

高次元の超曲面で覆われる多様体

On manifolds swept out by high dimensional hypersurfaces

早稲田大学・基幹理工学研究科 鈴木 拓

Taku Suzuki

School of Fundamental Science and Engineering, Waseda University

概要

本稿は、2013年12月に行われた研究集会「Fano 多様体の最近の進展」における講演「On manifolds swept out by high dimensional hypersurfaces」の概説である。完全交叉に関するハーツホーン予想を認めた上で、高い次元の d 次超曲面で覆われる多様体はある収縮射を持ち、(a) 射影空間束になる、もしくは (b) 一般的なファイバーが d 次超曲面になることを示す。

1 序文

本稿では、基礎体は複素数体とし、射影空間 \mathbb{P}^N 内において以下の性質を持つような n 次元非特異射影多様体 X について考える。

- (*) ある整数 m, d に対して、 m 次元 d 次の非特異超曲面で覆われている、すなわち、一般的な点を通る m 次元 d 次の非特異超曲面が X 内に存在する。

ここで、 \mathbb{P}^N 内の射影多様体が m 次元超曲面であるとは、ある $m+1$ 次元線形空間内で余次元 1 であることを意味する。特に、1 次超曲面とは線形空間のことである。

例 1.1 (明らかな例). 性質 (*) を持つ多様体の例として、明らかなものが二つ存在する。一つは線形空間 $X = \mathbb{P}^n$ であり、これは任意の次数 d に対して次元 $n-1$ 以下の非特異超曲面で覆われている。もう一つは d 次の非特異超曲面 $X \subset \mathbb{P}^{n+1}$ であり、これも次元 n 以下の d 次非特異超曲面で覆われている。これらを更に一般化すると、次のいずれかを満たせば X は (*) を満たすことがわかる：

- (a) X は線形 \mathbb{P}^k -束であり、 $m \leq k-1$ 。
(b) 一般的なファイバーが k 次元 d 次の超曲面である射 $\varphi: X \rightarrow Y$ を持ち、 $m \leq k$ 。

例 1.2 (その他の例). $d = 1$ のとき、

- $2m$ 次元の非特異 2 次超曲面 $Q_{2m} \subset \mathbb{P}^{2m+1}$ は m 次元線形空間で覆われている。

- プリュッカー埋め込みで射影空間に埋め込まれた ($2m$ 次元) グラスマン多様体 $G(2, m+2)$ は m 次元線形空間で覆われている.

$d = 2$ のとき,

- (6 次元) グラスマン多様体 $G(2, 5) \subset \mathbb{P}^9$ は 4 次元の非特異 2 次超曲面で覆われている.
- 10 次元スピノル多様体 $S_{10} \subset \mathbb{P}^{15}$ は 6 次元の非特異 2 次超曲面で覆われている.

これらの他にも (*) を満たす例は多く存在するが, 例 1.1 以外の例においては, 覆っている超曲面の次元 m が多様体の次元 n と比べてある程度小さいことがわかる. したがって, ある程度次元の大きい超曲面で覆われる多様体は例 1.1 における (a), (b) のいずれかを満たすことが期待される. 事実, 次数 d が小さい場合においては, 次のことが知られている:

定理 1.3 (知られている結果). n 次元非特異射影多様体 $X \subset \mathbb{P}^N$ が (*) を満たすとす.

- (1) $d = 1$ のとき, $m \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ であれば, X は線形 \mathbb{P}^k -束である. (Sato[12])
- (2) $d = 2$ のとき, $m \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2$ であれば, X は (a), (b) のいずれかを満たす. (Beltrametti, Ionescu[1])
- (3) $d = 3$ のとき, $m \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 3$ であれば, X は (a), (b) のいずれかを満たす. (Watanebe[13])

ここで, $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ は $\frac{n}{2}$ の整数部分を意味する.

これらの結果から, 一般の次数 d に対して次のことが自然に予想できる:

予想 1.4. (*) を満たす n 次元非特異射影多様体 $X \subset \mathbb{P}^N$ において, $m \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + d$ であれば, X は (a), (b) のいずれかを満たす.

