数理解析研究所講究録
第 1897 巻 2014 年 43-70

Some problems on Fano varieties

ファノ多様体についてのいくつかの問題

京都大学大学院理学研究科数学教室
藤野 修*
Osamu Fujino
Department of Mathematics, Faculty of Science,
Kyoto University

平成26年1月8日

概要

We discuss some problems on (semi) log canonical Fano varieties.

(半) 対数的標準ファノ多様体についてのいくつかの問題を論じる。

目次

* 〒 606-8502 京都市左京区北白川追分町, e-mail: fujino@math.kyoto-u.ac.jp

1 はじめに

まず最初に、私はファノ多様体の専門家ではない。ここでは、おもに対数的標準ファノ多様体 (log canonical Fano varieties) についての問題を論じたい。今回の講演のためにいろいろと試行錯誤してみたが、あまり上手くいかなかったという失敗談ばかりになってしまっているかもしれない。2 章で対数的標準対 (log canonical pairs) の基本性質を思い出す。対数的標準対の基本性質が明らかになったのは意外と最近のことなので、あまり馴染みのない内容かもしれない。3 章では、対数的標準ファノ多様体やその一般化の基本群についていろいろと考察してみる。ファノ型の多様体の代数的基本群が自明であることは消滅定理の応用として簡単に示すことが出来るが、位相的基本群を調べるのは難しい。対数的標準ファノ多様体が単連結であることは証明出来るが、半対数的標準ファノ多様体 (semi log canonical Fano varieties) や擬対数的標準ファノ多様体 (quasi-log canonical Fano varieties) に関しては未解決である。4 章では滑らかな射での安定性について考察してみる。$f : X \to Y$ を非特異射影代数多様体の間の滑らかな射とする。このとき、$-K_X$ の性質はどの程度 $-K_Y$ に遺伝するであろうか？という問題である。X が非特異ファノ多様体のとき Y も非特異ファノ多様体であるというのがコラール–宮岡–森 (Kollár–Miyaoka–Mori) の有名な結果である。このような形の主張はどの程度成り立つのだろうか？と問うわけである。基礎体の標数が零のときはほぼ満足のいく結果が得られているが、正標数の世界ではまだ未解決の問題があるように思える。5 章では、端射線 (extremal rays) の長さに関する昇鎖列条件 (ascending chain condition) について考察する。ショクロフ (Shokurov) の哲学によると、代数多様体の様々な不変量は昇鎖列条件を満たすはずである。対数的標準閾 (log canonical thresholds) に関する昇鎖列予想は最近解決されたようである。極小対数的食い違い係数 (minimal log discrepancy) に関する昇鎖列予想は難解な未解決問題として有名である。一方、端射線の長さに関する昇鎖列条件はまだほとんど調べられていないという状況である。

この原稿は 12 月の講演の準備として講演前に用意した物である。講演の後、非特異ファノ多様体の単連結性の歴史について少し調べたので、その報告を 6 章に追加した。

謝辞: 阿部健さん、伊藤哲史さん、藤田健人さん、星裕一郎さんには様々なアドバイスを頂いた。森重文先生には 6 章についてコメントを頂いた。これらの方々に深く感謝する。

2 準備

この章では、対数的標準対 (log canonical pairs) の基本的なことをまとめておく。基本文献は [F5] である。お手軽に勉強したいなら、[F4] の方が良いかもしれない。[ふ 1]、[ふ 2]、[ふ 3] はこの報告書と同じスタイルで書かれた日本語の報告書である。極小モデル理論の一般論についてある程度の知識がある人は、直接 3 章に進み、必要に応じてこの章に戻ることをすすめる。以下、基礎体は複素数体とする。

定義 2.1 (川又対数的末端対と対数的標準対) X は正規代数多様体とし、Δ を X 上の有効 $\mathbb{R}$-因子で $K_X+\Delta$ が $\mathbb{R}$-カルティエになるものとする。$f: Y \to X$ は X の特異点解消で、f の例外集合 $\mathrm{Exc}(f)$ と $f_*^{-1}\Delta$ の台 $\mathrm{Supp} f_*^{-1}\Delta$ の和集合が単純正規交差因子 (simple normal crossing divisor) になるものとする。ただし、$f_*^{-1}\Delta$ は Δ の Y 上の厳密変換 (strict transform) とする。このとき、

$$K_Y = f^*(K_X+\Delta)+\sum_i a_iE_i$$

と書ける。ただし、$\sum_i a_iE_i$ は $\mathrm{Exc}(f)\cup\mathrm{Supp} f_*^{-1}\Delta$ に含まれるとする。ここで、すべての i に対し $a_i>-1$ が成立するとき、(X,Δ) は川又対数的末端対 (kawamata log terminal pair) といい、すべての i に対して $a_i \geq -1$ が成立するとき、(X,Δ) は対数的標準対 (log canonical pair) という。

対数的標準対は極小モデル理論 (minimal model program) の対数化で自然にあらわれた概念であるが、川又–フィーベック消滅定理 (Kawamata–Viehweg vanishing theorem) が対数的標準対に対してはほとんど無力であるので、あまり研究されてこなかった。

対数的標準対の研究で重要な役割を果たすのが、対数的標準中心なる部分多様体である。

定義 2.2 (対数的標準中心) (X,Δ) を対数的標準対とする。X の閉部分集合 C が (X,Δ) に関する対数的標準中心 (log canonical center) であるとは、(X,Δ) のある特異点解消が存在し、

$$K_Y = f^*(K_X+\Delta)+\sum_{i\in I} a_i E_i$$

と書いたとき、$f(E_{i_0})=C$ かつ $a_{i_0}=-1$ となる $i_0\in I$ が存在することとする。

対数的標準対 (X,Δ) が川又対数的末端対であることと、(X,Δ) に関する対数的標準中心が存在しないことは同値である。

このとき、以下の性質が成立する。証明は、たとえば、[F5] の定理 9.1 を見よ。

定理 2.3 (対数的標準中心の基本性質) (X,Δ) を対数的標準対とする。このとき、以下が成立する。

(1) (X,Δ) の対数的標準中心は高々有限個である。

(2) (X,Δ) の 2 つの対数的標準中心の交わりは、(X,Δ) のいくつかの対数的標準中心の和集合になる。

(3) $x\in X$ を閉点とし、(X,Δ) は x で川又対数的末端ではないとする。このとき、x を通る極小対数的標準中心 (minimal log canonical center)W_x がただ一つ存在し、W_x は x で正規である。

少し補足しておく。対数的標準中心の集合に包含関係で大小関係を入れる。この大小関係で極小な対数的標準中心を極小対数的標準中心と言うのである。

定理 2.3 は極めて強力な結果である。定理 2.3 の (2) と (3) は以下の消滅定理の応用として得られる。定理 2.4 の証明は、たとえば、[F5] の定理 8.1 を見よ。

