数理解析研究所講究録
第1893巻 2014年 28-34

Beckner の不等式の一般化について

新潟大学大学院・自然科学研究科 田中 亮太朗 (Ryotaro Tanaka)
Department of Mathematical Science,
Graduate School of Science and Technology, Niigata University

新潟大学・理学部 斎藤 吉助 (Kichi-Suke Saito)
Department of Mathematics, Faculty of Science, Niigata University

1 序文

X を Banach 空間とする. 各 $\varepsilon\in(0,2]$ に対して

$$\delta_X(\varepsilon)=\inf\left\{1-\left\|\frac{x+y}{2}\right\|:x,y\in S_X,\ \|x-y\|=\varepsilon\right\}$$

とし, 各 $\tau\geq 0$ に対して

$$\rho_X(\tau)=\sup\left\{\frac{\|x+\tau y\|+\|x-\tau y\|}{2}-1:x,y\in S_X\right\}$$

とする. これらはそれぞれ the moduli of convexity and smoothness of X と呼ばれる. $1<p\leq 2\leq q<\infty$ とすると, Banach 空間 X は

(i) すべての $\varepsilon\in(0,2]$ に対して $\delta_X(\varepsilon)>0$ であるとき uniformly convex,

(ii) ある $C>0$ が存在して, すべての $\varepsilon\in(0,2]$ に対して $\delta_X(\varepsilon)\geq C\varepsilon^q$ となるとき q-uniformly convex,

(iii) $\lim_{\tau\to 0^+}\rho_X(\tau)/\tau=0$ を満たすとき uniformly smooth, 及び

(iv) ある $K>0$ が存在して, すべての $\tau\geq 0$ に対して $\rho_X(\tau)\leq K\tau^p$ となるとき p-uniformly smooth

とそれぞれ言われる. これらに対して (ii) $\Rightarrow$ (i) 及び (iv) $\Rightarrow$ (iii) が成立することは容易にわかる. これらは strict convexity や uniform non-squareness と同様に Banach 空間の幾何学的性質と言われ, しばしばノルム不等式を用いて特徴付けられる. 特に, p-uniform smoothness に対しては, 次のような特徴付けが知られている (cf. [1]). X を Banach 空間とし, $1<p\leq 2$ とする. そのとき, 以下は同値:

(i) X は p-uniformly smooth である.

(ii) ある $K>0$ が存在して, すべての $x,y\in X$ に対して

$$\frac{\|x+y\|^p+\|x-y\|^p}{2}\le\|x\|^p+\|Ky\|^p$$

が成立する.

(iii) すべての $s\in[1,\infty)$ に対して, ある $K_s>0$ が存在して, すべての $x,y\in X$ に対して

$$\left(\frac{\|x+y\|^s+\|x-y\|^s}{2}\right)^{1/s}\le(\|x\|^p+\|K_sy\|^p)^{1/p}$$

が成立する.

(iv) ある $s\in[1,\infty)$ と $K_s>0$ が存在して, すべての $x,y\in X$ に対して

$$\left(\frac{\|x+y\|^s+\|x-y\|^s}{2}\right)^{1/s}\le(\|x\|^p+\|K_sy\|^p)^{1/p}$$

が成立する.

同様にして, q-uniform convexity は次のように特徴付けられる. X を Banach 空間とし, $2\le q<\infty$ とする. そのとき, 以下は同値:

(i) X は q-uniformly convex である.

(ii) ある $C>0$ が存在して, すべての $x,y\in X$ に対して

$$\frac{\|x+y\|^q+\|x-y\|^q}{2}\ge\|x\|^q+\|Cy\|^q$$

が成立する.

(iii) すべての $t\in(1,\infty)$ に対して, ある $C_t>0$ が存在して, すべての $x,y\in X$ に対して

$$\left(\frac{\|x+y\|^t+\|x-y\|^t}{2}\right)^{1/t}\ge(\|x\|^q+\|C_ty\|^q)^{1/q}$$

が成立する.

(iv) ある $t\in(1,\infty)$ と $K_t>0$ が存在して, すべての $x,y\in X$ に対して

$$\left(\frac{\|x+y\|^t+\|x-y\|^t}{2}\right)^{1/t}\ge(\|x\|^q+\|C_ty\|^q)^{1/q}$$

が成立する.

