせたものが不完全アイゼンシュタイン級数である．

なお，上の定義から，積分路を $E(z,s)$ の収束域内に移動すれば，$F_h(z)$ を $E(z,s)$ を用いて表わすことができる．たとえば $(\sigma)\to(2)$ とすることにより，

$$F_h(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(2)}H(s)E(z,s)ds$$

が成り立つ．

命題 2 $M=SL(2,\mathbb{Z})\backslash H$ とする．不完全アイゼンシュタイン級数 $F(z)$ に対し，$r\to\infty$ において

$$\int_M F(z)\left|E\left(z,\frac{1}{2}+ir\right)\right|^2\frac{dxdy}{y^2}\sim\frac{48}{\pi}\left(\int_M F(z)\frac{dxdy}{y^2}\right)\log r$$

が成り立つ．

証明 不完全アイゼンシュタイン級数は∞で急減少し，$C^\infty(M)$ に属す

る．したがって，

$$
\begin{aligned}
&\int_M F_h(z)\left|E\left(z,\frac{1}{2}+ir\right)\right|^2\frac{dxdy}{y^2}\\
&=\frac{1}{2\pi i}\int_M\int_{(2)}H(s)E(z,s)ds\left|E\left(z,\frac{1}{2}+ir\right)\right|^2\frac{dxdy}{y^2}\\
&=\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty\int_{(2)}H(s)y^s ds\int_0^1\left|E\left(z,\frac{1}{2}+ir\right)\right|^2\frac{dxdy}{y^2}\\
&=\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty\int_{(2)}H(s)y^s ds\left(\left|y^{\frac{1}{2}+ir}+y^{\frac{1}{2}-ir}\frac{\widehat{\zeta}(2ir)}{\widehat{\zeta}(1+2ir)}\right|^2\right.\\
&\qquad\qquad\left.+\left|\frac{2y}{\widehat{\zeta}(1+2ir)}\right|^2\sum_{n=1}^\infty|\sigma_{-2ir}(n)K_{ir}(2\pi ny)|^2\right)\frac{dy}{y^2}\\
&=F_1(r)+F_2(r).
\end{aligned}
$$

ただし，

$$
F_1(r)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty\int_{(2)}H(s)y^s ds\left|y^{\frac{1}{2}+ir}+y^{\frac{1}{2}-ir}\frac{\widehat{\zeta}(2ir)}{\widehat{\zeta}(1+2ir)}\right|^2\frac{dy}{y^2}
$$

とおいた．$\left|\frac{\widehat{\zeta}(2ir)}{\widehat{\zeta}(1+2ir)}\right|=1$ であるから，

$$
F_1(r)=2\int_0^\infty h(y)\frac{dy}{y}+(r\text{の急減少関数}). \tag{16}
$$

一方，

$$
F_2(r)=\frac{2}{\pi i|\widehat{\zeta}(1+2ir)|^2}\int_{(2)}H(s)\sum_{n=1}^\infty\frac{|\sigma_{-2ir}(n)|^2}{n^s}\int_0^\infty|K_{ir}(2\pi y)|^2y^s\frac{dy}{y}ds. \tag{17}
$$

級数の部分は，以下のように計算される：

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sigma_a(n)|^2}{n^s} &= \prod_p\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sigma_a(p^k)\sigma_{-a}(p^k)}{p^{ks}} \\
&= \prod_p\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{p^{ks}}\left(\frac{1-p^{a(k+1)}}{1-p^a}\right)\left(\frac{1-p^{-a(k+1)}}{1-p^{-a}}\right)^2 \\
&= \prod_p\frac{1}{(1-p^a)(1-p^{-a})}\sum_{k=0}^{\infty}\left(2p^{-ks}-p^{(a-s)k+a}+p^{(-a-s)k-a}\right) \\
&= \prod_p\frac{1}{(1-p^a)(1-p^{-a})}\left(\frac{2}{1-p^{-s}}-\frac{p^a}{1-p^{a-s}}-\frac{p^{-a}}{1-p^{-a-s}}\right) \\
&= \prod_p\frac{1+p^{-s}}{(1-p^{-s})(1-p^{-(s-a)})(1-p^{-(s+a)})} \\
&= \prod_p\frac{1-p^{-2s}}{(1-p^{-s})^2(1-p^{-(s-a)})(1-p^{-(s+a)})} \\
&= \frac{\zeta(s)^2\zeta(s-a)\zeta(s+a)}{\zeta(2s)}. \qquad (18)
\end{aligned}$$