高い指数 (index) を持つファノ多様体の分類を適用することで, 予想 1.4 は $d = 4$ までについて成立することが得られる (定理 4.4). しかし, $d \geq 5$ では未解決である.

一方, 次元 m に関する仮定を少し強くし, 更に完全交叉に関する有名なハーツホーン予想を仮定することで, 予想 1.4 が一般の次数 d に対して成立することが得られた. ここで, ハーツホーン予想とは次の予想である:

予想 1.5. n 次元非特異射影多様体 $X \subset \mathbb{P}^N$ において, $n > \frac{2}{3}N$ であれば, $X \subset \mathbb{P}^N$ は完全交叉である.

次の主張が今回の主定理である:

主定理. ハーツホーン予想が成り立つと仮定する. n 次元非特異射影多様体 $X \subset \mathbb{P}^N$ が次元 $m \geq \frac{2n-1}{3} + d$ の d 次非特異超曲面で覆われているならば, 次のいずれかを満たす:

- (a) X は線形 \mathbb{P}^k -束であり, $m \leq k - 1$.
- (b) 一般的なファイバーが k 次元 d 次の超曲面である射 $\varphi: X \rightarrow Y$ を持ち, $m \leq k$.

2 直線の族および VMRT

この章では, $X \subset \mathbb{P}^N$ を n 次元非特異射影多様体とする. X 上の直線全体から成るヒルベルトスキームを $F^1(X)$ で表す. また, X 上の点 p に対して, p を通る直線全体から成るスキームを $F_p^1(X)$ で表す. $F^1(X)$ の既約成分のことを X 上の直線の族 (family) と呼ぶ. X 上の直線の族 \mathcal{L} に対して, \mathcal{L} に属す直線の和集合を $\text{Locus}(\mathcal{L})$ で表し, $\text{Locus}(\mathcal{L}) = X$ のとき \mathcal{L} は被覆族 (covering family) であるという.

以下 X は直線で覆われていると仮定し, \mathcal{L} を X 上の直線の被覆族の一つとする. また, p を X 内の一般的な点とする. このとき, \mathcal{L} に属す直線で p を通るものから成るスキームを \mathcal{L}_p で表し, これを (\mathcal{L} に関する点 p での) VMRT (varity of minimal rational tangents) と呼ぶ. このスキームは, 自然に p での接空間の射影化 $\mathbb{P}_*(T_p X) := (T_p X \setminus \{0\})/\mathbb{C}^*$ の部分多様体とみなせることに注意する.

次の二つの命題は, 高い次元の VMRT を持つ多様体の性質を表すものである.

命題 2.1 (Beltrametti, Sommese, Wiśniewski[2] および Wiśniewski[14]). 上のセッティングにおいて, $\dim \mathcal{L}_p \geq \frac{n-1}{2}$ と仮定する. このとき, \mathcal{L} に属す直線の数値的類 (numerical class) $[\mathcal{L}]$ は $NE(X)$ 内の端射線 (extremal ray) を生成する. また, φ をその端射線に関する収縮射 (contraction), F を φ の一般的なファイバーとすれば, F はピカル群 \mathbb{Z} のファノ多様体である.

命題 2.2 (Hwang[7]). 上のセッティングにおいて, $\dim \mathcal{L}_p \geq \frac{n-1}{2}$ および $\text{Pic}(X) = \mathbb{Z}$ を仮定する. このとき, $\text{VMRT} \mathcal{L}_p$ は $\mathbb{P}_*(T_p X) = \mathbb{P}^{n-1}$ 内で非退化な非特異既約多様体になる.