Beckner の不等式は, p-uniform smoothness の特徴付けの (ii) $\Rightarrow$ (iii) の証明に必要となる. つまり, 証明中に次の不等式から導かれるノルム不等式 (cf. [5, Corollary 1.e.15]) を

用いている. $1 < p \le q < \infty$ 及び $\gamma_{p,q} = \sqrt{(p-1)/(q-1)}$ とする. そのとき, すべての $u, v \in \mathbb{R}$ に対して

$$\left(\frac{|u+\gamma_{p,q}v|^q + |u-\gamma_{p,q}v|^q}{2}\right)^{1/q} \le \left(\frac{|u+v|^p + |u-v|^p}{2}\right)^{1/p}$$

が成立する. この不等式は 1975 年に, Beckner [2] によってテイラー展開を用いて証明された. また, 定数 $\gamma_{p,q}$ がこの不等式についての最良定数であることも知られている. つまり, $\gamma \in [0,1]$ がすべての $u, v \in \mathbb{R}$ に対して

$$\left(\frac{|u+\gamma v|^q + |u-\gamma v|^q}{2}\right)^{1/q} \le \left(\frac{|u+v|^p + |u-v|^p}{2}\right)^{1/p}$$

を満たすとき, $\gamma \le \gamma_{p,q}$ となる. この事実の証明は Yamada-Takahashi-Kato [10, Theorem 6] の証明中に見ることができる.

2 Beckner の不等式の別証明

最近, Tanaka-Saito-Komuro [9] において, Beckner の不等式及び定数 $\gamma_{p,q}$ の最良性の別証明が与えられた. 以下の考察がその出発点である. $x = u+v$ 及び $y = u-v$ とする. これらを, 不等式に代入することで

$$\left(\frac{|(1+\gamma)x + (1-\gamma)y|^q + |(1-\gamma)x + (1+\gamma)y|^q}{2^{q+1}}\right)^{1/q} \le \left(\frac{|x|^p + |y|^p}{2}\right)^{1/p}.$$

を得る. よって, Beckner 型の不等式は以下の不等式と同値である.

$$\left\| \begin{pmatrix} 1+\gamma & 1-\gamma \\ 1-\gamma & 1+\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|_q \le 2^{1+1/q-1/p} \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|_p.$$

ここで $\delta = (1-\gamma)/(1+\gamma)$ とおけば, 上から

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 & \delta \\ \delta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|_q \le 2^{1/q-1/p}(1+\delta) \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|_p.$$

を得る. さらに $x = y = 1$ のとき等式が成立する. これらの考察は次の補題にまとめられる.

Lemma 2.1. $\gamma \in [0,1]$ 及び $\delta = (1-\gamma)/(1+\gamma)$ とする.

$$A_\delta = \begin{pmatrix} 1 & \delta \\ \delta & 1 \end{pmatrix}.$$

とすると, 以下は同値:

(i) すべての $u, v \in \mathbb{R}$ に対して

$$\left(\frac{|u+\gamma v|^q + |u-\gamma v|^q}{2}\right)^{1/q} \leq \left(\frac{|u+v|^p + |u-v|^p}{2}\right)^{1/p}$$

が成立する.

(ii) $\|A_\delta : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p) \to (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_q)\| = 2^{1/q-1/p}(1+\delta)$.

$\|A_\delta : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p) \to (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_q)\|$ は初等的な関数の最大値を計算することで求めることができる.

Lemma 2.2. $\delta \in [0,1]$ に対して, $[0,1]$ 上の関数 $f_{p,q,\delta}$ を

$$f_{p,q,\delta}(t) = \left(\left(t^{1/p} + \delta(1-t)^{1/p}\right)^q + \left(\delta t^{1/p} + (1-t)^{1/p}\right)^q\right)^{1/q}.$$

によって定める. そのとき

$$\|A_\delta : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p) \to (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_q)\| = \max_{0\leq t\leq 1/2} f_{p,q,\delta}(t).$$

$f_{p,q,\delta}(1/2) = 2^{1/q-1/p}(1+\delta)$ であることから, 結局次の補題を得る.

Lemma 2.3. $\gamma \in [0,1]$ 及び $\delta = (1-\gamma)/(1+\gamma)$ とすると, 以下は同値:

(i) すべての $u, v \in \mathbb{R}$ に対して

$$\left(\frac{|u+\gamma v|^q + |u-\gamma v|^q}{2}\right)^{1/q} \leq \left(\frac{|u+v|^p + |u-v|^p}{2}\right)^{1/p}$$

が成立する.

(ii) $f_{p,q,\delta}(1/2) = \max_{0\leq t\leq 1/2} f_{p,q,\delta}(t)$.