定理 2.4 (消滅定理) (X,Δ) を対数的標準対とし、X は射影的とする。D を X 上のカルティィエ因子で $D-(K_X+\Delta)$ は豊富と仮定する。$\{C_i\}_{i\in I}$ を (X,Δ) の対数的標準中心の集合とし、

$$W=\bigcup_{j\in J} C_j$$

とおく、ただし、J は I の任意の部分集合とし、W には被約なスキームの構造を入れておく。$\mathcal{I}_W$ を W の X 上での定義イデアルとする。$J=\emptyset$ のときは $\mathcal{I}_W=\mathcal{O}_X$ である。このとき、

$$H^i(X, \mathcal{I}_W \otimes \mathcal{O}_X(D)) = 0$$

がすべての $i>0$ に対して成立する。

定理 2.4 の証明は意外と難しくない。この消滅定理のおかげで対数的標準対についての極小モデル理論の基本定理が簡単に証明出来るようになったのである。定理 2.4 を使うと以下も示せる。

定理 2.5 定理 2.4 の W は半正規 (semi normal) である。

大雑把に言うと、従来の極小モデル理論では、「次元による帰納法」「特異点解消定理」「川又–フィーベック消滅定理」「係数の摂動」を巧妙に使って様々な定理を証明していた。いわゆる X 論法と呼ばれる手法である。ただ、この X 論法は対数的標準対については無力である。[F4] や [F5] では、定理 2.4 と定理 2.3 の (2) と (3) を駆使して固定点自由化定理 (base point free theorem) などを証明する。この新しい手法は、X 論法というよりは代数的乗数イデアル層 (multiplier ideal sheaves) の理論に近いかもしれない。従来の X 論法より適用範囲が広いだけでなく、各種定理の証明の簡略化にも成功している。

対数的標準対についての極小モデル理論について詳しく知りたい人には [F8] をすすめる。一昔前に川又対数的末端対について知られていた枠組みがそっくりそのまま対数的標準対に一般化されている。さらに、極小モデル理論の各種未解決問題の間の関係については [FG4] が詳しい。

3 対数的標準ファノ多様体

この章では、基礎体は複素数体とする。

定義 3.1 (X,Δ) を対数的標準対とし、X は射影的とする。$-(K_X+\Delta)$ が豊富のとき、(X,Δ) を対数的標準ファノ多様体 (log canonical Fano variety) と呼ぶことにする。

上の定義ではちゃんと述べなかったが、Δ は $\mathbb{R}$-因子である。$\mathbb{R}$-因子がキライという読者は、以下 Δ を $\mathbb{Q}$-因子と思って読んでも全く問題ない。豊富性は開条件なので、Δ の係数を少し揺すって $\mathbb{Q}$-因子の話に帰着可能だからである。

極小モデル理論の観点からすると、ファノ多様体も対数的標準特異点まで許して考えるのが正しい研究態度だと思うが、残念ながら今まではあまり研究されてこなかったと思う。極小モデル理論の基本的なテクニックが対数的標準対に対して一般化されたので、ファノ多様体の研究も対数的標準対まで対象を広げるのは自然な態度であろう。

3.1 対数的標準ファノ多様体の基本群について

一つ目の問題は、対数的標準ファノ多様体の基本群についてである。

問題 3.2 (X, Δ) を対数的標準ファノ多様体とする。このとき、X の基本群は自明か？

(X, Δ) が川又対数的末端ファノ多様体のとき、X の単連結性は高山茂晴さんによって証明されている。詳しくは [T] を見よ。その結果を単純に対数的標準ファノ多様体の場合まで拡張出来ないのか？というのが問題 3.2 である。さすがに X の単連結性ぐらいは正しいだろうと思って藤田健人さんにメールで問い合わせると、「正しい」という返事が来た。

定理 3.3 (藤田健人) (X, Δ) を対数的標準ファノ多様体とする。このとき、X の基本群は自明である。つまり、X は単連結 (simply connected) である。

定理 3.3 はどの文献にも載っていないと思うが、既存の結果を組み合わせれば簡単に証明出来る。

3.4 (定理 3.3 の証明) まず、[HM] の系 1.3 より、X は有理鎖連結 (rationally chain connected) である。[Kl] の 4.13 定理を見ると、正規で完備な代数多様体 X が有理鎖連結なら、基本群 $\pi_1(X)$ は有限である。ここで、$f : \widetilde{X} \to X$ を普遍被覆とする。$\pi_1(X)$ が有限なので、f は有限エタール被覆である。特に、$(\widetilde{X}, \widetilde{\Delta})$ も対数的標準ファノ多様体である。ただし、

$$K_{\widetilde{X}} + \widetilde{\Delta} = f^*(K_X + \Delta)$$

である。小平型の消滅定理を使おう。$-(K_X+\Delta)$ が豊富なので、

$$H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0$$

がすべての $i>0$ で成立する。定理 2.4 を見よ。したがって、

$$\chi(X, \mathcal{O}_X) = 1$$

が成立する。$(\widetilde{X}, \widetilde{\Delta})$ に対しても同じ議論を適用すると、

$$\chi(\widetilde{X}, \mathcal{O}_{\widetilde{X}}) = 1$$

を得る。一方、リーマン–ロッホの定理を使うと、

$$\chi(\widetilde{X}, \mathcal{O}_{\widetilde{X}}) = \deg f \cdot \chi(X, \mathcal{O}_X)$$

が従う。たとえば、[Ful] の例 18.3.9 を見よ。これから $\deg f = 1$ を得る。つまり、$\widetilde{X} = X$ である。これは $\pi_1(X)$ が自明であることを意味する。

上の証明を見ると明らかだが、難しいのは $\pi_1(X)$ の有限性を示すところである。以前は小平型の消滅定理は川又対数的末端対にしか適用出来なかったが、現在は定理 2.4 のおかげで対数的標準対に対しても小平型の消滅定理が自由に使えるのである。

先に進む前に一つ例を見てみよう。この例が対数的標準ファノ多様体の研究の難しさを端的にあらわしている。

例 3.5 $\mathbb{P}^3$ 内で $X_0^3+X_1^3+X_2^3=0$ で定義される曲面 S を考えよう。S は 1 点 $P=(0:0:0:1)$ に孤立特異点を持つ曲面で、$-K_S$ は豊富なカルティエ因子で、S は高々対数的標準特異点しか持たない。特異点 P はいわゆる単純楕円特異点である。$\mathbb{P}^2$ 内の 3 次曲線 $X_0^3+X_1^3+X_2^3=0$ 上の P を頂点とする錐体が S である。S は明らかに有理鎖連結 (rationally chain connected) であるが、有理連結 (rationally connected) ではない。定理 3.3 より、S の基本群は自明である。ここで、$f: T \to S$ を S の P での爆発とすると、

$$K_T + E = f^* K_S$$

となる。E は f の例外曲線で、楕円曲線である。構成方法からすぐにわかることだが、T は楕円曲線上の $\mathbb{P}^1$-束になっている。したがって、T は有理鎖連結ではないし、T の基本群は非自明である。この例から分かる

ように、対数的標準ファノ多様体 (X,Δ) の性質を調べるとき、因子対数的末端爆発 (divisorial log terminal blow-up)

$$f:(\widetilde{X},\widetilde{\Delta})\to(X,\Delta)$$

を用いて $(\widetilde{X},\widetilde{\Delta})$ の性質の研究に帰着させることは不可能そうである。対数的標準対の研究の一つの常套手段である因子対数的末端爆発を使った議論が役立ちそうにないので、対数的標準ファノ多様体の研究は思ったより厄介のような気がする。有理鎖連結性や単連結性が因子対数的末端爆発で保たれないことが厄介な点である。

