数理解析研究所講究録
第 1894 巻 2014 年 45-52

境界上の重みの釣合せ
Weight Balancing on Boundaries and Skeletons

ブリュッセル自由大学／カールトン大学　ルイス・バルバ（Luis Barba）
韓国科学技術院　鄭地園（Otfried Cheong）
カールトン大学　ジャン・ルー・ド・カルフェル（Jean-Lou De Carufel）
浦項工科大学校　マイケル・ドビンズ（Michael Dobbins）
復旦大学／オマーン・ドイツ工科大学
ルードルフ・フライシャー（Rudolf Fleischer）
東京大学　河村彰星（Akitoshi Kawamura）
国立情報学研究所　マティアス・コルマン（Matias Korman）
電気通信大学　岡本吉央（Yoshio Okamoto）
スイス聯邦工科大学ローザンヌ校／レーニ・アルフレード数学研究所
パハ・ヤーノシュ（János Pach）
復旦大学　唐淵（Yuan Tang）
東北大学　徳山豪（Takeshi Tokuyama）
カールトン大学　サンダー・バードンスホト（Sander Verdonschot）
復旦大学　王天豪（Tianhao Wang）

概要

原点を含む任意の多角形の周上に対蹠点，すなわち原点について対称な二点が存在することは比較的たやすい．本稿ではその拡張を三つ考え，次のことを示す．
(1) 原点を含む多角形（一般に単純閉曲線で囲まれた領域としてもよい）の周上に所与の幾つかの重みを置いて重心を原点に合せることは，もし他の重みすべてを合せたよりも大きい重みがなければ必ずできる．(2) 原点を含む任意の三次元多面体の境界上に，原点を中心とする正三角形をなす三点がある．(3) 原点を含む任意の三次元凸多面体の 1 骨格（辺上）に，原点を重心とする三点がある．

本稿は論文 [1] の解説であり，証明などの一部は [1] を参照する．また本稿は主に存在定理について話を進めるが，[1] では対応する計算法や困難さも論じている．

1 はじめに

本稿では次の事実を三つの方向に拡張する（以下多角形や多面体というときは凸とは限らず有界で中身の詰まったものを指すことにする）.

定理 0 原点を含む任意の多角形の周上に，原点対称な二点（**対蹠点**）が存在する.

式で書くと，任意の多角形 P について次が成立つということである.

$$2P \subseteq \partial P \oplus \partial P$$

ここで ∂P は P の境界，$A \oplus B = \{\, x + y \mid x \in A,\ y \in B \,\}$ は集合 A と B とのミンコフスキ和，$\alpha A = \{\, \alpha x \mid x \in A \,\}$ は A を原点を中心に α 倍に拡縮したものを指す.

定理 0 の証明 与えられた多角形 P と，それを原点を中心に反転した図形 $-P$ とを考える．これらは片方が他方に真に含まれることはなく，原点を共有するので，境界どうしが或る点 $q \in \partial P \cap (-\partial P)$ で交わる．この q と $-q$ とが ∂P 上の対蹠点である. □

相異なる重み

定理 0 は，境界上に重みを置いて原点を中心に釣合わすことができるとも読める．これを一般の重みに拡張して次のことを 2 節で示す（定理 0 はこれに含まれる).

定理 1 k 個の重み $w_1 \geq w_2 \geq \cdots \geq w_k$ が $w_1 \leq w_2 + \cdots + w_k$ を満すならば，原点を含む任意の多角形（一般に単純閉曲線で囲まれた領域でもよい）$P \subseteq \mathbb{R}^2$ の周上に，これらの重みを置いて重心が原点になるようにできる.

先程と同様に式で書けば，重みが条件を満すとき次が成立つということである.

$$(w_1 + \cdots + w_k)P \subseteq w_1\partial P \oplus w_2\partial P \oplus \cdots \oplus w_k\partial P$$

P を単位円とすれば定理 1 は，長さ w_1，$w_2, \cdots$，w_k の棒を関節で繋げたロボットの腕の可動範囲についての主張と見ることもできる．この腕の一端を原点に固定したとき，他端が半径 $w_1 + \cdots + w_k$ の円内の全域に届くには，長さが全体の半分を超える棒のないことが必要十分と知られている [3]．定理 1 はこれが一般の P で成立つというのである.