今, $\delta_{p,q} = (1-\gamma_{p,q})/(1+\gamma_{p,q})$ とする. 関数 $\gamma \mapsto (1-\gamma)/(1+\gamma)$ が $[0,1]$ 上狭義単調減少であることから, $\gamma \in (\gamma_{p,q}, 1]$ と $\delta = (1-\gamma)/(1+\gamma) \in [0, \delta_{p,q})$ が同値であることがわかる. したがって, Lemma 2.3 から

$$f_{p,q,\delta_{p,q}}(1/2) = \max_{0\leq t\leq 1/2} f_{p,q,\delta_{p,q}}(t)$$

及び, すべての $0 \leq \delta < \delta_{p,q}$ に対して

$$f_{p,q,\delta}(1/2) < \max_{0\leq t\leq 1/2} f_{p,q,\delta}(t)$$

を示せば十分である.

3 Becknerの不等式の一般化

この節では, symmetric absolute normalized norms on $\mathbb{R}^2$ を用いて Becknerの不等式の一般化を考える. $\mathbb{R}^2$ 上のノルム $\|\cdot\|$ は

(i) すべての $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ に対して $\|(x,y)\|=\|(y,x)\|$ であるとき symmetric,

(ii) すべての $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ に対して $\|(x,y)\|=\|(|x|,|y|)\|$ であるとき absolute, 及び

(iii) $\|(1,0)\|=\|(0,1)\|=1$ のとき normalized

とそれぞれ言われる. このようなノルムのもっとも重要な例としては,

$$\|(x,y)\|_p=\begin{cases}(|x|^p+|y|^p)^{1/p} & \text{if } 1\le p<\infty,\\ \max\{|x|,|y|\} & \text{if } p=\infty.\end{cases}$$

によって定められる ℓ_p ノルムが挙げられる.

AN_2 を $\mathbb{R}^2$ 上の absolute normalized norm の全体とし, Ψ_2 をすべての $t\in[0,1]$ に対して不等式 $\max\{1-t,t\}\le\psi(t)\le 1$ を満たす $[0,1]$ 上の凸関数 ψ の全体とする. そのとき, AN_2 と Ψ_2 は等式 $\psi(t)=\|(1-t,t)\|$ の下で一対一に対応することが知られている (cf. [4, 6]). これより, 凸関数 $\psi\in\Psi_2$ に対応するノルム $\|\cdot\|_\psi$ は次の式で与えられることがわかる

$$\|(x,y)\|_\psi=\begin{cases}(|x|+|y|)\psi\left(\dfrac{|y|}{|x|+|y|}\right) & \text{if } (x,y)\ne(0,0),\\ 0 & \text{if } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

特に, $\|\cdot\|_p$ に対応する関数 ψ_p は

$$\psi_p(t)=\begin{cases}((1-t)^p+t^p)^{1/p} & \text{if } 1\le p<\infty,\\ \max\{1-t,t\} & \text{if } p=\infty.\end{cases}$$

によって与えられる.

また, ノルム $\|\cdot\|_\psi$ が symmetric であることと, ψ が $1/2$ に関して対称なこと, つまり, すべての $t\in[0,1]$ に対して $\psi(t)=\psi(1-t)$ が成立することとは同値であることに注意する. 今後は, そのような Ψ_2 の元全体を Ψ_2^S によって表すこととする.

さて, 関数 ψ_p 及び ψ_q を用いることで, Beckner の不等式は次のように見ることができる. $1<p\le q<\infty$ 及び $\gamma_{p,q}=\sqrt{(p-1)/(q-1)}$ とする. そのとき, すべての $u,v\in\mathbb{R}$ に対して

$$\frac{\|(u+\gamma_{p,q}v,u-\gamma_{p,q}v)\|_q}{2\psi_q(\frac{1}{2})}\le\frac{\|(u+v,u-v)\|_p}{2\psi_p(\frac{1}{2})}$$

が成立する. これにより, 次の問題が提起される.

Problem. $\varphi,\psi\in\Psi_2^S$ 及び $\gamma\in[0,1]$ とする. そのとき, いつすべての $u,v\in\mathbb{R}$ に対して

$$\frac{\|(u+\gamma v,u-\gamma v)\|_\varphi}{2\varphi(\frac{1}{2})}\le\frac{\|(u+v,u-v)\|_\psi}{2\psi(\frac{1}{2})}$$

が成立するか?