もう少し踏み込んで、以下の問題はどうだろうか？

問題 3.6 (X,Δ) を対数的標準ファノ多様体とする。$\{C_i\}_{i\in I}$ を (X,Δ) の対数的標準中心の集合とし、

$$W=\bigcup_{j\in J}C_j$$

とおく。ただし、J は I の空でない任意の部分集合とし、W には被約なスキーム構造を入れておく。このとき、W は単連結か？

問題 3.6 についていろいろ考察してみよう。

考察 3.7 まず、W は連結である。$\mathcal{I}_W$ を W の X 内での定義イデアルとする。ここで完全列

$$\cdots\to H^0(X,\mathcal{O}_X)\to H^0(W,\mathcal{O}_W)\to H^1(X,\mathcal{I}_W)\to\cdots$$

を考える。定理 2.4 を使うと、$H^1(X,\mathcal{I}_W)=0$ がしたがう。これから $H^0(W,\mathcal{O}_W)=\mathbb{C}$ が得られ、W の連結性が分かる。さらに定理 2.4 を使うと、

$$\cdots\to H^i(X,\mathcal{O}_X)\to H^i(W,\mathcal{O}_W)\to H^{i+1}(X,\mathcal{I}_W)\to\cdots$$

より、

$$H^i(W,\mathcal{O}_W)=0$$

がすべての $i>0$ で成立していることも分かる。よって $\chi(W,\mathcal{O}_W)=1$ である。次に、

$$\omega=(K_X+\Delta)|_W$$

とおくと、対 $[W,\omega]$ は擬対数多様体 (quasi-log variety) の構造を持つ。擬対数多様体については [F3] を見よ。また、明らかに $-\omega$ は豊富である。$[W,\omega]$ はいわゆる擬対数的標準ファノ多様体である (3.4 章を見よ)。$f:\widetilde{W}\to W$ を有限エタール被覆とする。もちろん $\widetilde{W}$ は連結と仮定する。このとき、$[\widetilde{W},\widetilde{\omega}]$ にも自然に擬対数多様体の構造を入れることが出来る。ただし、$\widetilde{\omega}=f^*\omega$ とする。この事実はそれほど自明ではないが、自然な主張であろう。詳しくは [F9] を見よ。したがって、$-\widetilde{\omega}$ の豊富性を考慮に入れて、擬対数多様体に対する小平型の消滅定理 (たとえば [F3] の定理 3.6 の (ii)) をつかうと、

$$H^i(\widetilde{W},\mathcal{O}_{\widetilde{W}})=0$$

がすべての $i>0$ で成り立つ。残念なことに、擬対数多様体についての消滅定理の証明は定理 2.4 の証明より格段に難しい。リーマン–ロッホの公式から

$$\chi(\widetilde{W},\mathcal{O}_{\widetilde{W}})=\deg f\cdot\chi(W,\mathcal{O}_W)$$

が従うのは以前と同様で、

$$\chi(\widetilde{W},\mathcal{O}_{\widetilde{W}})=\chi(W,\mathcal{O}_W)=1$$

から $\deg f=1$ を得る。つまり、f は同型写像である。ゆえに、W は非自明な有限エタール被覆は持てないのである。したがって、$\pi_1(W)$ が有限であることが示されれば、$\pi_1(W)$ が自明であることが従う。

考察 3.7 から直ちに従う結果をいくつか書いておく。

定理 3.8 W の代数的基本群 $\pi_1^{alg}(W)$ は自明である。

W が非自明な有限エタール被覆を持たないことを考察 3.7 の中で見たからである。代数多様体の代数的基本群が自明であることと、非自明な有限エタール被覆を持たないことは同値である。

定理 3.9 (X,Δ) を対数的標準ファノ多様体で川又対数的末端対でないとすると、(X,Δ) の極小対数的標準中心はただ一つ C_0 で、すべての対数的標準中心は C_0 を含む。

これは考察 3.7 と定理 2.3 の (2) から従う。もし極小対数的標準中心が 2 つあったとしよう。考察 3.7 によると、その 2 つの極小対数的標準中心の合併集合は連結なので、当然交わらなければならない。2 つの極小対数

的標準中心の交わりに新たに小さな対数的標準中心を見つけることができるので (定理 2.3 の (2))、矛盾が生じる。したがって、極小対数的標準中心はただ一つ C_0 である。C_0 がすべての対数的標準中心に含まれることは、連結性と C_0 の極小性より明らかである。

もう少し対数的標準ファノ多様体の上の対数的標準中心について考察してみよう。

考察 3.10 (X, Δ) を 2 次元の対数的標準ファノ多様体で、川又対数的末端対ではないと仮定しよう。すると、定理 2.4 を使った簡単な考察で、W は以下の 3 通りしかないことがすぐに分かる。

(i) 一点 P。

(ii) $\mathbb{P}^1$ が一本だけ。

(iii) 2 本の $\mathbb{P}^1$ が一点で横断的に交わったもの。

もちろんすべて単連結である。問題 3.6 は X の次元が 2 次元以下であるときは正しいことが分かっているのである。

[FG2] を使うと、以下の定理が簡単に示せる。これは問題 3.6 の非常に特殊な場合の肯定的な解決ともみなせる。

定理 3.11 (X, Δ) を対数的標準ファノ多様体とする。W を (X, Δ) の極小対数的標準中心とする。このとき、(W, Δ_W) は川又対数的末端対で $-(K_W + \Delta_W)$ が豊富になるような W 上の有効 $\mathbb{Q}$-因子 Δ_W をとることが出来る。特に、W は単連結である。

定理 3.11 を足掛かりにし、ファン・カンペンの定理などを繰り返し使うと W が単連結であることは簡単に確認出来るのではないか？というのが最初の素朴な考えだったのである。

3.2 対数的標準中心の個数について

ここで少し話題を変えよう。考察 3.10 から以下の疑問が生じる。

問題 3.12 (X, Δ) を対数的標準ファノ多様体とする。このとき、(X, Δ) の対数的標準中心の数は X の次元だけによる数で押さえられるか？

もう少し精密な問題を提起しておこう。

問題 3.13 (X,Δ) を n 次元対数的標準ファノ多様体とする。(X,Δ) の i 次元対数的標準中心の個数を $\mathcal{C}_i$ と書くことにする。このとき、

$$\mathcal{C}_i \leq \binom{n}{i}$$

が成立するか？ただし、$0 \leq i \leq n-1$ である。特に、(X,Δ) の対数的標準中心の個数は

$$2^n - 1$$

で押さえられるか？

考察 3.14 $X = \mathbb{P}^n$ とし、Δ を相異なる n 枚の超平面の和とする。このとき、(X,Δ) は対数的標準ファノ多様体で、

$$\mathcal{C}_i = \binom{n}{i}$$

が成立する。したがって、$\mathcal{C}_i$ の上限を $\binom{n}{i}$ より小さくすることは不可能である。X を重み付き射影空間とし、Δ を X の $n+1$ 個のトーラス不変因子のうちの n 個の和とする。このとき、明らかに (X,Δ) は対数的標準ファノ多様体で、

$$\mathcal{C}_i = \binom{n}{i}$$

である。もっと一般に、ピカール数 1 の $\mathbb{Q}$-分解的なトーリックファノ多様体でも同様の例が作れる。

$X = \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1))$ とし、$\Delta = N + F$ とする。ただし、N は $\mathbb{P}^1$ 束の負な切断とし、F は $\mathbb{P}^1$ 束のファイバーとする。このとき、(X,Δ) はやはり対数的標準ファノ多様体で、

$$\mathcal{C}_i = \binom{2}{i}$$

が成立している。

このような感じで、$\mathcal{C}_i = \binom{n}{i}$ が成立する対数的標準ファノ多様体の例を作ることは出来るのだが、これらよりたくさんの対数的標準中心を持つ対数的標準ファノ多様体はすぐには思いつかない。