鼎蹠点

後二つの結果は三次元（以上）への拡張であり，多角形の代りに多面体を考える．定理 0 の対蹠点の代りに次の主張を 3 節で示す．

定理 2　原点を含む任意の三次元多面体の境界上に，原点を中心とする正三角形をなす三点（**鼎蹠点**と呼ぶことにする）が存在する．

似た有名な問題に Toeplitz の接正方形問題 (square peg problem) がある．平面上の任意の閉曲線上に正方形をなす四点があるという Toeplitz による 1911 年の予想であり，これは未解決だが，曲線が十分に滑らかならば成立つことがわかっている．この問題の変種として Meyerson [7] や Kronheimer, Kronheimer [4] により，任意の単純閉曲線 C と任意の三角形 T とに対し，C 上に T に相似な三角形が存在することが示されている（定理 2 のような正三角形という制限はない）．これらの問題については Matschke [6] を見よ．

骨格上への配置

定理 0 をやはり（同じ大きさの）重みの釣合せと見た上で高次元への拡張を考えよう．といっても，多面体の境界上に重みを載せるというだけではつまらない．何故なら，多面体を適当な平面で切った切り口（のうち原点を含む連結成分）に二次元の定理 1 を適用すれば，この平面上だけで（等しい重みであれば幾つでも）配置が可能であることがすぐわかるからである．そこで制限を強めて重みを辺上に配置することにする．

定理 3　原点を含む任意の三次元凸多面体の辺上に，原点を重心とする三点が存在する．

つまり凸多面体 P の骨格（辺の全体）を $S_1(P)$ で表すと，

$$3P \subseteq S_1(P) \oplus S_1(P) \oplus S_1(P)$$

4 節では更にこれを d 次元凸多面体と d 個の重みで考える．[1] では d の素因数が 2 と 3 のみであるときに成立つことを示しているが，凸でない多面体についてはわからない．定理 3 のように相異なる重みを考えるとどうなるかも未解決である．

ボルスク・ウラムの定理との関係

定理 0 の高次元への一般化としてはボルスク・ウラムの定理を挙げることもできる．これは離散・計算幾何で多くの応用をもつ重要な定理であり [5]，d 次元球面（$d+1$ 次元の球の境界）上の任意の連続函数 $f\colon \mathbb{S}^d \to \mathbb{R}^d$ は $f(x)=f(-x)$ なる点 x をもつというもの

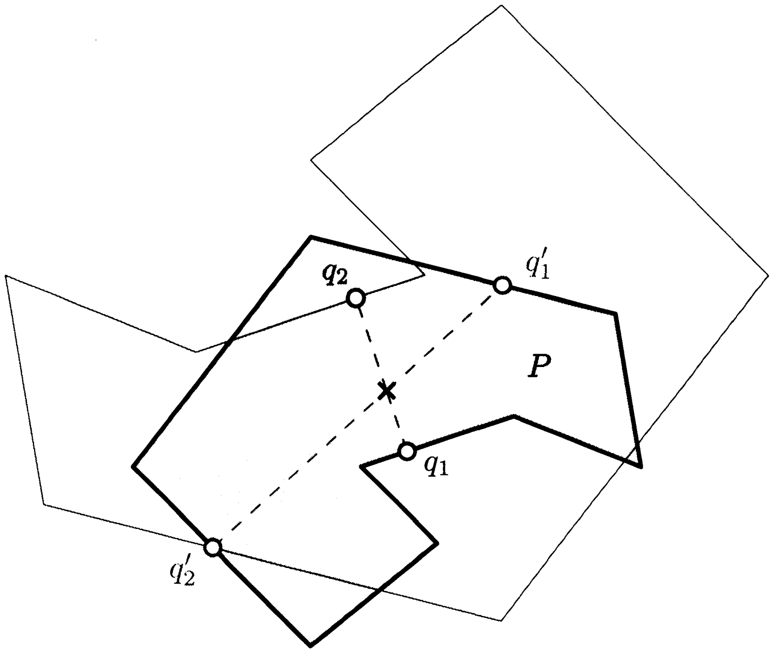

図 1　定理 1 の証明の第二段．重み w_1 と w_2 とが初め点 $q_1 \in \partial P$ と $q_2 \in P$ にあり，w_1 が ∂P 上を動くとき，重心が動かないように w_2 を動かせば，w_2 は ∂P の或る拡大像を動くことになるので，∂P に或る点 q_2' でぶつかる．

