

CHARACTERIZATION OF COMPLETE FLAG MANIFOLDS AND CAMPANA-PETERNELL CONJECTURE

埼玉大学・理工学研究科 渡邊 究
Kiwamu Watanabe
Graduate School of Science and Engineering,
Saitama University.

概要. この記事では、「ネフな接束をもつファノ多様体は等質多様体である」という, Campana-Peternell 予想に関する種々の結果を概説する. 特に, 最近得られた一連の結果 [MOSW, OSWW, OSWW2] の解説を中心に, 上記予想に関して知られている結果を紹介する.

CONTENTS

1. はじめに	1
2. ルート系と線形代数群	3
3. 階数 2 の単純線形代数群の商として表される完全旗多様体	4
4. 多くの非特異 \mathbb{P}^1 ファイブレーションをもつファノ多様体	5
4.1. 線形代数群 G の構成法	5
4.2. 因子の長さとはコホモロジー	8
5. CP 予想に関して知られていること	10
5.1. ファノ擬指数が大きい場合と小さい場合の CP 予想	10
5.2. CP 予想を正しいと思う根拠はあるか?	11
参考文献	12

1. はじめに

代数幾何学における重要な問題の一つとして「特殊な多様体の特徴付け」を挙げることができる. その例として、「豊富な接束をもつ射影多様体は射影空間である」というハーツホーン予想が知られている. この予想は 1979 年に森重文により解決された [Mo]. この結果を出発点として, 森による端射線の理論が構築され, 川又雄二郎, V. V. Shokurov, M. Ried 等の貢献により (特異点を持つ場合も含めた) 極小モデル理論の基礎が完成した. また, ハーツホーン予想は複素微分幾何学におけるフランケル予想 (1980 年に Y. T. Siu と S. T. Yau により解決 [SY]) の一般化としても知られている: 「正則双断面曲率が正のコンパクトケーラー多様体は射影空間である». さらに, Siu と Yau は一般化フランケル予想を提起した: 「正則双断面曲率が非負のコンパクトケーラー多

講演の機会を与えて下さった松下大介先生に御礼申し上げます. また, 旅費の援助をして下さった向井茂先生と手続きでお世話になった RIMS の事務の方々へ感謝いたします. 本研究は科学研究費「研究活動スタート支援」#24840008 のサポートを受けています.

様体はエルミート対称空間である」。この予想は1988年に N. Mok [Mok] により解決された。これらの結果のさらなる一般化として、ネフな接束をもつコンパクトケーラー多様体の構造を考えよう。そのような多様体はエタール被覆の差を除いて、トーラス上のファノファイバー空間として記述される [DPS]。さらに、そのファイバー空間の全てのファイバーはネフな接束をもつファノ多様体である。従って、ネフな接束をもつコンパクトケーラー多様体の構造研究はファノ多様体の場合に帰着される。これに関して、F. Campana と T. Peternell による次の予想（以下、「CP 予想」と呼ぶ）が知られている：

予想 1.1 ([CP, 11.2]). ネフな接束をもつファノ多様体 X （以下、「CP 多様体」）は有理等質多様体である。従って、半単純線形代数群 G とその放物的部分群 P が存在し、 $X = G/P$ が成り立つ。

等質なファノ多様体は有理的であることが知られている。よって、CP 予想の本質的に難しい箇所は、接束のネフ性からどのように等質性を示すか、という点にある。次元が3以下の多様体に対しては、ファノ多様体の分類結果を用いることにより、予想が正しいことを確認できる。4次元の場合の CP 予想は、ピカル数が2以上の場合に Campana と Peternell により解決された [CP2]。4次元かつピカル数1の場合には、[CMSB], [Mi], [Mok2] などの寄与があり、最終的には J. M. Hwang により示された [Hw]。さらに、5次元かつピカル数が2以上の場合は筆者により解決された [Wa]。しかし、一般次元では未解決である。さらに、ここに挙げた全ての結果は、それぞれの条件を満たすファノ多様体を完全に分類し、その分類結果より等質性が従う、という手法を取っている。分類に強く依存しているため、一般次元において同様の議論を用いて CP 予想を解決することは困難だと思われる。そのため、高次元ファノ多様体に対して CP 予想を考えるには、接束のネフ性から線形代数群やその作用をどのように構成するかを考える必要がある。そもそも、その点が CP 予想の研究において最も興味深いところである。筆者の講演では、CP 予想に関連して次の結果を紹介した。