考察3.10で見たように、問題3.13は2次元以下では正しいことは分かっている。

次の定理は定理 3.9 から直ちに従う。0 次元の対数的標準中心は自動的に極小対数的標準中心になることに注意する。

定理 3.15 (X, Δ) を対数的標準ファノ多様体で川又対数的末端対でないとする。このとき、極小対数的標準中心はただ一つであった (定理 3.9)。これから

$$\mathcal{C}_0 \leq 1$$

が常に成立する。

一方、n 次元対数的標準ファノ多様体の $n-1$ 次元対数的標準中心については以下の定理が証明出来る。

定理 3.16 (X, Δ) を n 次元対数的標準ファノ多様体とする。$\lfloor \Delta \rfloor$ のすべての既約成分は $\mathbb{Q}$-カルティエとする。このとき、

$$\mathcal{C}_{n-1} \leq n$$

が成立する。

定理 3.16 の証明は難しくない。

3.17 (定理 3.16 の証明) W を (X, Δ) の極小対数的標準中心とする。

$$\lfloor \Delta \rfloor = \sum_{i \in I} \Delta_i$$

を既約分解とする。$W \subset \Delta_i$ がすべての i について成立するので、[F5] の補題 13.2 より、I の個数は $\dim X$ 以下である。つまり、$\mathcal{C}_{n-1} \leq n$ である。[F5] の補題 13.2 は $\lfloor \Delta \rfloor$ のすべての既約成分がカルティエと仮定しているが、$\mathbb{Q}$-カルティエで十分である。

ここまでくると、問題 3.13 は肯定的に解決出来るのではないか？と思ってしまう。一方、$\mathbb{Q}$-分解性がないとまずいのか？という思いも出てくる。少し時間をかけて考えると、以下の例に到達する。

例 3.18 3 次元の格子 $N = \mathbb{Z}^3$ を考える。n を 3 以上の整数とする。

$$\mathbb{R}^2 \simeq N_{\mathbb{R}} \cap (z = 1)$$

内に凸 n 角形 A を取る。ただし、A の頂点はすべて格子点とし、A は $(0,0,1)$ を内部に含むとする。ここでは 3 番目の座標を z 座標としている。A の頂点に半時計回りに $e_1,\cdots,e_n$ と名前を付けることにしよう。さらに

$$e_0=(0,0,-1)\in N$$

とする。また、便宜上 $e_{n+1}=e_1$ と置いておくことにする。このとき、

$$\langle e_0,e_i,e_{i+1}\rangle$$

$(1\leq i\leq n)$ と

$$\langle e_1,e_2,\cdots,e_n\rangle$$

なる合計 $n+1$ 個の 3 次元錐体とそれらの面たちからなる 3 次元扇を Σ と書くことにする。$X=X(\Sigma)$ を Σ に付随する 3 次元完備トーリック多様体としよう。このとき、以下が簡単に確認出来る。

(1) $-K_X$ は豊富である。

$e_0,e_1,\cdots,e_n$ なる $n+1$ 個の格子点が N 内ではる凸多面体に付随するトーリック多様体を考えているので、$-K_X$ が $\mathbb{Q}$-カルティエで豊富になることはすぐに分かる。次に、e_i に対応するトーラス不変因子を D_i とおくと、

(2) $D_0\sim D_1+\cdots+D_n$ が成り立ち、D_0 は $\mathbb{Q}$-カルティエである。

これも作り方からほぼ明らかである。錐体 $\langle e_1,\cdots,e_n\rangle$ に対応する点を P とおくと、

(3) $X\setminus P$ は $\mathbb{Q}$-分解的だが、n が 4 以上のとき X は $\mathbb{Q}$-分解的ではない。

ここで $\Delta=D_1+\cdots+D_n$ とおくと、

(4) (X,Δ) は対数的標準ファノ多様体である。ただし、$-(K_X+\Delta)=D_0$ に注意せよ。

定義より $\lfloor\Delta\rfloor=\Delta=D_1+\cdots+D_n$ なので、

(5) (X,Δ) の 2 次元対数的標準中心は n 個である。

ただし、n は 3 以上の任意の整数であった。作り方より、

(6) $1\leq i\leq n$ に対し、$P\in D_i$ が成立する。

もちろん P は (X,Δ) の 0 次元対数的標準中心であることもすぐに確認出来る。$\mathbb{Q}$-分解性がないと、たとえ (X,Δ) が対数的標準ファノ多様体であっても、$\lfloor\Delta\rfloor$ のたくさんの既約成分が一点 P を通るということがあり得るのである。これはよく考えると当たり前のことである。$W=\Delta$ とおく。W は (X,Δ) の有限個の対数的標準中心の集まりである。随伴公式を

$$(K_X+\Delta)|_W=K_W+\Delta_W$$

とおくと、

(7) (W,Δ_W) は半対数的標準ファノ多様体 (3.3 章を見よ) である。

半対数的標準ファノ多様体については次の節で扱う。少し注意しておくと、X はトーリック多様体で W は $\mathbb{Q}$-カルティエなので、W がコーエン–マコーレーであることはすぐに分かる。

(8) 2 次元半対数的標準ファノ多様体 (W,Δ_W) の既約成分の数は n である。

n は 3 以上の任意の整数を選べたので、半対数的標準ファノ多様体の既約成分の数は非有界である。

結局この例により、対数的標準ファノ多様体の対数的標準中心の「形」を荒く分類して調べるという楽観的な考えはほぼ不可能であることが分かった。問題 3.12 と問題 3.13 は否定的に解決されたことになる。

3.3 半対数的標準ファノ多様体

対数的標準ファノ多様体についての問題は、適当な補正を施すと、半対数的標準ファノ多様体の問題に一般化出来る。まず半対数的標準対の定義を思い出しておこう。

定義 3.19 (半対数的標準対) X は同次元的 (つまり、すべての既約成分の次元が同じ) な代数多様体でセール (Serre) の S_2 条件を満たし、余次元 1 で高々正規交差 (normal crossings) とする。さらに Δ を X 上の有効 $\mathbb{R}$-因子で $K_X+\Delta$ が $\mathbb{R}$-カルティエになるものとする。ここで Δ の台の任意の既約成分は X の特異点集合に含まれないと仮定する。$\nu: X^\nu\to X$ を X の正規化とし、

$$K_{X^\nu}+\Theta=\nu^*(K_X+\Delta)$$

で Θ を定義する。(X^ν, Θ) が対数的標準対のとき、(X, Δ) を半対数的標準対 (semi log canonical pair) という。

定義から当然であるが、対数的標準対は半対数的標準対である。次の定義は明らかであろう。

定義 3.20 (半対数的標準ファノ多様体) (X, Δ) は半対数的標準対で X は射影的とする。$-(K_X + \Delta)$ が豊富のとき、(X, Δ) を半対数的標準ファノ多様体 (semi log canonical Fano variety) という。