である．$d=1$ のときこれは，凸領域 P についての定理 0 の主張と同じになる（$f(x)$ を方向 x における原点から ∂P への距離とすればよい）．また定理 3 の証明にもボルスク・ウラムの定理の変種が使われる．本稿の結果とボルスク・ウラムの定理とのより密接な関係を見出すことは今後の課題である．

2　相異なる重み

定理 1 を示す．与えられた多角形を P とする．まず最大の重み w_1 を，境界 ∂P 上で原点に最も近い点 p に置き，残りの重みをすべて，全体の重心が原点に合うような一点に置く．つまり重み $w_2, \cdots, w_k$ は $-p \cdot w_1/(w_2+\ldots+w_k)$ という点に置くことになるが，この点は仮定 $w_1 \le w_2+\cdots+w_k$ と p の取り方とにより P の内部（か境界）にある．

次にこの配置において，重み w_1 を周 ∂P 上に走らせると同時に，全体の重心が原点に合ったままになるように w_2 を動かす（他の重みは止めておく）．つまり w_2 は或る点を中心に ∂P を $-w_1/w_2$ 倍した図形の上を動くことになる．この図形は ∂P を拡大したものであり，また w_2 は初め P 内にあったから，どこかで P から出てくる（∂P にぶつかる）ことになる．これで w_1 と w_2 がともに周 ∂P 上に来た．

今度は w_1 はこの点に留めておき，重み w_2 を周 ∂P 上に走らせると同時に，全体の重心が原点に合ったままになるように w_3 を動かす（他の重みは止めておく）．つまり w_3 は或る点を中心に ∂P を $-w_2/w_3$ 倍した図形の上を動くことになる．この図形は ∂P を拡大したものであり，また w_3 は初め P 内にあったから，どこかで ∂P にぶつかる．これで w_1 と w_2 と w_3 までが周 ∂P 上に来た．

これを繰返すとすべての重みを ∂P 上に動かすことができる．定理 1 が示された．

3 鼎蹠点

ここでは（凸とは限らない有界な三次元の）多面体 P を考え，その周上に必ず鼎蹠点があるという定理 2 を示す．鼎蹠点は原点が重心であり原点から同じ距離にある点ということだから，対蹠点の自然な一般化といえよう．

∂P 上で原点 o に最も近い点と遠い点（の一つ）をそれぞれ p_0，p_1 とする．境界 ∂P 上の p_0 から p_1 への路 L を考える．これは $\gamma(0) = p_0$，$\gamma(1) = p_1$ なる一対一の連続写像 $\gamma\colon [0,1] \to L$ で書かれる．

鼎蹠点 $a \in L$，$b \in \partial P$，$c \in \partial P$ が存在することを示そう．各 $q \in L$ について $H(q)$ を，直線 oq に直交するベクトルの全体とする．証明は [1] にある．

補題 4 区分代数的な函数 $\mathbf{v}\colon L \to \mathbb{S}^2$ であって各 $q \in L$ で $\mathbf{v}(q) \in H(q)$ が成立つものが存在する．

そのような $\mathbf{v}\colon L \to \mathbb{S}^2$ を一つ取る．各 $t \in [0,1]$ と $\theta \in [0, 2\pi)$ について，点 $b(t,\theta)$ と点 $c(t,\theta)$ を次を満す唯一のものとする．

- 三点 $\gamma(t)$，$b(t,\theta)$，$c(t,\theta)$ は鼎蹠点である．
- ベクトル $b(t,\theta) - c(t,\theta) \in H(\gamma(t))$ の方向は，$\mathbf{v}(\gamma(t))$ を（平面 $H(\gamma(t))$ 上で）角 $+\theta$ だけ廻転させたものである．

$b(t,\theta)$ が P の内部，外部，境界上のいづれにあるかに従って $f_1(t,\theta) \in \{+,-,0\}$ を定める．同様に $c(t,\theta)$ により $f_2(t,\theta)$ を定める．