定理 1.2 ([OSWW, OSWW2]). 以下の二条件は同値である：

- (i) X は全ての基本収縮射が非特異 \mathbb{P}^1 ファイブレーションであるファノ多様体である。
- (ii) X は完全旗多様体 G/B と同型である。ただし、 G は半単純線形代数群であり、 B はそのボレル部分群である。

さらに、系として CP 予想を射の構成問題に帰着することができる：

系 1.3. 以下の二条件は同値である：

- (i) CP 予想が成立する。
- (ii) X をネフな接束をもつファノ多様体であり、正の次元をもつ多様体の積でないとする。このとき、 X は全ての基本収縮射が非特異 \mathbb{P}^1 ファイブレーションであるファノ多様体により支配される。

定理 1.2 において、(ii) ならば (i) が成り立つことは簡単に確認できる。難しいところは逆を示す箇所である。(i) ならば (ii) を示すにあたり最も面白い点の一つは、 X の非特異 \mathbb{P}^1 ファイブレーション構造を用いることにより線形代数

群 G を構成するところである。従って、この記事では定理 1.2 の証明のうち、群の構成法を中心に解説する。詳しくは、[OSWW, OSWW2] を参照されたい。

この記事は以下のように構成されている。まず、2 章においてリー環・リー群に関する基本事項を復習する。3 章では定理 1.2 に現れる多様体のピカル数が 2 の場合に、群の情報がある交点行列に隠されていることを確認する。4 章では、定理 1.2 において線形代数群をどのように構成するか説明する。講演内容の大部分がこの章に含まれている。さらに、線形代数群やワイル群とアンブル錐・ネフ錐やコホモロジーの関係性について考察する。さらに最後の章では、CP 予想に関して知られていることをまとめる。特に、[Mok2] と [Hw] により示された 4 次元の CP 予想に関する結果が定理 1.2 から従うことを紹介する。断りが無い限り、多様体は複素多様体（特に特異点を持たない）を意味する。

2. ルート系と線形代数群

この章では、リー群、リー環に関する基本事項を復習する。詳しくは、[Hu] を参照されたい。以後、 E をユークリッド空間、つまり、内積 $\langle \alpha, \beta \rangle$ をもった \mathbb{R} 上の有限次元ベクトル空間とする。任意の非零ベクトル $\alpha \in E$ に対し、鏡映 σ_α を次で定義する：

$$\sigma_\alpha(\beta) := \beta - c_{\beta, \alpha} \alpha.$$

ここで、 $c_{\beta, \alpha} = \frac{2\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$ とする。

定義 2.1. E の部分集合 Φ が以下の四条件を満たすとき、 Φ を**ルート系**と呼ぶ：

- (R1) $\Phi \subset E$ は E を張る有限集合で 0 を含まない。
- (R2) 実数 k が $\alpha, k\alpha \in \Phi$ を満たすならば $k = \pm 1$ である。
- (R3) 任意の $\alpha \in \Phi$ に対し、鏡映 σ_α は $\sigma_\alpha(\Phi) \subset \Phi$ を満たす。
- (R3) $\alpha, \beta \in \Phi$ ならば、 $c_{\alpha, \beta}$ は整数である。

ルート系 Φ の元を**ルート**といい、 E のベクトル空間としての次元を Φ の**階数**と呼ぶ。さらに、鏡映 σ_α ($\alpha \in \Phi$) によって生成される群を Φ の**ワイル群**と呼ぶ。

定義 2.2. ルート系 $\Phi \subset E$ の部分集合 Δ が以下の二条件を満たすとき、 Φ の**底**という：

- (B1) Δ はベクトル空間 E の基底である。
- (B2) 任意のルート $\beta \in \Phi$ を $\beta = \sum k_\alpha \alpha$ ($\alpha \in \Delta$) と表したとき、任意の α に対して $k_\alpha \geq 0$ もしくは $k_\alpha \leq 0$ 成り立つ。

このような Δ の元を**単純ルート**と呼ぶ。また、[(B2)] において、任意の α に対して $k_\alpha \geq 0$ が成り立つ β を**正のルート**、それ以外を**負のルート**と呼ぶ。

定義 2.3. ルート $\alpha \in \Phi \subset E$ に対し、 $\alpha^\perp := \{\beta \mid \langle \beta, \alpha \rangle = 0\}$ と定める。このとき、 $E - \bigcup_{\alpha \in \Phi} \alpha^\perp$ の連結成分を**ワイルの部屋**と呼ぶ。