半対数的標準特異点 (semi log canonical singularities) はモジュライ空間のコンパクト化の問題のために導入された概念で、安定曲線や点付きの安定曲線の高次元化を考える際に不可欠な概念である。あまり組織的な研究はなかったが、最近 [F7] で半対数的標準対の基本定理が確立した。大雑把に言うと、80 年代に整備された川又対数的末端対に対する基本定理 (錐体定理、固定点自由化定理、小平型の消滅定理など) が (適切な補正をほどこすと) すべて半対数的標準対まで拡張できた。

[F7] の主定理は以下の通りである。

定理 3.21 (X, Δ) を半対数的標準対で X は擬射影的 (quasi-projective) とする。このとき、(X, Δ) には自然な擬対数多様体 (quasi-log varieties) の構造が入る。

この定理のおかげで擬対数多様体の理論を半対数的標準対に適用することが可能になり、極小モデル理論の基本定理を半対数的標準対について示すことが出来るようになったのである。詳しくは [F7] を見ていただきたい。このような事情があるので、以下半対数的標準対 (X, Δ) を考えるときは、X は常に擬射影的と仮定することにする。

問題を説明する前に、半対数的標準階層の定義を思い出しておこう。これは対数的標準中心の概念の自然な一般化である。

定義 3.22 (半対数的標準階層) (X, Δ) を半対数的標準対とする。X の閉部分集合 S が (X, Δ) に関する半対数的標準階層 (semi log canonical stratum) であるとは、S は X の既約成分か、(X^ν, Θ) の対数的標準中心の ν での像であることとする。

最初の問題は以下の通りである。

問題 3.23 (X, Δ) を半対数的標準ファノ多様体とする。このとき、X の基本群は自明か？

私の知る限り、これは未解決である。おそらく X は単連結になると思うのだが、非正規 (non-normal) な代数多様体に対して基本群を考えるのは心理的抵抗があって研究が進まないのである。少なくとも、既存の結果を適用すると簡単に証明出来るという問題ではないと思う。

問題 3.6 の半対数的標準ファノ多様体バージョンは以下の通りである。

問題 3.24 (X, Δ) を半対数的標準ファノ多様体とする。$\{S_i\}_{i\in I}$ を (X, Δ) の半対数的標準階層の集合とし、

$$W = \bigcup_{j\in J} S_j$$

とおく。ただし、J は I の空でない任意の部分集合とし、W には被約なスキーム構造を入れておく。このとき、W は単連結か？

定理 2.4 と同様の消滅定理は半対数的標準対に対しても確立しているし、半対数的標準階層についての基本性質 (定理 2.3 の自然な一般化) も証明出来るので、以前の考察 (考察 3.7) は半対数的標準ファノ多様体についても可能である。いくつか定理として述べておく。

定理 3.25 半対数的標準ファノ多様体は非自明な有限エタール被覆を持たない。つまり、代数的基本群は自明である。

[FG2] の議論を使えば、定理 3.11 の半対数的標準ファノ多様体バージョンが証明出来る。

定理 3.26 (X, Δ) を半対数的標準ファノ多様体とする。W を (X, Δ) の極小半対数的標準階層 (minimal semi log canonical stratum) とする。このとき、(W, Δ_W) は川又対数的末端対で $-(K_W + \Delta_W)$ が豊富になるような W 上の有効 $\mathbb{Q}$-因子 Δ_W をとることが出来る。とくに、W は単連結である。

以前と同様の素朴なアイデアが頭に浮かぶ。極小半対数的標準階層が単連結であることが確認されたので、ファン・カンペンの定理などを駆使して次元の低い半対数的標準階層からどんどん帰納的に議論していくと、問題 3.24 が解けるのではないか？と思うのである。どの階層もそれより

低次元の階層を適当に無視すれば、川又対数的末端ファノ多様体っぽいので、各階層はたくさんの有理曲線で覆われていることは確実であろう。この辺りの微妙な部分をすべて厳密化していくと問題 3.24 は解決するのであろうか？

最後に半対数的標準ファノ多様体の既約成分の個数についてもう一度注意しておく。当然のことながら、以下の考察は藤田健人さんには明らかであったようである。

考察 3.27 X を射影的な単純正規交差多様体 (simple normal crossing variety) で $-K_X$ は豊富と仮定する。つまり X は単純正規交差ファノ多様体 (simple normal crossing Fano variety) とする。もちろん X は半対数的標準ファノ多様体でもある。このとき、X の既約成分の数は高々$\dim X + 1$ 個である。これは以下のように簡単に確認できる。X の極小半対数的標準階層は唯一つであることが示せる (定理 3.9 と同様である)。それを W と書く。$X = \bigcup_i X_i$ を X の既約分解とすると、$W \subset X_i$ が全ての i に対して成立する (定理 3.9 と同様である)。したがって、$X_i \cap X_j \neq \emptyset$ がすべての $i \neq j$ に対して成立する。X は単純正規交差多様体なので、$X_i \cap X_j$ は X_i 上の因子である。ここで定理 3.16 を使うと (もしくは次元による帰納法を使うと)、X の既約成分の数が高々$\dim X + 1$ であることが簡単に確認できる。

上の例から、半対数的標準ファノ多様体 (X, Δ) の X の既約成分の数は高々$\dim X + 1$ か？と素朴に思っていたのだが、例 3.18 で見たように、一般には半対数的標準ファノ多様体の既約成分の数は上から押さえることは出来ない。

3.4 擬対数的標準ファノ多様体

ここまでくると擬対数的標準ファノ多様体 (quasi-log canonical Fano varieties) まで触れないと駄目であろう。ここでは詳しい定義などは述べない。擬対数的多様体については、[F3] を見ることをすすめる。

定義 3.28 $[X, \omega]$ を擬対数的標準対 (quasi-log canonical pair) とし、X を射影的とする。$-\omega$ が豊富のとき、$[X, \omega]$ を擬対数的標準ファノ多様体 (quasi-log canonical Fano variety) と呼ぶ。

対数的標準ファノ多様体は当然半対数的標準ファノ多様体である。さらに定理 3.21 を使うと、半対数的標準ファノ多様体は擬対数的標準ファノ多様体である。擬対数的標準対なる概念はほとんど普及していないのが現状である。今までの考察より、以下のことが分かる。

定理 3.29 擬対数的標準ファノ多様体は非自明な有限エタール被覆を持たない。すなわち、代数的基本群は自明である。

定理 3.29 は、擬対数的標準対の世界でも小平型の消滅定理が成立するという事実と、擬対数的標準対の有限エタール被覆にも擬対数的標準対の構造が入るという事実 (詳しくは [F9] を見よ) の帰結である。問題としては、

問題 3.30 擬対数的標準ファノ多様体の基本群は自明か？

である。これは問題 3.6 も問題 3.24 も含んでいる、最も一般的な問題である。問題 3.6 と問題 3.24 の $[W, (K_X + \Delta)|_W]$ は擬対数的標準ファノ多様体になることが分かるからである。擬対数的標準対についても基本的なテクニックはすべて確立していることを注意しておく (詳しくは [F2] と [F3] を見よ)。