各 $\varphi,\psi\in\Psi_2^S$ に対して $\Gamma(\varphi,\psi)$ を, すべての $u,v\in\mathbb{R}$ に対して

$$\frac{\|(u+\gamma v,u-\gamma v)\|_\varphi}{2\varphi(\frac{1}{2})}\leq\frac{\|(u+v,u-v)\|_\psi}{2\psi(\frac{1}{2})},$$

を満たすような $\gamma\in[0,1]$ の全体, つまり, 上記の問題に対する解の集合とする. また, $\gamma_{\varphi,\psi}=\max\Gamma(\varphi,\psi)$ とすると, $\gamma_{\varphi,\psi}$ は一般化された Beckner の不等式に対する最良定数を表す. 応用上もっとも重要となるのは $\gamma_{\varphi,\psi}>0$ となるための条件を探ることである.

次の補題は, $\mathbb{R}^2$ 上の absolute norm の重要な特徴付けである. 証明は [3, Proposition IV.1.1] に見られる. (cf. [7, Lemma 4.1]).

Lemma 3.1. $\mathbb{R}^2$ 上のノルム $\|\cdot\|$ が *absolute* であることと, それが *monotone* であること, つまり, $|x_1|\leq|x_2|$ 及び $|y_1|\leq|y_2|$ ならば $\|(x_1,y_1)\|\leq\|(x_2,y_2)\|$ となることとは同値である.

問題を単純化するため, 次の補題を用いる.

Lemma 3.2. $\varphi,\psi\in\Psi_2^S$ 及び $\gamma\in[0,1]$ とする. そのとき, 以下は同値:

(i) すべての $u,v\in\mathbb{R}$ に対して

$$\frac{\|(u+\gamma v,u-\gamma v)\|_\varphi}{2\varphi(\frac{1}{2})}\leq\frac{\|(u+v,u-v)\|_\psi}{2\psi(\frac{1}{2})}$$

が成立する.

(ii) すべての $u\in[0,1]$ に対して

$$\frac{\|(1+\gamma u,1-\gamma u)\|_\varphi}{2\varphi(\frac{1}{2})}\leq\frac{\|(1+u,1-u)\|_\psi}{2\psi(\frac{1}{2})}$$

が成立する.

この補題の (ii) は次の条件と同値であることに注意する. すべての $u\in[0,1]$ に対して

$$\frac{\varphi(\frac{1-\gamma u}{2})}{\psi(\frac{1-u}{2})}\leq\frac{\varphi(\frac{1}{2})}{\psi(\frac{1}{2})}$$

が成立する. したがって, すべての $\varphi,\psi\in\Psi_2^S$ に対して

$$\Gamma(\varphi,\psi)=\left\{\gamma\in[0,1]:\frac{\varphi(\frac{1-\gamma u}{2})}{\psi(\frac{1-u}{2})}\leq\frac{\varphi(\frac{1}{2})}{\psi(\frac{1}{2})}\text{ for all }u\in[0,1]\right\}.$$

であることがわかる. これにより $\gamma_{\varphi,\psi}>0$ となるためのいくつかの十分条件を得ることができる. 詳細は [8] を参照されたい.

参考文献

[1] B. Beauzamy, *Introduction to Banach space and Their geometry, Second edition*, North-Holland, Amsterdam, 1985.

[2] W. Beckner, *Inequalities in Fourier analysis*, Ann. of Math., **102** (1975), 159–182.

[3] R. Bhatia, *Matrix analysis*, Springer-Verlag, New York, 1997.

[4] F. F. Bonsall and J. Duncan *Numerical ranges II*, Cambridge University Press, Cambridge, 1973.

[5] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *Classical Banach spaces II*, Springer-Verlag, Berlin, 1979.

[6] K.-S. Saito, M. Kato and Y. Takahashi, *Von Neumann-Jordan constant of absolute normalized norms on* $\mathbb{C}^2$, J. Math. Anal. Appl., **244** (2000), 515–532.

[7] K.-S. Saito, M. Kato and Y. Takahashi, *Absolute norms on* $\mathbb{C}^n$, J. Math. Anal. Appl., **252** (2000), 879–905.

[8] K.-S. Saito and R. Tanaka, *On generalized Beckner's inequality*, to appear in Ann. Funct. Anal.

[9] R. Tanaka, K.-S. Saito and N. Komuro, *Another approach to Beckner's inequality*, J. Math. Inequal., **7** (2013), 543–549.

[10] Y. Yamada, Y. Takahashi and M. Kato, *On Hanner type inequalities with a weight for Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl., **324** (2006), 1228–1241.