定義 2.4. $\Delta := \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ をルート系 Φ の底とする。このとき、 n 次正方行列 (c_{α_i, α_j}) を Φ の**カルタン行列**と呼ぶ。

カルタン行列はルート系 Φ を特徴付ける：

命題 2.5. ルート系はカルタン行列により同型を除いて一意的に定まる。

さらに、カルタン行列を用いて、ルート系に付随するデインキン図形を定めることができる。ここで、階数2の既約ルート系のカルタン行列は以下のいずれかである：

Φ の型	A_2	B_2	G_2
(c_{α_i, α_j})	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

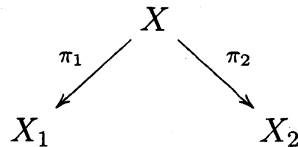
もし、あるルート系 Φ のカルタン行列を得ることができれば、その行列から、 Φ をルート系としてもつ半単純リー環 \mathfrak{g} を構成することができる。さらに、半単純リー環 \mathfrak{g} から単連結半単純リー群（線形代数群となる）が一意に定まる。

$$\begin{aligned} \text{カルタン行列 } (c_{\alpha_i, \alpha_j}) &\leftrightarrow \text{ルート系 } \Phi \leftrightarrow \text{半単純リー環 } \mathfrak{g} \\ &\leftrightarrow \text{単連結半単純リー群 } G \end{aligned}$$

従って、あるルート系 Φ のカルタン行列を得ることができれば、その情報から自然に半単純線形代数群を構成できる。

3. 階数2の単純線形代数群の商として表される完全旗多様体

この章では、 X を階数2の単純線形代数群 G の商として表される完全旗多様体 G/B とする。前章で触れた通り、 G は A_2, B_2 もしくは G_2 型である。このような X は二つの非特異 \mathbb{P}^1 ファイブレーションをもつピカル数2のファノ多様体である：



ここで、 Γ_i を π_i のファイバー、 K_i を π_i の相対標準因子とする。このとき、二つの π_i はともに \mathbb{P}^1 束 $\mathbb{P}(\mathcal{E}_i)$ ($i = 1, 2$) として記述可能である。適当に直線束をテンソルすることで \mathcal{E}_i を正規化すると（つまり、 $c_1 = 0$ or -1 ）、組の順序の差を除き、 $((X_1, \mathcal{E}_1), (X_2, \mathcal{E}_2))$ は以下のいずれかと同型である：

- A_2 型 $((\mathbb{P}^2, T_{\mathbb{P}^2}), (\mathbb{P}^2, T_{\mathbb{P}^2}))$. ただし、 $T_{\mathbb{P}^2}$ は \mathbb{P}^2 の接束である。
- B_2 型 $((\mathbb{P}^3, \mathcal{N}), (Q^3, \mathcal{S}))$. ただし、 \mathcal{N} は \mathbb{P}^3 上の null-correlation 束であり ([OSS] 参照)、 \mathcal{S} はグラスマン多様体 $G(1, \mathbb{P}^3)$ 上の普遍商束を3次元2次超曲面 Q^3 に制限したものである。
- G_2 型 $((K(G_2), \mathcal{Q}), (Q^5, \mathcal{C}))$. ただし、 $K(G_2)$ はグラスマン多様体 $G(1, \mathbb{P}^6)$ の線形切断として表される G_2 型の5次元等質接触多様体であり、 \mathcal{Q} はグラスマン多様体 $G(1, \mathbb{P}^6)$ 上の普遍商束の制限として得られたものである。さらに、 \mathcal{C} は Q^5 上のケーリー束である ([Ot] 参照)。

各々の場合に対し2次正方行列 $(-K_i, \Gamma_j)$ を考えると、以下のようになる：

X	$\mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^2})$	$\mathbb{P}(\mathcal{N})$	$\mathbb{P}(\mathcal{C})$
G の型	A_2	B_2	G_2
$(-K_i, \Gamma_j)$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

どの場合も、交点行列 $(-K_i, \Gamma_j)$ は対応する G のカルタン行列と一致する。従って、前章に述べた通り、カルタン行列から元の代数群 G を復元することができる。この考察より、全ての基本収縮射が非特異 \mathbb{P}^1 ファイブレーションであるファノ多様体に関しても、交点行列 $(-K_i, \Gamma_j)$ が群の情報を含んでいると期待される。次の章では、このことについて考察を行う。