たとえば、擬対数的標準中心 (qlc center) なる概念が対数的標準中心や半対数的標準階層と同様に存在し、定理 2.3 と同様のことが証明されている。正確に言うと、もともと擬対数的標準中心に対して証明されていたことを対数的標準対の世界に定式化しなおしたのが定理 2.3 である。ただ、残念なことに、擬対数的標準ファノ多様体の極小擬対数的標準中心 (minimal qlc center) が良い性質を持つかどうかは未解決である。つまり、定理 3.11 と定理 3.26 の擬対数的標準ファノ多様体バージョンは得られていない。問題 3.30 に関しては、特に根拠はないし、擬対数的標準ファノ多様体まで研究対象を広げるのが正しい研究態度かどうかはよく分からない。

3.5 代数的基本群と位相的基本群

代数的基本群と位相的基本群の差について注意をしておく。以下は伊藤哲史さんに教えてもらった。

注意 3.31 ヒグマン群なる群 G_{Hig} を考えよう。ヒグマン (Graham Higman) が構成した群である。この群 G_{Hig} は有限表示な無限群で、非自明な有限商を持たない群である。具体的には

$$a^{-1}ba = b^2, \quad b^{-1}cb = c^2, \quad c^{-1}dc = d^2, \quad d^{-1}ad = a^2$$

なる関係をみたす 4 つの元 a、b、c、d で生成される群である。

一方、たとえばシンプソンの論文 ([S] の定理 12.1) を使うと、任意の有限表示群 G が与えられたとき、既約な射影代数多様体 X が存在し、

$$\pi_1(X) \simeq G$$

と出来る。つまり、任意の有限表示群は既約な射影代数多様体の基本群として実現可能なのである。

この結果を G_{Hig} に適用すると、既約な射影代数多様体 X_{Hig} が存在し、

$$\pi_1(X_{Hig}) \simeq G_{Hig}$$

と出来る。代数的基本群は位相的基本群の副有限完備化 (profinite completion) なので、

$$\pi_1^{alg}(X_{Hig}) \simeq \{1\}$$

がしたがう。G_{Hig} は有限商を全く持たないからである。

以上より、代数的基本群が自明であっても、位相的基本群は複雑になっている可能性がありえる。もちろん、ファノ型の多様体のような由緒正しい多様体ではこのようなことは起きないであろうというのが私の考えである。

ちなみに、非特異射影代数多様体 X で $\pi_1^{alg}(X) = \{1\}$ だが $\pi_1(X) \neq \{1\}$ なる例は知られていないと思う。おそらく有名 (?) な未解決問題である。

4 滑らかな射での安定性

この章では主に基礎体 k の標数が正のときを考える。この章の内容についてもっと詳しく知りたい読者には、[FG1] の 5 章と [FG3] を読むことをすすめる。

$f : X \to Y$ を非特異射影代数多様体の間の滑らかな射とする。$-K_X$ の性質がどの程度 $-K_Y$ に遺伝するのかを考えてみたい。よく知られているように、コラール–宮岡–森 (Kollár–Miyaoka–Mori) による有理曲線の変形理論を用いると、$-K_X$ が豊富なら $-K_Y$ も豊富である。また、$-K_X$ が数値的非負 (nef) なら $-K_Y$ も数値的非負である。

問題 4.1 (数値的非負かつ巨大性) $f : X \to Y$ を非特異射影代数多様体の間の滑らかな射とする。X の反標準因子 $-K_X$ が数値的非負かつ巨大 (nef and big) のとき、Y の反標準因子 $-K_Y$ も数値的非負かつ巨大か？

問題 4.1 は、基礎体の標数が零の場合、[FG1] で肯定的に解決されている。$-K_X$ が数値的非負かつ巨大のとき、X はしばしば弱ファノ多様体 (weak Fano varieties) と呼ばれる。したがって、問題 4.1 は、弱ファノ多様体の滑らかな射での像は弱ファノ多様体か？と問うているわけである。[FG1] の証明は標数零のテクニックを使っており、問題 4.1 は正標数の場合は未解決だと思う。[FG1] は標準束公式 (canonical bundle formula) の応用として問題 4.1 を扱っている。究極的には、ホッジ構造の変動 (variations of Hodge structure) を使っていることになる。[FG1] の中の予想として、以下の問題がある。

問題 4.2 (半豊富性) $f : X \to Y$ を非特異射影代数多様体の間の滑らかな射とする。X の反標準因子 $-K_X$ が半豊富 (semi-ample) のとき、Y の反標準因子 $-K_Y$ も半豊富か？

問題 4.2 も基礎体の標数が零のときは肯定的に解決されている ([BC] を見よ)。[BC] の証明は非常に巧妙であり、そのままでは正標数の世界では機能しない。[BC] では、標準束公式と極小モデル理論を駆使して問題 4.2 を解決している。専門家が [BC] の証明を読んで理解するのはそれほど難しくないが、自分でこのような証明を見つけるのは大変そうである。

ここで少し注意しておく。豊富性や数値的非負性は、よく知られているように数値的な条件である。一方、半豊富性には簡単な数値的判定法は存在しないし、微分幾何学的な特徴付けも知られていない。これが問題 4.2 を非常に難しくしている主たる要因である。[FG1] の議論は幾何学的であり、その結果、問題 4.2 にたどり着いた。[FG1] の議論を見ると、問題 4.2 はほぼ確実に正しい問題であると予想出来るのである。[BC] は [FG1] の枠組みを踏襲しつつ、極小モデル理論を援用して問題 4.2 を解決している。

極小モデル理論の世界で有名なアバンダンス予想 (abundance conjecture) は極小モデルの標準因子の半豊富性を予想しているのだが、これも非常に難解な未解決問題である。半豊富であることを証明することは一般に非常に難しいのである。

この章の最後に [FG1] の成り立ちについてコメントしておきたい。問題 4.1 はもともと安武和範さん (当時九大院生) の疑問から始まる。安武さ

んの問題を権業善範さん (当時東大院生) が解決し、その権業さんのノートから発展したのが [FG1] である。

5 端射線の長さの昇鎖列条件について

最後の話題は端射線 (extremal rays) の長さの昇鎖列条件 (ascending chain condition) についてである。ショクロフ (Shokurov) の哲学によると、代数多様体の様々な数値的不変量は昇鎖列条件を満たすはずである。この章では、基礎体は複素数体と仮定する。

X を対数的標準ファノ多様体でピカール数が 1 になるものとする。このとき、

$$l(X) = \min_C(-K_X \cdot C)$$

とおく。ここでは $l(X)$ のことを X の端射線の長さと呼ぶことにしよう。ただし、C は X 上の有理曲線全体を動くこととする。一般に

$$0 < l(X) \leq 2 \dim X$$

が知られている ([F5] の 18 章を見よ)。ちなみに

$$l(X) \leq \dim X + 1$$

が予想されているが、未解決である。$\mathcal{F}_n$ を n 次元 $\mathbb{Q}$-分解的対数的標準ファノ多様体でピカール数が 1 になるもの全体の集合とする。ここで

$$\mathcal{L}_n = \{\, l(X) \,|\, X \in \mathcal{F}_n\}$$

とおく。上で見たように、$\mathcal{L}_n \subset (0, 2n]$ がすべての n に対して成立する。問題としては、

問題 5.1 $\mathcal{L}_n$ は昇鎖条件をみたすか？つまり、$a_i \in \mathcal{L}_n$ で

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k \leq \cdots$$

のとき、ある正の整数 l が存在し、$a_m = a_l$ がすべての $m \geq l$ で成立するか？

以下は [FI] の主定理である。

定理 5.2 $\mathcal{L}_n^{\mathrm{toric}} = \{\, l(X) \,|\, X \in \mathcal{F}_n$ で X はトーリック多様体 $\}$ とおくと、$\mathcal{L}_n^{\mathrm{toric}}$ は昇鎖列条件をみたす。