(17) 中の y に関する積分は，前命題の証明と同様に Γ 関数を用いて評価できる．したがって，

$$\begin{aligned}
F_2(r) &= \frac{2}{\pi i|\widehat{\zeta}(1+2ir)|^2}\int_{(2)}H(s)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sigma_{-2ir}(n)|^2}{n^s}\int_0^{\infty}|K_{ir}(2\pi y)|^2y^s\frac{dy}{y}ds \\
&= \frac{2}{\pi i|\widehat{\zeta}(1+2ir)|^2} \\
&\quad\times\int_{(2)}\frac{H(s)\zeta(s)^2\zeta(s+2ir)\zeta(s-2ir)\Gamma(\frac{s}{2}+ir)\Gamma(\frac{s}{2}-ir)\Gamma(\frac{s}{2})^2}{\pi^s\zeta(2s)\Gamma(s)}ds \\
&= \frac{2}{\pi i|\widehat{\zeta}(1+2ir)|^2}\int_{(2)}B(s)ds. \qquad (19)
\end{aligned}$$

ここで，

$$B(s)=\frac{H(s)\zeta(s)^2\zeta(s+2ir)\zeta(s-2ir)\Gamma(\frac{s}{2}+ir)\Gamma(\frac{s}{2}-ir)\Gamma(\frac{s}{2})^2}{\pi^s\zeta(2s)\Gamma(s)} \qquad (20)$$

とおいた．スターリングの公式で Γ 因子を評価し，$H(\sigma+ir)$ が r に関して急減少であることを考慮すると，(19) の積分路を $\mathrm{Re}(s)=1/2$ にずらすことができる．その際，$s=1$ における極を通過するので，次のよ

うになる．

$$F_2(r) = \frac{4\mathrm{Res}_{s=1}B(s)}{|\widehat{\zeta}(1+2ir)|^2} + \frac{2}{\pi i|\widehat{\zeta}(1+2ir)|^2}\int_{(1/2)} B(s)ds + O(r^{-1}). \quad (21)$$

ここで誤差項 $O(r^{-1})$ は，$s = 1 \pm 2ir$ における $B(s)$ の極から来る．留数をスターリングの公式で計算することにより $t \to \infty$ におけるこの誤差項の評価を得た．(21) の第二項は，ワイルの評価

$$\zeta\left(\frac{1}{2}+ir\right) = O(r^{\frac{1}{6}+\epsilon})$$

を，$B(s)$ の分子の $\zeta(s+2ir)\zeta(s-2ir)$ の部分に用いることにより，

$$\frac{2}{\pi i|\widehat{\zeta}(1+2ir)|^2}\int_{(1/2)} B(s)ds = O\left((r^{\frac{1}{3}+\varepsilon})^2 r^{-1/2}\right) = O(r^{-\frac{1}{6}+\varepsilon})$$

となる（記号 ε は任意の正数であり，その都度新しく取り直している）．

次に，(21) の留数の項について考える．$s=1$ で正則な関数

$$G(s) = \frac{H(s)\zeta(s+2ir)\zeta(s-2ir)\Gamma(\frac{s}{2}+ir)\Gamma(\frac{s}{2}-ir)\Gamma(\frac{s}{2})^2}{\pi^s\zeta(2s)\Gamma(s)}$$