4. 多くの非特異 \mathbb{P}^1 ファイブレーションをもつファノ多様体

4.1. **線形代数群 G の構成法.** この章では、全ての基本収縮射が非特異 \mathbb{P}^1 ファイブレーションであるファノ多様体に関して、定理 1.2 に現れる線形代数群 G の構成法を考える。次は我々の議論において鍵となる補題である：

補題 4.1. $\pi : M \rightarrow Y$ を非特異射影多様体 Y 上の非特異 \mathbb{P}^1 ファイブレーションとする。 Γ を π のファイバー、 K を相対標準因子とする。また、 M 上の任意のカルティエ因子 D に対し、 $l := D \cdot \Gamma$ とおく。さらに、 $\alpha \neq 0$ に対し $\text{sgn}(\alpha) := \alpha/|\alpha|$ 、 $\alpha = 0$ に対し $\text{sgn}(0) := 1$ とおく。このとき、任意の整数 i に対し、次の同型が成り立つ：

$$(1) \quad H^i(M, \mathcal{O}_M(D)) \cong H^{i+\text{sgn}(l+1)}(M, \mathcal{O}_M(D + (l+1)K)).$$

特に、

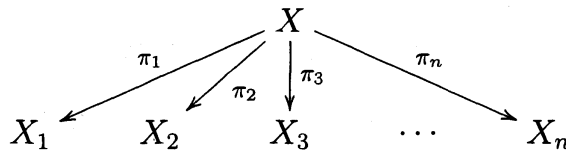
$$(2) \quad \chi(M, \mathcal{O}_M(D)) = -\chi(M, \mathcal{O}_M(D + (l+1)K)).$$

今後、断りがない限り以下の記号を用いる。

記号 4.2. • X : 全ての基本収縮射が非特異 \mathbb{P}^1 ファイブレーションであるピカル数 n のファノ多様体。

- $N^1(X)$: X 上の \mathbb{R} 因子の数値的同値類からなるベクトル空間。
- $N_1(X)$: X 上の 1 サイクルの数値的同値類からなるベクトル空間。
- $\text{NE}(X) \subset N_1(X)$: X のクライマン-森錐。
- R_i ($i = 1, \dots, n$): X の端斜線。
- $\pi_i : X \rightarrow X_i$: R_i の収縮射、つまり、非特異 \mathbb{P}^1 ファイブレーション。
- Γ_i : π_i のファイバー。
- K_i : π_i の相対標準因子。

ここで、端斜線の収縮射を**基本収縮射**、ファイバーが \mathbb{P}^1 である非特異射を**非特異 \mathbb{P}^1 ファイブレーション**と呼ぶ。一般にクライマン-森錐は $\text{NE}(X)$ の閉包として定義するが、 X がファノ多様体であることから通常の設定と一致することに注意する。また、[A, Lemma 5.2] から X の端斜線の数と X のピカル数は等しいことが分かる。



補題 4.1 を X へ適用するために, 任意の $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ に対し, 以下の $N^1(X)$ 上のアフィン変換を考える:

$$(3) \quad r'_i(D) := D + (D \cdot \Gamma_i + 1)K_i.$$

$$(4) \quad T(D) := D + K_X/2.$$

$$(5) \quad r_i(D) := T^{-1} \circ r'_i \circ T(D) = D + (D \cdot \Gamma_i)K_i.$$

ここで, r_i は線形変換であり, なおかつ鏡映である. すなわち, 位数 2 の自己同型写像であり, $N^1(X)$ のある超平面を固定する. 実際, r_i は次の超平面を固定する:

$$(6) \quad \Gamma_i^\perp := \{D \mid D \cdot \Gamma_i = 0\} \subset N^1(X).$$

この r_i を用いて, 鏡映群を定める:

$$(7) \quad W := \langle \{r_i \mid i = 1, \dots, n\} \rangle \subset \text{GL}(N^1(X)).$$

また,

$$(8) \quad W' := \langle \{r'_i \mid i = 1, \dots, n\} \rangle \subset \text{Aff}(N^1(X))$$

とおく. W と W' は同型であり本質的には同じものである. しかし, 後にみるように, コホモロジーの計算をするときは W より W' を用いた方が見通しが良くなる.