3 第二基本形式

この章では, $X \subset \mathbb{P}^N$ を非退化な n 次元非特異射影多様体とし, p を X 内の一般的な点とする. 接空間 $T_p X$ と交わらない線形空間 $\mathbb{P}^{N-n-1} \subset \mathbb{P}^N$ を一つとり, $\pi_p : X \dashrightarrow \mathbb{P}^{N-n-1}$ を $T_p X$ からの射影とする. $\phi : \text{Bl}_p(X) \rightarrow X$ を X の点 p でのブローアップとし, $E := \mathbb{P}_*(T_p X) \subset \text{Bl}_p(X)$ を例外因子とする. また, H を $X \subset \mathbb{P}^N$ の超平面切断とする. このとき, π_p から誘導される有理写像 $\tilde{\pi}_p : \text{Bl}_p(X) \dashrightarrow \mathbb{P}^{N-n-1}$ の E への制限は $|\phi^*(H) - 2E|_E \subset |-2E|_E = |\mathcal{O}_{\mathbb{P}_*(T_p X)}(2)|$ に含まれるある線形系で与えられる. $\mathbb{P}_*(T_p X)$ 内の 2 次超曲面からなるこの線形系を第二基本形式 (second fundamental form) と呼び, $|II_{p,X}|$ で表す. $\mathbb{P}_*(T_p X)$ 内において $|II_{p,X}|$ の基点集合は, X と点 p で重複度 3 以上で接する直線からなるものであり. したがって特に $F_p^1(X)$ を含んでいることに注意する. ([11, Definition 1.5] も参照せよ.)

$S(X) \subset \mathbb{P}^N$ を X の割線多様体 (secant variety), すなわち X 内の一般的な 2 点を結ぶ直線の和集合の閉包とする. このとき, X の secant defect と呼ばれる値を $\delta(X) := 2n + 1 - \dim S(X)$ で定義する. 明らかに $\delta(X) \geq 0$ である.

命題 3.1 (Russo[11, Theorem 2.3(1)]). $\delta(X) > 0$ ならば $\dim |II_{p,X}| = N - n - 1$ である.

命題 3.2 (Hwang, Kebekus[6, Theorem 3.14]). X を $\text{Pic}(X) = \mathbb{Z}\langle \mathcal{O}_X(1) \rangle$ なるファノ多様体とし, $i(X)$ を X の指数 (すなわち $-K_X \cong \mathcal{O}_X(i(X))$) とする. ここで, $\mathcal{O}_X(1)$ は $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ の X への制限を意味する. このとき, $i(X) > \frac{2n}{3}$ ならば $\delta(X) > 0$ である.

4 主結果の証明

主定理の証明を与える.

Proof. X を主定理の仮定を満たすものとする. 仮定 $m \geq \frac{2n-1}{3} + d$ から, 特に $m \geq 3d-1 > d$ である. このことから, S を m 次元 d 次の非特異超曲面とすると, 一般的な点 $p \in S$ に対して $F_p^1(S) \subset \mathbb{P}_*(T_p S)$ は次数 $(d, d-1, d-2, \dots, 2)$ の完全交叉になることが知られている. とくに, $F_p^1(S)$ は既約である. したがって, S は直線の被覆族 \mathcal{L}^S を唯一持つ ([13] Proposition 2.2 参照). ところで, X はそのような S らで覆われており, 各 \mathcal{L}^S は X 上の直線の族のいずれかには包含されている. 一方 X 上の直線の族は高々有限個なので, 次を満たす X 上の直線の被覆族 \mathcal{L} を一つ選べる:

一般的な点 $p \in X$ に対して, $p \in S_p \subset X$ かつ $\mathcal{L}^{S_p} \subset \mathcal{L}$ なる m 次元 d 次の非特異超曲面 S_p が存在する.

特に $\mathcal{L}_p^{S_p} \subset \mathcal{L}_p$ であるが, $\mathcal{L}_p^{S_p}$ は $\mathbb{P}_*(T_p S) = \mathbb{P}^{m-1}$ 内で次数 $(d, d-1, d-2, \dots, 2)$ の完全交叉なので,

$$\dim \mathcal{L}_p \geq \dim \mathcal{L}_p^{S_p} \geq m - d \geq \frac{2n-1}{3} \geq \frac{n-1}{2}.$$

よって命題 2.1 より, $\mathbb{R}_{\geq 0}[\mathcal{L}]$ は端射線であり, それに関する収縮射 $\varphi: X \rightarrow Y$ を得る. また, F を φ の一般的なファイバーとすれば, F はピカル群 \mathbb{Z} のファノ多様体である.