つまり、問題 5.1 はトーリック多様体のカテゴリーでは正しいことが確認出来ているのである。ちなみにトーリック多様体のときは

$$0 < l(X) \leq \dim X + 1$$

が成り立つことは既に証明されている ([F1] の定理 0.1 を見よ)。トーリック多様体の端射線の長さに関しては [F1] が詳しい。

考察 5.3 問題 5.1 に関連していろいろな問題や疑問が考えられる。

問題 5.1 はトーリック多様体に関しては解決出来たが、トーリック多様体に関してもそれほど自明な結果ではないと思う。次に考えるべき問題は 2 次元の場合の問題 5.1 であろう。しかし、曲面の場合でも問題 5.1 は難しそうに思える。曲面の場合の問題 5.1 が解決されたら、問題 5.1 はやっと一人前の予想に格上げされると思う。

$\mathbb{Q}$-分解性の仮定は問題 5.1 に必要なのだろうか？つまり、$\mathcal{F}_n$ の定義から $\mathbb{Q}$-分解性を省いても問題 5.1 は考える価値があるのだろうか？という疑問もある。これは微妙な問題のような気がする。例 3.18 で見たように、$\mathbb{Q}$-分解性がないとかなり好ましくない状況が起こりそうである。$\mathbb{Q}$-分解的でないトーリック多様体を考えれば、$\mathbb{Q}$-分解性の仮定を外すことは不安になってくる。この辺りはよく分からないことだらけである。$\mathbb{Q}$-分解性は極小モデル理論の世界ではおまじないのように仮定することが多いが、思ったより重要な性質のような気がする。曲面の極小モデル理論においては、$\mathbb{Q}$-分解性は本質的に重要である ([F6] を見よ)。

問題 5.1 では対数的標準ファノ多様体 X を考えていたが、問題を対 (X, Δ) に一般化することも考えられる。たとえば、Δ の係数は降鎖列条件 (descending chain condition) を満たす集合 $\Gamma \subset [0, 1]$ に含まれるという仮定をおいて、対数的標準ファノ多様体 (X, Δ) に対して問題 5.1 を定式化し直す方が良いかもしれない。この方が次元による帰納法などで扱いやすくなる可能性があるが、どのような定式化が理にかなっているのかはよく分からない。

そもそも端射線の長さに関する昇列鎖条件は、端射線の長さと極小対数的食い違い係数が似たような性質を持っているような気がするというショクロフの考察から始まっている。しかし、端射線の長さと極小対数的食い違い係数の間にどのような関係があるのかはよく分かっていない。

この辺りを明らかにすることは大切だと思うが、なかなか難しい問題である。このような問題が本当に深く理解されるようになったら、極小対数的食い違い係数に対する昇鎖列予想などの大予想の研究もすすむのではないだろうか？と期待する。

結局のところ、問題5.1は分からないことだらけであるし、そもそも考える価値があるのかどうかもよく分からない。とりあえず、トーリック多様体でもかなり非自明な主張であるが証明可能であると主張したのが定理5.2である。

意欲のある若者のために問題を二つあげておく。

問題 5.4 端射線の長さに関する昇鎖列予想を正しく定式化して証明せよ。

問題 5.5 端射線の長さと極小対数的食い違い係数の関係を明らかにせよ。

ちなみに、[FI] は究極的には石塚裕大さん (当時京大修士 2 年) の学期末のレポートである。2003 年頃にショクロフさんに端射線の長さについていろいろ説明を受けてから何度か昇鎖列条件について考えてみたことがあったのだが、これといった成果を得ることなく 2011 年を迎えていた。2011 年の前期に大学院生向けにトーリック多様体の講義をし、未解決問題 (というか、単純に私の疑問) をいくつか説明したのである。で、石塚さんの学期末のレポートは、定理 5.2 の重み付き射影空間バージョンの解決！であった。

6 補足: 非特異ファノ多様体の単連結性について

この章では基礎体は複素数体とする。12 月の講演の際は

定理 6.1 非特異ファノ多様体は単連結である。

なる古典的な結果から話し始めた。しかし、私はこの有名な結果が誰の結果であるかを確認していなかったというミスを犯してしまった。向井先生からは、Kollár–宮岡–森の結果ではないのか？という意見がでたが、上記結果はもっと大昔から知られていた結果である。並河先生からは Myers の結果だと指摘があったのだが、厳密には Myers の結果ではない。で、講演の後、いくつかの文献を見てみた。その報告を以下に述べたいと思う。

意外なことに、定理6.1に厳密な証明がついたのは、Atiyahの論文[A]が最初のようである。パッと見たかぎり、[A]には定理6.1の主張そのものズバリは載っていなさそうであるが、読んでいないのでなんとも言えない。Atiyahの論文[A]を見てもさっぱり分からないので、高山さんの論文[T]の序文にしたがって少し詳しく解説しよう。非特異ファノ多様体Xの普遍被覆空間を$\widetilde{X}$とする。とりあえず$\widetilde{X}$はコンパクトかどうかわからない状況である。$\widetilde{X}$上でL^2-Dolbeaultコホモロジーを取り、それのvon Neumann次元の交代和を考え、L^2指数定理を適用する。この辺りは私は全く理解していない。結局、$\widetilde{X}$上に0でないL^2正則関数が存在することが示せて、$\widetilde{X}$のコンパクト性が従うのである。これから$\pi_1(X)$の有限性が従い、いつもの議論でXの単連結性が示せる。私は[A]を全く理解していないので、上で述べたことが正しいのかどうかは各自で検討していただきたい。

これでいちおう定理6.1に数学的に厳密な証明がついたことになるのだが、なんだか釈然としない。で、さらに調べてみると、この問題への最初の貢献は小林昭七先生の論文[Kb]のようである。この論文では、Ricciテンソルが正定値のコンパクトケーラー多様体は単連結であると主張している。短くて簡単な論文なので、各自読まれることをすすめる。Atiyahの論文[A]とは異なり、[Kb]は簡単に読める。まず、Ricciテンソルが正定値なコンパクトリーマン多様体の基本群は有限である。これはMyersの定理から従う。Myersの定理は実際はもう少し強いことを主張しているのだが、我々の目的にはこの形で十分であろう。詳しくは[西川, 定理2.24]を見よ。Myersの結果自身は測地線の話などを少し勉強すると理解可能な話である。小平の消滅定理とRiemann–Rochの定理を使えば非特異ファノ多様体には非自明な有限エタール被覆がないことはいつもの議論でわかるので、Myersの結果を使うと、Ricciテンソルが正定値なコンパクトケーラー多様体の単連結性が示せるのである。ここで「いつもの議論で非自明な有限エタール被覆がないことがわかる」とサラッと書いたが、小林先生の論文[Kb]がこの種の議論の起原のようである。少し注意しておかないといけないのは、非特異ファノ多様体上にRicciテンソルが正定値になるようなリーマン計量が存在するか？という問題は非自明である。$-K_X$が豊富なので、Xの第1チャーン形式を正定値の$(1,1)$形式で表すことは出来るが、X上にRicciテンソルが正定値になるようなリーマン計量が存在することはこの事実から直ちに従うわけではない。結局、YauによるCalabi予想の解決の副産物として、非特異ファノ多様体上にRicciテ