さて $f_1(t,\theta) = f_2(t,\theta) = 0$ なる (t,θ) があれば，三点 $\gamma(t)$，$b(t,\theta)$，$c(t,\theta)$ が望む鼎蹠点である．そこでそのような (t,θ) はないとしよう．組 (t,θ) の**符号** $F(t,\theta)$ を

$$F(t,\theta) = \begin{cases} ++ & (f_1(t,\theta), f_2(t,\theta)) \in \{(+,+),(+,0),(0,+)\} \text{ のとき} \\ -- & (f_1(t,\theta), f_2(t,\theta)) \in \{(-,-),(-,0),(0,-)\} \text{ のとき} \\ +- & (f_1(t,\theta), f_2(t,\theta)) = (+,-) \text{ のとき} \\ -+ & (f_1(t,\theta), f_2(t,\theta)) = (-,+) \text{ のとき} \end{cases}$$

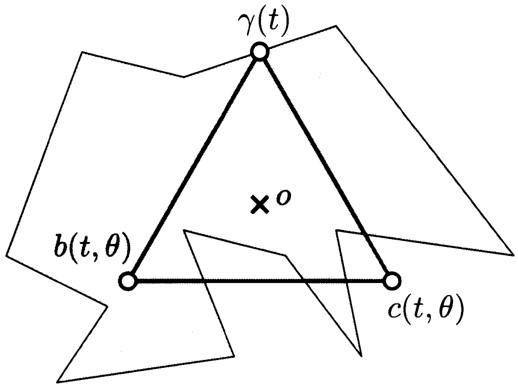

図 2　この (t,θ) の符号は $+-$ である.

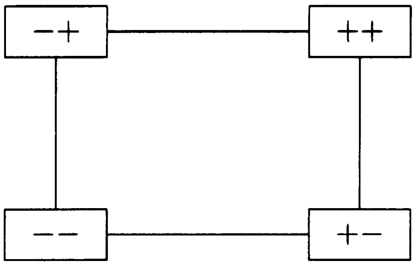

図 3　符号の遷移はこのグラフ C 上の $++$ から $--$ への歩で表される.

とする（図 2）. 点 p_0 と p_1 は最近点と最遠点だから, $F(0,\theta)=++$, $F(1,\theta)=--$ が成立つ.

各 θ に対し, t が 0 から 1 まで動くときに符号 $F(t,\theta)$ がどう変るかを見る. $\mathbf{v}$ は区分代数的であったから, 変化は有限回であり, 図 3 のグラフ C 上の $++$ から $--$ への歩 $\mathcal{W}(\theta)$ に対応する.

$++$ と $+-$ を結ぶ枝 e を考える. $++$ から $--$ への歩が偶であるか奇であるかを, この e を通る回数の偶奇により定める. 例えば歩 $++\cdot+-\cdot--$ は奇であり, $++\cdot-+\cdot--$ は偶である.

θ を或る角から或る角まで連続的に動かすとき, 歩 $\mathcal{W}(\theta)$ は途中で変るが偶奇は変らない. しかし $\mathcal{W}(0)$ と $\mathcal{W}(\pi)$ は偶奇が異なるはずである. 何となれば, $++$ と $-+$ の間にある枝を e' とすると, $\{e,e'\}$ は C 上での $++$ と $--$ の切断であるから, どの歩も e と e' を合せて奇数回使う. 一方 $b(t,0)=c(t,\pi)$, $c(t,0)=b(t,\pi)$ であるから $\mathcal{W}(\pi)$ は $\mathcal{W}(0)$ の $-+$ と $+-$ を入れ替えたものであり, 片方が e を通る回数は他方が e' を通る回数である. したがって $\mathcal{W}(0)$ と $\mathcal{W}(\pi)$ は偶奇が異なる.

これは矛盾であるから, 定理 2 が従う. 鼎蹠点以外の配置や高次元への拡張は今後の課

題である.

4 骨格上への配置

d 次元多面体 P は 0〜d 次元の面に分解される. i 次元の面の全体を F_i としよう. k 次元以下の面を合せたもの $S_k(P) = \bigcup_{i=0}^{k} \bigcup_{f \in F_i} f$ を P の k **骨格**と呼ぶ. 特に 1 骨格 $S_1(P)$ とは辺上の点 (頂点を含む) 全体であり, $d-1$ 骨格は境界 ∂P である. 二次元の定理 0 は $S_1(P) = \partial P$ 上に重みを置いたわけだから, その拡張としてやはり 1 骨格 $S_1(P)$ 上に重みを置くという問題も自然であろう. そこで次の予想を立てる.