以下ファイバー F の次元を k , F の線形包 (linear span) $\langle F \rangle$ の次元を M と置き, p を F 内の一般的な点とする. このとき各超曲面 S_p は, 唯一の直線の被覆族 \mathcal{L}^{S_p} に関して有理鎖連結 (rationally chain connected) になることが知られている. すなわち, S_p 内の一般的な 2 点は \mathcal{L}^{S_p} に属す直線の鎖 $\{l_i\}_i$ によって繋ぐことができる. 一方 $\mathcal{L}^{S_p} \subset \mathcal{L}$ だったので, 直線 l_i らは全て収縮射 φ によって 1 点に収縮される. ゆえに S_p 自身も φ で 1 点に収縮されるので, S_p はファイバー F に包含される. これが一般的な点 $p \in F$ に対して成立するので, ファイバー F も m 次元 d 次の非特異超曲面で覆われる. したがって先ほどと同様に, 一般的な点 $p \in F$ に対して $\mathcal{L}_p^{S_p} \subset \mathcal{L}_p^F$ であるような F 上の直線の被覆族 \mathcal{L}^F を一つ選べる. このとき,

$$\dim \mathcal{L}_p^F \geq \dim \mathcal{L}_p^{S_p} \geq \frac{n-1}{2} \geq \frac{k-1}{2}.$$

よって命題 2.2 より, $\mathcal{L}_p^F \subset \mathbb{P}_*(T_p F) (= \mathbb{P}^{k-1})$ は非退化な非特異既約多様体である.

以下ファイバー F が線形空間もしくは超曲面になることを示す. その証明においてキーとなる命題が次の事実である:

命題 4.1 (Zak[15, I Proposition 2.16]). $X \subset \mathbb{P}^N$ を非退化な n 次元非特異射影多様体とし, $Z \subset X$ を閉部分多様体で $\dim Z > [\frac{N-1}{2}]$ なるものとする. このとき, $\text{codim}_{\mathbb{P}^N}(X) \leq \text{codim}_{\langle Z \rangle}(Z)$ が成立する.

さて, 先ほどの計算から $\dim \mathcal{L}_p^{S_p} > [\frac{(k-1)-1}{2}]$ である. そこで命題 4.1 を $\mathcal{L}_p^{S_p} \subset \mathcal{L}_p^F \subset \mathbb{P}^{k-1}$ に対して適用すると,

$$\text{codim}_{\mathbb{P}^{k-1}}(\mathcal{L}_p^F) \leq \text{codim}_{\mathbb{P}^{m-1}}(\mathcal{L}_p^{S_p}) = d - 1.$$

よって $\dim \mathcal{L}_p^F \geq k - d$ を得る. ところで, $k \geq m \geq 3d - 1$ より $d \leq \frac{k+1}{3}$ である. ゆえに,

$$\dim \mathcal{L}_p^F \geq \frac{2k-1}{3} > \frac{2(k-1)}{3}.$$

そこでハーツホーン予想より $\mathcal{L}_p^F \subset \mathbb{P}^{k-1}$ が完全交叉であることが従う.

一方, 有理曲線の変形理論から, VMRT の次元と多様体の指数に関して $\dim \mathcal{L}_p^F = i(F) - 2$ が成り立つことが知られている. よって,

$$i(F) \geq k - d + 2 \geq \frac{2k+5}{3} > \frac{2k}{3}.$$

したがって, 命題 3.2 より $\delta(F) > 0$ であり, ゆえに命題 3.1 より第二基本形式 $|II_{p,F}| \subset |\mathcal{O}_{\mathbb{P}_*(T_p F)}(2)|$ の次元は $M - k - 1$ となる. すなわち, $\mathbb{P}_*(T_p F) = \mathbb{P}^{k-1}$ 内において $|II_{p,F}|$ の基点集合は $M - k$ 個の線形独立な 2 次超曲面の交叉である. ところで第二基本形式の定義から, 完全交叉 \mathcal{L}_p^F は $|II_{p,F}|$ の基点集合に含まれている. ゆえに次の補題が適用できる:

補題 4.2. $X \subset \mathbb{P}^N$ を非退化な完全交叉とし, $W \subset X$ を閉部分多様体で t 個の線形独立な 2 次超曲面の交叉からなるものとする. このとき, $\text{codim}_{\mathbb{P}^N}(X) \geq t$ が成立する.