ここで, カルティエ因子をそのオイラー標数に対応させる写像を

$$\chi_X : \text{Pic}(X) \rightarrow \mathbb{Z}; L \mapsto \chi(X, L)$$

とかく. X はファノ多様体であることから, 因子の数値的同値性は線形同値性と一致する. 特に, $N^1(X)_\mathbb{Z}$ と $\text{Pic}(X)$ を同一視することができる. この同一視のもと, オイラー標数を多項式写像 $\chi_X : N^1(X) \rightarrow \mathbb{R}$ へ延長することが可能である.

$$\begin{array}{ccc} N^1(X) & \xrightarrow{\chi_X} & \mathbb{R} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{Pic } X & \xrightarrow{\chi_X} & \mathbb{Z} \end{array}$$

さらに, $\chi^T := \chi_X \circ T$ とおき, 補題 4.1 を適用する:

補題 4.3. X 上の任意の \mathbb{R} 因子 D と鏡映 r_i に対して, 次の等式が成り立つ:

$$(9) \quad \chi^T(D) = -\chi^T(r_i(D))$$

証明. 補題 4.1 から格子 $\text{Pic}(X) \subset N^1(X)$ 上等式が成り立つことから従う. ■

系 4.4. X 上の任意の \mathbb{R} 因子 D と $w \in W$ に対して, 次の等式が成り立つ:

$$(10) \quad \chi^T(D) = \pm \chi^T(w(D)).$$

命題 4.5. 以下が成立する.

- (i) W は有限群である.
- (ii) $N^1(X)$ 上 W 不変な内積 \langle, \rangle が存在する.
- (iii) X 上の任意の \mathbb{R} 因子 D に対して, $-D \cdot \Gamma_j = \frac{2\langle D, K_j \rangle}{\langle K_j, K_j \rangle}$ が成り立つ.

証明. (i) 証明のアイデアのみ記す. 任意の $D \in \Gamma_i^\perp$ に対し, $r_i(D) = D$ が成り立つ. 従って, 補題 4.3 により χ^T は Γ_i^\perp 上消えることが分かる. さらに, 系 4.4 により, χ^T は全ての $w(\Gamma_i^\perp)$ 上消える. 以上により, 集合

$$\{[w(\Gamma_i^\perp)] \in \mathbb{P}(N^1(X)) \mid w \in W, i = 1, \dots, n\}$$

は有限である. 実際, この集合の濃度は多項式 χ^T の次数以下であることが分かる. この有限性が証明において最も重要であり, このことを用いて W が有限群であることを示すことができる.

(ii) $N^1(X)$ の内積 $(,)$ を固定する. このとき, W 不変な内積を次のようにして定義することができる:

$$\langle x, y \rangle := \sum_{w \in W} (wx, wy).$$

- (iii) $\langle r_i(D), r_i(D) \rangle = \langle D, D \rangle$ から従う. ■

次の二つの集合について考える.

$$(11) \quad \Phi := \{w(-K_i) \mid w \in W, i = 1, \dots, n\} \subset N^1(X),$$

$$(12) \quad \Delta := \{-K_i \mid i = 1, \dots, n\}.$$

これらが線形代数群を構成するにあたり重要な役割を果たす:

定理 4.6. W 不変な内積 \langle, \rangle をもったユークリッド空間 $N^1(X)$ に対し, 以下が成り立つ.

- (i) Φ は $N^1(X)$ のルート系を成す.
- (ii) Δ はルート系 Φ の底である.
- (iii) W は Φ のワイル群である.

2章で説明した通り, ルート系 Φ から単連結半単純線形代数群 G を構成することができる. さらに, この G は Φ のカルタン行列にのみ依存して構成される. 定理 4.5 (iii) により Φ の底 Δ に関するカルタン行列は $(-K_i \cdot \Gamma_j)$ と書けるので, 次のことが分かる.

系 4.7. 交点行列 $(-K_i \cdot \Gamma_j)$ にのみ依存して, 半単純線形代数群 G を構成することができる.

さらに, ワイル群 W に関するワイルの部屋は, 次のような幾何学的な意味をもつことが分かる.

系 4.8. アンプル錐 $\text{Amp}(X)$ は W のワイルの部屋であり, ネフ錐 $\text{Nef}(X)$ は W の基本領域である.