を用いて，$B(s) = \zeta(s)^2G(s)$ と表せる．ここで，$\zeta(s)$ の $s \to 1$ における挙動は，オイラーの定数[2] γ を用いて

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + O(s-1) \quad (s \to 1).$$

となることが知られているので，これを用いよう．$B(s)$ の展開

$$B(s) = \left(\frac{1}{s-1} + \gamma + O(s-1)\right)^2 (G(1) + G'(1)(s-1) + O(s-1)^3)$$

の中の，$(s-1)^{-1}$ の係数が留数であり，

$$\mathrm{Res}_{s=1}B(s) = 2G(1)\gamma + G'(1)$$

であるが，これを G の対数微分を利用した

$$\mathrm{Res}_{s=1}B(s) = G(1)\left(2\gamma + \frac{G'}{G}(1)\right) \quad (22)$$

[2] オイラーの定数は

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n\right) = 0.577215664901532\cdots$$

である．

の形に書き換えると，以下の計算ができる．

$$\frac{G'}{G}(1)=\frac{H'}{H}(1)+\frac{\zeta'(1+2ir)}{\zeta(1+2ir)}+\frac{\zeta'(1-2ir)}{\zeta(1-2ir)}$$
$$+\frac{\Gamma'(\frac{1}{2}+ir)}{\Gamma(\frac{1}{2}+ir)}+\frac{\Gamma'(\frac{1}{2}-ir)}{\Gamma(\frac{1}{2}-ir)}+C.$$

ここで，C は r によらない定数である．ワイル-アダマール-ド・ラ・ヴァレ・プーサンによって

$$\frac{\zeta'(1+2ir)}{\zeta(1+2ir)}=O\left(\frac{\log r}{\log\log r}\right)$$

が知られているから，これとスターリングの公式

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{1}{2}+ir\right)\sim\log r$$

を合わせると，(22) のカッコ内の主要項は $2\log r$ と同じ挙動になる．また，

$$\begin{aligned}G(1)&=\frac{H(1)|\zeta(1+2ir)\Gamma(\frac{1}{2}+ir)|^2\Gamma(\frac{1}{2})^2}{\pi\zeta(2)}\\&=\frac{H(1)\pi|\widehat{\zeta}(1+2ir)|^2}{\zeta(2)}\\&=\frac{6}{\pi}H(1)|\widehat{\zeta}(1+2ir)|^2.\end{aligned}$$

よって，

$$\mathrm{Res}_{s=1}B(s)=\frac{6}{\pi}H(1)|\widehat{\zeta}(1+2ir)|^2\left(2\log r+O\left(\frac{\log r}{\log\log r}\right)\right)$$

を得る．ゆえに，(21) の第一項は，

$$\frac{4\mathrm{Res}_{s=1}B(s)}{|\widehat{\zeta}(1+2ir)|^2}=\frac{48H(1)}{\pi}\log r+O(1).$$

と評価される．

$$H(1)=\int_0^\infty h(y)\frac{dy}{y^2}=\int_M F_h(z)\frac{dxdy}{y^2}$$

を考え合わせれば，結論を得る．（証明終）

命題 3 F を，M 内にコンパクトな台を持つ連続関数とする．このとき，次の漸近評価が成り立つ．

$$\int_M F(z)d\mu_r(z) \sim \frac{48}{\pi}\left(\int_M F(z)\frac{dxdy}{y^2}\right)\log r \quad (r \to \infty).$$

証明 すべての不完全アイゼンシュタイン級数とカスプ形式からなる空間は，カスプで値が0であるような連続関数全体の空間の中で，稠密である．すなわち，与えられた F と任意の $\epsilon > 0$ に対し，$\|G - F\|_\infty < \epsilon$ なる G で，$G = G_1 + G_2$ とカスプ形式の有限和 G_1 と不完全アイゼンシュタイン級数 G_2 の和として表されるものが存在する．G_1 に関しては命題1 より $r \to \infty$ で貢献がない．G_2 に関しては命題2 により示すべき右辺に相当する部分を得る．また，差 $H = G - F$ は十分小さいので，$r \to \infty$ のときの積分値への寄与も十分小さく抑えられる． （証明終）