Proof. X を定義する多項式を P_1, \dots, P_c ($c := \text{codim}_{\mathbb{P}^N}(X)$), W を定義する 2 次多項式を Q_1, \dots, Q_t とする. ここで $\deg P_1 = \dots = \deg P_e = 2 < \deg P_{e+1} \leq \dots \leq \deg P_c$ としてよい. このとき各 Q_i は, P_1, \dots, P_c で生成されるイデアルに含まれるので, P_1, \dots, P_e で張られる \mathbb{C} -ベクトル空間にも含まれる. 今 Q_1, \dots, Q_t は線形独立なので, $t \leq e \leq c$ を得る. \square

補題 4.2 より,

$$(k-1) - \frac{2k-1}{3} \geq \text{codim}_{\mathbb{P}_*(T_p F)}(\mathcal{L}_p^F) \geq M - k.$$

これを k について解けば, $k \geq \frac{3M+2}{4}$. これより,

$$\dim S_p = m \geq \frac{2k-1}{3} + d > [\frac{M-1}{2}].$$

したがって命題 4.1 を $S_p \subset F \subset \mathbb{P}^M$ に対して適用でき,

$$\text{codim}_{\mathbb{P}^M}(F) \leq \text{codim}_{\mathbb{P}^{m+1}}(S_p) = 1$$

を得る. これは F が線形空間もしくは超曲面であることを意味する.

ケース 1. F が線形空間の場合

今 $k \geq m \geq \frac{2m-1}{3} + d$ より, $\dim X > 2\dim Y$ が容易にわかる. したがって次の命題により, φ が線形 \mathbb{P}^k -束である. すなわち (a) を満たす.

命題 4.3 (Ein[3, Theorem 1.7]). $\varphi : X \rightarrow Y$ を非特異射影多様体から正規射影多様体への連結なファイバーを持つ射で, $\dim X > 2\dim Y$ なるものとする. \mathcal{H} を X 上の非常に豊富な直線束とし, φ の一般的なファイバー F に対して $(F, \mathcal{H}|_F) \cong (\mathbb{P}^k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^k}(1))$ であると仮定する. このとき φ は \mathbb{P}^k -束である.

ケース 2. F が超曲面の場合

まず $\langle S_p \rangle \not\subset F$ を示す. もし $\langle S_p \rangle \subset F$ であれば,

$$\dim \langle S_p \rangle \geq \frac{2k-1}{3} + d + 1 > \left[\frac{(k+1)-1}{2} \right]$$

により再び命題 4.1 が適用でき, $1 = \text{codim}_{\langle F \rangle}(F) \leq \text{codim}_{\langle S_p \rangle}(\langle S_p \rangle) = 0$ が従う. これは矛盾である.

ゆえに交叉 $\langle S_p \rangle \cap F$ も超曲面であり, 次元は m 以下, 次数は $\deg F$ に等しい. 一方この交叉は m 次元 d 次超曲面 S_p を包含している. したがって S_p と一致し, $\deg F$ は d と等しい. すなわち X は (b) を満たす. \square

最後に, 予想 1.4 において $d = 4$ の場合である次の定理の証明を与える.

定理 4.4. n 次元非特異射影多様体 $X \subset \mathbb{P}^N$ が次元 $m \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 4$ の 4 次非特異超曲面で覆われているならば, 次のいずれかを満たす:

- (a) X は線形 \mathbb{P}^k -束であり, $m \leq k - 1$.
- (b) 一般的なファイバーが k 次元 4 次の超曲面である射 $\varphi : X \rightarrow Y$ を持ち, $m \leq k$.