ンソルが正定値になるようなケーラー計量の存在が示せたのである。詳しくは、たとえば [中島, 定理 2.3] を見よ。全部つなげると、非特異ファノ多様体上には Ricci テンソルが正定値なケーラー計量 (もちろんリーマン計量でもある) が存在し、Myers の結果から基本群は有限になり、小林の議論で単連結が示せる、となるのである。非特異ファノ多様体上に Ricci テンソルが正定値になるようなケーラー計量が存在すると書いたが、もちろんこの計量は一般には Kähler–Einstein ではない。尾高さんの講演でも説明があったが、非特異ファノ多様体上には必ずしも Kähler–Einstein 計量は存在しない。

ということで、定理 6.1 が厳密な定理になったのは Atiyah の論文 [A] のおかげかもしれないが、小林先生の論文 [Kb] を眺めると、これがまさしくこの問題の起原だ！という論文で、小林先生に触れずに Atiyah の名前だけを出すのはマズいような気がするのである。

ちなみに、Kollár–宮岡–森は、非特異ファノ多様体は有理連結 (rationally connected) であると証明し、非特異有理連結多様体は単連結であると主張している。上記二つの主張を合わせると、定理 6.1 の別証明になっている。ただ、これらの事実は同時期に Campana も証明しており、Kollár–宮岡–森の論文の基本群についての主張の部分は、Campana が証明したので証明略、となっている。ということで、この方面も Kollár–宮岡–森に言及するなら Campana にも触れないとマズいのかな？と思えてくる。

このような複雑な歴史があるので、定理 6.1 には人名が付いていないのであろう。で、もう一度小林先生の論文を眺めると、Ricci テンソルが正定値なコンパクトリーマン多様体の第 1 ベッチ数はゼロであることが Bochner によって証明されていたことが思い出される。これが有名な Bochner トリックの最初の結果であろう。この Bochner のトリックが小平の消滅定理を生み出したという事実はよく知られている。Bochner の結果が念頭にあると、Ricci テンソルが正定値なケーラー多様体の場合は小平の消滅定理を使って第 1 ベッチ数よりも強く基本群まで消せないか？と考えることは、それなりに自然な流れだったとも思えてくる。$H_1(X,\mathbb{Z})$ は $\pi_1(X)$ のアーベル化であることに注意しておこう。

いずれにせよ、小林先生の論文 [Kb] が書かれた 1961 年時点では、小平の消滅定理も Hirzebruch による Riemann–Roch の定理もまだまだ新しい結果で、現在のように誰でも使いこなせる道具にはなっていなかったはずである。そう考えると、[Kb] は偉大な論文のような気がする。

参考文献

[A] M. F. Atiyah, Elliptic operators, discrete groups and von Neumann algebras, Colloque "Analyse et Topologie"en l'Honneur de Henri Cartan (Orsay, 1974), pp. 43–72. Asterisque, No. **32-33**, Soc. Math. France, Paris, 1976.

[BC] C. Birkar, Y. Chen, On the moduli part of the Kamwata–Kodaira canonical bundle formula, preprint (2012).

[F1] O. Fujino, Notes on toric varieties from Mori theoretic viewpoint, Tohoku Math. J. (2) **55** (2003), no. 4, 551–564.

[F2] O. Fujino, Introduction to the log minimal model program for log canonical pairs, preprint (2008).

[F3] O. Fujino, Introduction to the theory of quasi-log varieties, *Classification of algebraic varieties*, 289–303, EMS Ser. Congr. Rep., Eur. Math. Soc., Zürich, 2011.

[F4] O. Fujino, Non-vanishing theorem for log canonical pairs, J. Algebraic Geom. **20**, no. 4, 771–783.

[F5] O. Fujino, Fundamental theorems for the log minimal model program, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **47** (2011), no. 3, 727–789.

[F6] O. Fujino, Minimal model theory for log surfaces, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **48** (2012), no. 2, 339–371.

[F7] O. Fujino, Fundamental theorems for semi log canonical pairs, to appear in Algebraic Geometry.

[F8] O. Fujino, Some remarks on the minimal model program for log canonical pairs, preprint (2013).

[F9] O. Fujino, Pull-back of quasi-log structures, preprint (2013).

[ふ1] 藤野　修、Kodaira vanishig theorem for log canonical varieties (対数的標準特異点をもった多様体に対する小平の消滅定理)、Hodge 理論、退化、特異点の代数幾何とトポロジー研究集会 (第4回) 報告集 (2008).

[ふ2] 藤野　修、On injectivity, vanishing, and torsion-free theorems（単射性、消滅、捻れ不在定理について）、数理解析研究所講究録、no. 1613, 26–42 (2008).

[ふ3] 藤野　修、Vanishing theorem and non-vanishing theorem（消滅定理と非消滅定理）、数理解析研究所講究録、no. 1745, 123–138 (2011).

[FG1] O. Fujino, Y. Gongyo, On images of weak Fano manifolds, Math. Z. **270** (2012), no. 1-2, 531–544.

[FG2] O. Fujino, Y. Gongyo, On canonical bundle formulas and subadjunctions, Michigan Math. J. **61** (2012), no. 2, 255–264.

[FG3] O. Fujino, Y. Gongyo, On images of weak Fano manifolds II, to appear in Proceedings of the conference Algebraic and Complex Geometry.

[FG4] O. Fujino, Y. Gongyo, On log canonical rings, to appear in Kawamata 60.

[FI] O. Fujino, Y. Ishitsuka, On the ACC for lengths of extremal rays, Tohoku Math. J. (2) **65** (2013), no. 1, 93–103.

[Ful] W. Fulton, *Intersection theory*, Second edition. Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics, **2**. Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[HM] C. D. Hacon, J. McKernan, On Shokurov's rational connectedness conjecture, Duke Math. J. **138** (2007), no. 1, 119–136.

[Kb] S. Kobayashi, On compact Kähler manifolds with positive definite Ricci tensor, Ann. of Math. (2) **74** 1961 570–574.

[Kl] J. Kollár, *Shafarevich maps and automorphic forms*, M. B. Porter Lectures. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1995.

[中島] 中島　啓、非線形問題と複素幾何学、岩波書店 (2008).

[西川] 西川　青季、幾何学的変分問題、岩波書店 (2006).

[S] C. Simpson, Local systems on proper algebraic V-manifolds, Pure Appl. Math. Q. **7** (2011), no. 4, Special Issue: In memory of Eckart Viehweg, 1675–1759.

[T] S. Takayama, Simple connectedness of weak Fano varieties, J. Algebraic Geom. **9** (2000), no. 2, 403–407.