予想 5 原点を含む任意の d 次元多面体の 1 骨格上に, 原点を重心とする d 個の点が存在する.

すなわち任意の d 次元多面体 $P \subseteq \mathbb{R}^d$ について次が成立つという予想である.

$$dP \subseteq \underbrace{S_1(P) \oplus \cdots \oplus S_1(P)}_{d\ \text{個}}$$

これは $d = 3$ についても示すことができていない.

以下では P が凸の場合を考える. d が 2 の冪であるとき予想 5 が凸多面体について成立つことは, 次の補題を帰納的に用いた初等的な証明でわかる.

補題 6 任意の凸多面体 $P \subset \mathbb{R}^d$ について

$$2P \subseteq S_{\lfloor d/2 \rfloor}(P) \oplus S_{\lceil d/2 \rceil}(P)$$

この補題の証明は [1] にある. この補題は $\lfloor d/2 \rfloor$ 次元の面と $\lceil d/2 \rceil$ 次元の面に対蹠点を取ることができると述べているが, これは他の k 次元, $d-k$ 次元の組については必ずしも成立たない (その例も [1] にある).

ベクトル束の $\mathbb{Z}_p$ 値オイラー類についてのボルスク・ウラムの定理の拡張を用いることで次が示される (本稿では証明を述べない). 定理 3 はこれの一部である.

定理 7 予想 5 は $d = 2^i 3^j$ 次元の凸多面体について成立つ ($i,\ j \geq 0$).

なお最近すべての d でも予想 5 が凸多面体については成立つことが Dobbins により示された [2].

謝辞

この研究は 2012 年 8 月以来オタワ，伊香保，サンシャインコースト，金沢で開催された研究集会で進んだ．それぞれの世話人の方々に謝意を表する．また以下の資金による助成を受けた．Fonds de recherche du Québec – Nature et technologies (FQRNT)，the Secretary for Universities and Research of the Ministry of Economy and Knowledge of the Government of Catalonia, the European Union, the ESF EUROCORES programme EuroGIGA — ComPoSe IP04 — MICINN Project EUI-EURC-2011-4306，科学研究費補助金（文部科学省・日本学術振興会），新学術領域研究「計算限界解明」，NSF China (no. 60973026)，the Shanghai Leading Academic Discipline Project (no. B114)，the Shanghai Committee of Science and Technology (nos. 08DZ2271800 and 09DZ2272800)，科学技術振興機構 ERATO 河原林巨大グラフプロジェクト，the Research Council (TRC) of the Sultanate of Oman，NRF grant 2011-0030044 (SRC-GAIA) funded by the government of Korea，the Natural Sciences and Engineering Research Council of Canada (NSERC).

参考文献

[1] L. Barba, J.-L. De Carufel, O. Cheong, M. Dobbins, R. Fleischer, A. Kawamura, M. Korman, Y. Okamoto, J. Pach, Y. Tang, T. Tokuyama, S. Verdonschot and T. Wang. Weight balancing on boundaries and skeletons. In *Proc. 30th Annual Symposium on Computational Geometry* (SoCG), Kyoto, Japan, June 2014.

[2] M. G. Dobbins. A Point in a d-Polytope is the barycenter of n points in its (d/n)-faces. ArXiv:1312.4411, December 2013.

[3] J. E. Hopcroft, D. Joseph, and S. Whitesides. On the movement of robot arms in 2-dimensional bounded regions. *SIAM Journal on Computing*, 14(2):315–333, 1985.

[4] E. H. Kronheimer and P. B. Kronheimer. The tripos problem. *Journal of the London Mathematical Society (2)*, 24:182–192, 1981.

[5] J. Matoušek. *Using the Borsuk-Ulam Theorem.* Springer Verlag, 2003.

[6] B. Matschke. A survey on the square peg problem. *Notices of the American Mathematical Society*, 61(4):346–352, 2014.

[7] M. D. Meyerson. Equilateral triangles and continuous curves. *Fundamenta Mathematicae*, 110:1–9, 1980.