証明. Δ がルート系 Φ の底であることは、次の集合がワイルの部屋であることと同値である ([Hu, 10.1] 参照) :

$$U = \{D \in N^1(X) \mid \langle D, -K_i \rangle > 0, i = 1, \dots, n\}.$$

一方, $NE(X) = \sum_i \mathbb{R}_{\geq 0}[\Gamma_i]$ であった. 補題 4.5 (iii) により, U は Γ_i との交点数が正の \mathbb{R} 因子からなるので, U は X のアンプル錐である. 後半は [Hu, 10.2] から従う. ■

4.2. 因子の長さとコホモロジー. 引き続き, 記号 4.2 のセッティングのもと議論を進める. 系 4.7 で得た半単純線形代数群 G に対し, 次の記号を導入する.

記号 4.9. • $\mathfrak{g} : G$ のリー環.

- $H \subset G : G$ のカルタン部分群.
- $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g} : H$ のリー環.
- $\bar{\Phi} \subset \mathfrak{h}^\vee : H$ に対応するルート系.
- $\mathfrak{h}_\mathbb{R}^\vee : \bar{\Phi}$ により生成される \mathfrak{h}^\vee の実ベクトル部分空間.
- $\bar{\Delta} = \{\alpha_i \mid i = 1, \dots, n\} : \bar{\Phi}$ の底.
- $W := \langle \{r_i \mid i = 1, \dots, n\} \rangle \subset GL(N^1(X)) : G$ のワイル群
- $W' := \langle \{r'_i \mid i = 1, \dots, n\} \rangle \subset \text{Aff}(N^1(X))$

ただし, 上記記号において, $\Delta \subset \Phi$ と $\bar{\Delta} \subset \bar{\Phi}$ に対応するディンキン図形が一致するように, それぞれの元を順序付けする. ここで, 次の対応を定める.

$$(13) \quad \psi : N^1(X) \rightarrow \mathfrak{h}_\mathbb{R}^\vee; -K_i \mapsto \alpha_i.$$

定義 4.10. 以下, カルタン行列 H を含むボレル部分群を $B \subset G$ とかき, 対応する完全旗多様体 G/B を X の**有理等質モデル**と呼ぶ. G/B に対しても X と同様の記号を用いる. ただし, バーを付けてそれぞれの場合を区別する (例えば, $\pi_i, \Gamma_i, -\bar{K}_i, \dots$, など).

X の等質モデル G/B に対し, G/B 上の任意の直線束は等質ベクトル束である. 特に, G/B 上の任意の直線束は**ウェイト**, つまり, \mathfrak{h}^\vee の元により定まる. 特に, $\mathfrak{h}_\mathbb{R}^\vee \cong N^1(G/B)$ が成り立ち, この同型のもと, α_i は $-\bar{K}_i$ に対応する. 従って, ψ は

$$(14) \quad \psi : N^1(X) \rightarrow N^1(G/B); -K_i \mapsto -\bar{K}_i.$$

と見なすことができる.

Φ のワイルの部屋の T による像 (つまり, $N^1(X) \setminus \bigcup_{D \in \Phi} T(D^\perp)$ の連結成分) を **T -ワイルの部屋**と呼ぶ.

補題 4.11. 任意の $D \in N^1(X)$ に対し, $w'(D) = D'$ となる $w' \in W'$ と $D' \in T(\text{Nef}(X))$ が存在する. 特に, D' はユニークで, D が X の T -ワイルの部屋に含まれていたならば, w' は D によりユニークに定まる.

証明. W' は Φ の T -ワイルの部屋を集めてできる集合に作用する. 従って, 系 4.8 と [Hu, 10.3] より従う. ■

補題 4.12. ある $i_0 \in \mathbb{Z}$ に対して,

$$(15) \quad H^j(X, D) = 0, j \neq i_0$$

証明. $w'(D) \in T(\text{Nef}(X))$ より, $w'(D) - K_X/2 \in \text{Nef}(X)$ となるので $w'(D) - K_X \in \text{Amp}(X)$ となることが分かる. よって小平消滅定理により,

$$H^j(X, w'(D)) = H^j(X, K_X + (w'(D) - K_X)) = 0, \quad j \neq 0.$$

補題 4.1 を用いることで, (15) が成り立つことが分かる. ■

任意の元 $w \in W$ は $w = r_{i_1} \circ \cdots \circ r_{i_t}$ と記述されるが, このような w の全ての記述に対して t が最小のとき, t を w の長さ $\lambda(w)$ と呼ぶ. さらに, 任意の $w' \in W'$ に対し, その長さを $\lambda(w') := \lambda(T^{-1} \circ w' \circ T)$ により定義する. 補題 4.11 により, T -ワイルの部屋上の任意の \mathbb{R} 因子 D に対し, その長さ $\lambda(D)$ を $w'(D) \in T(\text{Amp}(X))$ を満たす w' の長さとして定義することができる. このとき, 補題 4.12 を用いて次の命題を示すことができる:

命題 4.13. 任意の $D \in \text{Pic}(X)$ に対し, $w'(D) \in T(\text{Nef}(X))$ となるよう $w' \in W'$ を定める. このとき, 以下のいずれかが成り立つ:

- $w'(D) \in T(\text{Nef}(X) \setminus \text{Amp}(X))$ かつ任意の j に対し $H^j(X, D) = 0$.
- $w'(D) \in T(\text{Amp}(X))$ かつ任意の $j \neq \lambda(D)$ に対し $H^j(X, D) = 0$.

系 4.14. X の等質モデル G/B に対し, $\dim X = \dim G/B$ が成り立つ.

証明. $H^{\dim X}(X, K_X) \neq 0$ なので, 命題 4.13 により $\lambda(K_X) = \dim X$ となる. 同様に, $\lambda(K_{G/B}) = \dim G/B$ も分かる. 他方, ψ は因子の長さを保ち, さらに $\psi(K_X) = K_{G/B}$ が成り立つ. 従って, $\dim X = \dim G/B$ が成り立つ. ■

任意の $D \in \Phi$ に対して, 線形写像 $F_D : N^1(X) \rightarrow \mathbb{R}$ を次により定める:

$$F_D(L) := -2 \frac{\langle D, L \rangle}{\langle D, K_X \rangle}.$$

次の結果は χ_X はルート系 Φ にのみ依存して定まることを意味する.

定理 4.15. $\Phi^+ \subset \Phi$ を底 Δ に関する正ルートの集合とする. このとき次が成り立つ.

$$\chi_X = \prod_{D \in \Phi^+} (1 + F_D).$$

証明. 命題 4.5 で示した通り, χ_X は $w(\Gamma_i^+)$ 上消える. このことや, 系 4.14 などを用いて示すことができる. ■

命題 4.13 と定理 4.15 により, 次を得る:

系 4.16. 任意の $L \in \sum \mathbb{Z}[K_i] \subset \text{Pic}(X)$ に対し,

$$h^i(X, L) = h^i(G/B, \psi(L)) \quad i \in \mathbb{Z}.$$

ここまでの証明の前半部分の大まかな流れである. 実際には, これらの結果を用いて $X \cong G/B$ であることを示す. 詳細は [OSWW, OSWW2] を参照されたい.

5. CP 予想に関して知られていること

5.1. **ファノ擬指数が大きい場合と小さい場合の CP 予想.** ここでは, CP 予想の専門家にはよく知られた事柄について説明する. ファノ多様体 X に対し, そのファノ擬指数 i_X とは

$$i_X := \min\{-K_X \cdot C \mid C \subset X : \text{有理曲線}\}$$

を意味する. 擬指数の大きいファノ多様体の特徴付けとして, 以下の結果が知られている.

定理 5.1 ([CMSB], [Mi]). X を擬指数 i_X の n 次元ファノ多様体とする.

- (i) もし $i_X \geq n + 1$ ならば, X は \mathbb{P}^n と同型で $i_X = n + 1$ が成り立つ.
- (ii) もし $i_X = n \geq 3$ ならば, X は Q^n と同型である.

上記 (i) は森による射影空間の特徴付けの一般化になっていることに注意する. ネフな接束をもつファノ多様体に関して, 次が成り立つ.

補題 5.2. X を CP 多様体とする. このとき, 擬指数 i_X は 2 以上である. さらに, $i_X = 2$ のときピカル数は 2 以上である.

証明. C を X 上の有理曲線として, $f: \mathbb{P}^1 \rightarrow C \subset X$ をその正規化とする. 仮定より f^*T_X はネフである. 従って, $f^*T_X \cong \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i)$ は任意の i に対して $a_i \geq 0$ を満たす. さらに, $df: T_{\mathbb{P}^1} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2) \rightarrow f^*T_X$ は単射なので, ある i に対しては $a_i \geq 2$ となる. 従って, $-K_X \cdot C = \sum a_i \geq 2$ となり, 前半が従う.