Proof. 主定理の証明において, $i(F) \geq k - d + 2$ までは, 予想 1.4 の弱い仮定 $m \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + d$ のもとでも同じ議論で証明される. 特に $d = 4$ のとき, $i(F) \geq k - 2$ である. そこで, よく知られた高い指数を持つファノ多様体の分類 ([9], [4], [5], [10]) により, $F \subset \mathbb{P}^M$ は次のいずれかに同型である (仮定から $k \geq m \geq 7$ であることに注意せよ):

$i(F) = k + 1$ のとき,

- 射影空間.

$i(F) = k$ のとき,

- 2 次超曲面.

$i(F) = k - 1$ のとき,

- 3 次超曲面,
- 2 つの 2 次超曲面の完全交叉.

$i(F) = k - 2$ のとき,

- 4次超曲面,
- 2次超曲面と3次超曲面の完全交叉,
- 3つの2次超曲面の完全交叉,
- 直交 (orthogonal) グラスマン多様体 $OG(5, 10) \subset \mathbb{P}^{15}$ の連結成分の線形切断,
- グラスマン多様体 $G(2, 6) \subset \mathbb{P}^{14}$ の線形切断.

いずれの場合においても $\text{codim}_{\mathbb{P}^M}(F) \leq 6$ である. ゆえに,

$$m \geq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 4 > \lfloor \frac{M-1}{2} \rfloor.$$

したがって主定理の証明と同様に, 命題 4.1 を $S_p \subset F \subset \mathbb{P}^M$ に対して適用することで, F は線形空間もしくは超曲面となる. それぞれの場合において (a) および (b) を満たすことも同様に確かめることができる.

□

参考文献

- [1] M. C. Beltrametti, P. Ionescu, On manifolds swept out by high-dimensional quadrics, *Math. Z.* 260(1) (2008) 229-234.
- [2] M. C. Beltrametti, A. J. Sommese, J. A. Wiśniewski, Results on varieties with many lines and their applications to adjunction theory, In: *Complex Algebraic Varieties* (Bayreuth, 1990). *Lecture Notes in Math.*, vol. 1507, pp16-38. Springer, Berlin (1992)
- [3] L. Ein, Varieties with small dual variety. II, *Duke Math. J.* 52 (1985) 895-907.
- [4] T. Fujita, On the structure of polarized manifolds with total deficiency one, I, *J. Math. Soc. Japan* 32 (1980) 709-725.
- [5] T. Fujita, On the structure of polarized manifolds with total deficiency one, II, *J. Math. Soc. Japan* 33 (1981) 415-434.
- [6] J. M. Hwang, S. Kebekus, Geometry of chains of minimal rational curves, *J. Reine Angew. Math.* 584 (2005) 173-194.
- [7] J. M. Hwang, Geometry of minimal rational curves on Fano manifolds, in *School on Vanishing Theorems and Effective Results in Algebraic Geometry* (Trieste, 2000), *ICTP Lect. Notes*, vol. 6, pp335-393. Abdus Salam Int. Cent. Theoret. Phys. (2001).

- [8] P. Ionescu, F. Russo, Manifolds covered by lines, defective manifolds and a restricted Hartshorne Conjecture, arXiv:0909.2763.
- [9] S. Kobayashi, T. Ochiai, Characterizations of complex projective spaces and hyperquadrics, *J. Math. Kyoto Univ.* 13 (1973) 31-47.
- [10] S. Mukai, Biregular classification of Fano 3-folds and Fano manifolds of coindex 3, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 86 (1989) 3000-3002.
- [11] F. Russo, Varieties with quadratic entry locus. I, *Math. Ann.* 344 (2009) 597-617.
- [12] E. Sato, Projective manifolds swept out by large-dimensional linear spaces, *Tohoku Math. J.* 49(2) (1997) 299-321.
- [13] K. Watanabe, On projective manifolds swept out by cubic varieties, *Int. J. Math.* 23, 1250058 (2012).
- [14] J. A. Wiśniewski, On a conjecture of Mukai, *Manuscripta Math.* 68(2) (1990) 135-141.
- [15] F. L. Zak, *Tangents and Secants of Algebraic Varieties*, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 127 (American Mathematical Society, Providence, RI, 1993).

E-mail: s.taku.1231@moegi.waseda.jp