定理 1 $SL(2,\mathbb{Z})$ のアイゼンシュタイン級数に関する量子エルゴード性は成立する．

証明 集合 A の特性関数 f_A は連続ではないが，連続関数で近似できる．すなわち，連続関数列で f_A に収束するようなものが取れる．その列の元を $F(z)$ として前命題を適用し，極限を取ればよい． （証明終）

ルオとサルナックにより 1995 年に証明されたこの定理は，量子エルゴード性を初めて示した画期的なものであった．. 原論文は

W. Luo and P. Sarnak: “Quantum ergodicity of Eigenfunctions on $PSL_2(\mathbb{Z})/H_2$” Publications Mathematiques de L'IHES **81** (1995) 207-237

である．

その後，量子エルゴード性は，多くの研究者により様々な形で一般化されている．それについては拙著「素数からゼータへ，そしてカオスへ」（第14章）を参照されたい．

ここで述べた証明の中で，命題 1 の末尾で用いたミアマンによる凸評価の改善が鍵である．ここに数論的な性質を結集した成果が含まれている．こうした性質に類似の結果を用いることで，新たな現象が解明できると思われる．それが本稿の主定理であり，次節の内容である．

3. 主定理

本章では，量子エルゴード性をスペクトル以外の一般のパラメータに拡張する試みを紹介する．はじめに，より一般的な状況を想定した「等分布性」という概念を定義する．

Γ_j $(j=1,2,3,\ldots)$ を $SL(2,\mathbb{R})$ の離散部分群の列とし，複素上半平面

$$H=\{x+iy\,|\,y>0\}$$

に一次分数変換で作用したときの基本領域を

$$M_j=\Gamma_j\backslash H$$

と置く．各 M_j が有限の面積を持つと仮定し，写像の列

$$\varphi_j:\ M_j\to M_{j+1}$$

が与えられているとする．

関数列

$$f_j:\ M_j\to\mathbb{C}$$

に対し，M_j の測度の列 $d\mu_j$ を，

$$d\mu_j:=|f_j(z)|^2dz,\quad dz=\frac{dxdy}{y^2}$$

で定義する．これを用いて関数列の等分布性が次のように定義される．

定義 1 (関数列の等分布性) 関数列 $f_j:\ M_j\to\mathbb{C}$ が等分布的（equidistributed）であるとは，任意のジョルダン可測集合 $A_1,\,B_1\subset M_1$ に対し，

$$\lim_{j\to\infty}\frac{\int_{A_j}d\mu_j}{\int_{B_j}d\mu_j}=\frac{\int_{A_1}dz}{\int_{B_1}dz}$$

が成り立つことである．ただし，$A_j=\varphi_{j-1}\circ\varphi_{j-2}\circ\cdots\circ\varphi_1(A_1)$ と置いた．

この定義は量子エルゴード性の概念の一般化である．実際，等分布的な関数列の例として，以下のものが知られている．前章で解説した命題を，例 1 として挙げる．

例 1 (アイゼンシュタイン級数 (Luo-Sarnak[4] 1995))
$M_j = SL(2,\mathbb{Z})\backslash H$ $(\forall j = 1,2,3,...)$，φ_j を恒等写像とする．$E(z,s)$ を $SL(2,\mathbb{Z})$ の実解析的アイゼンシュタイン級数とする．単調増加し無限大に発散するような任意の実数列 $t_j \in \mathbb{R}$ に対し，$f_j(z) = E(z, \frac{1}{2} + it_j)$ は等分布的である．この結果は Koyama [1] により 3 次元数論的多様体に一般化され，また Truelsen [6] によりヒルベルトモジュラー多様体に一般化された．

例 2 (量子エルゴード性 (Lindenstrauss[3], Soundararajan[5]))
例 1 の M_j, φ_j に対し，M_j 上のラプラシアンの固有値列を $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$ とし，λ_j に対する固有関数を $f_j(z)$ $(\|f_j\|_2 = 1)$ と置くと，$f_j(z)$ は等分布的である（正確には，Lindenstrauss がコンパクトな M_j に対して証明し，Soundararajan が例 1 の場合に拡張した）．

以上のように量子エルゴード性の概念を拡張すると，次のようなスペクトル以外の側面に関する結果も得られる．

例 3 (レベル・アスペクト (Koyama[2] 2009)
$q_1 = 1$ とし，q_j $(j = 2,3,...)$ を素数の単調増加列とする．$M_j = \Gamma_0(q_j)\backslash H$ と置き，標準的な射影 $\pi_j:\ M_j \to M_1$ と任意の持ち上げ $\psi_j:\ M_1 \to M_{j+1}$ の合成を

$$\varphi_j:\ M_j \xrightarrow{\pi_j} M_1 \xrightarrow{\psi_j} M_{j+1}$$

と置く．任意の実数 $t \in \mathbb{R}$ を固定する．$\Gamma_0(q_j)$ のカスプ ν_j に関するアイゼンシュタイン級数を $E_{q_j,\nu_j}(z,s)$ と置くと，任意のカスプの列 ν_j に対して $f_j(z) = E_{q_j,\nu_j}(z, \frac{1}{2} + it)$ は等分布的である．

本稿で報告する主定理は，例 3 と同様の現象が，素数列に限らず任意の整数列でも成り立つという事実である．実際，以下の定理が成立する．

定理 2 (S. Koyama and S. Nakajima) $q_j = j$ $(j = 2,3,...)$ とする．$M_j = \Gamma_0(q_j)\backslash H$ と置き，標準的な射影 $\pi_j:\ M_j \to M_1$ と任意の持ち上げ $\psi_j:\ M_1 \to M_{j+1}$ の合成を

$$\varphi_j:\ M_j \xrightarrow{\pi_j} M_1 \xrightarrow{\psi_j} M_{j+1}$$

と置く．任意の実数 $t \in \mathbb{R}$ を固定する．$\Gamma_0(q_j)$ のカスプ ν_j に関するアイゼンシュタイン級数を $E_{q_j,\nu_j}(z,s)$ と置くと，任意のカスプの列 ν_j に対して $f_j(z) = E_{q_j,\nu_j}(z, \frac{1}{2} + it)$ は等分布的である．

証明の概要 大まかな方針は例3とほぼ同様であり，その発想はルオ・サルナックに遡る．ただし，例3では素数レベルのみを扱っていたために約数（リーマン面の言葉で言えば被覆）が自明なものしかなかったところ，本定理では一般の個数の被覆が生ずるため計算が複雑になる．さらに，被覆の個数が有界ではないため，それが悪さをしないことを証明する必要がある．

参考文献

[1] S. Koyama: Quantum ergodicity of Eisenstein series for arithmetic 3-manifolds. Communications in Mathematical Physics **215** (2000), no. 2, 477-486.

[2] S. Koyama: Equidistribution of Eisenstein series in the level aspect. Communications in Mathematical Physics **289** (2009), no. 3, 1131-1150.

[3] E. Lindenstrauss: Invariant measures and arithmetic quantum unique ergodicity. Annals of Mathematics **163** (2006) no. 1, 165-219.

[4] L. Wen Zhi and P. Sarnak: Quantum ergodicity of eigenfunctions on $PSL_2(\mathbb{Z})\backslash H^2$. Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. **81** (1995) 207-237.

[5] K. Soundararajan: Quantum unique ergodicity for $SL2(\mathbb{Z})\backslash H$. Annals of Mathematics **172** (2010) no. 2, 1529-1538.

[6] J.L. Truelsen: Quantum unique ergodicity of Eisenstein series on the Hilbert modular group over a totally real field. Forum Math. **23** (2011), no. 5.