後半も簡単に示すことができる. 例えば, [Hw, Theorem 4.3 の前, P. 623] を参照されたい. ■

さらに, 擬指数 3 の場合には Mok, Hwang による次の結果が知られている. ここでは定理 1.2 の系として彼らの結果が得られることを紹介する.

定理 5.3 ([Mok2, Main Theorem], [Hw]). 以下の二条件は同値である:

- (i) X はピカル数 1 の CP 多様体で, ファノ擬指数 i_X が 3 である.
- (ii) X は \mathbb{P}^2 , Q^3 もしくは $K(G_2)$ のいずれかと同型である.

証明. 一般に, (ii) ならば (i) は簡単に分かるので, 逆を示す.

X を (i) の条件を満たす n 次元 CP 多様体とする. 反標準次数が 3 となる有理曲線を含む X のチャウスキームの既約成分を \mathcal{K} とおき, その普遍族を $\pi: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{K}$ により表す. さらに, 評価写像を $\iota: \mathcal{U} \rightarrow X$ とかく:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U} & \xrightarrow{\iota} & X \\ \pi \downarrow & & \\ \mathcal{K} & & \end{array}$$

このとき, 標準的な手法により次を示すことができる ([Mok2, Lemma 1.2.1, Lemma 1.2.2] 参照):

- (i) \mathcal{K} は n 次元非特異射影多様体である.
- (ii) ι と π は非特異 \mathbb{P}^1 ファイブレーションである.

X のピカル数が 1 であることから, U はピカル数 2 のファノ多様体であることが分かる. 従って, U は定理 1.2 の条件を満たすファノ多様体となり, 階数 2 の線形代数群 G とそのボレル部分群 B の商 G/B と同型になる. よって, U は $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, $\mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^2})$, $\mathbb{P}(\mathcal{N})$, $\mathbb{P}(\mathcal{C})$ のいずれかと同型であるが, U は $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ と同型ではない. 実際, もし同型であれば, X は \mathbb{P}^1 となり $i_X = 3$ に矛盾する. 同様に, 簡単な計算により X は \mathbb{P}^2 , Q^3 もしくは $K(G_2)$ のいずれかと同型であることが従う. ■

以上の結果を次元の低い場合に用いると, 4次元かつピカル数が 1 の場合の CP 予想が正しいことが従う. さらに, 5次元の場合に関しては以下のことが分かる.

系 5.4 ([Wa, Corollary 5.2]). X をピカル数 1 の 5次元 CP 多様体とする. このとき, X は以下のいずれかを満たす:

- (i) X は \mathbb{P}^5 , Q^5 もしくは $K(G_2)$ と同型である.
- (ii) $i_X = 4$ を満たす.

5.2. CP 予想を正しいと思う根拠はあるか? CP 予想が正しいと考えられる根拠として, 先行結果を挙げることができる. 例えば,

- (i) 4次元以下では CP 予想は正しい ([Hw] 参照).
- (ii) $X \subset \mathbb{P}^N$ が完全交差ならば CP 予想は正しい ([Pa] 参照).
- (iii) 微分幾何学的類似として, 正則双断面曲率が非負のコンパクトケーラー多様体はエルミート対称空間であることが Mok により示されている ([Mok] 参照).

一方で, Mok は [Mok2] において, “there is in our opinion no convincing evidence why Campana-Peternell Conjecture should be valid in its full generality.” と述べている. また, R. Pandharipande は [Pa] において “The failure of the speculation would perhaps be more interesting than the success.”¹ と記している. 今回の定理 1.2 で, 次元に関わらずある程度広いクラスの多様体に関して CP 予想が正しいことが分かるので, 定理 1.2 は CP 予想の新たな根拠となるであろう. 一方で, CP 予想を示すことを目標とするが, もしその過程で反例が見つければそれはそれで面白い, というのが筆者の基本的な立場である. また, 正標数で考えるのも面白そうである:

問題 5.5. 正標数において, 等質多様体でない nef な接束をもつファノ多様体の例は存在するか.

完全交差に関しては [Pa] と同様な結果が成り立つことが古川勝久により示されている [Fu].

CP 多様体は等質多様体と同じ非常に強い性質をもつことも知られており, それを最後に紹介する.

命題 5.6. [MOSW, Proposition 3.1 参照] CP 多様体 X に対して, 以下が成り立つ:

- (i) 任意の収縮射 $\pi: X \rightarrow Y$ は非特異射である. さらに, Y や任意のファイバー $\pi^{-1}(y)$ も CP 多様体である.

¹[Pa] では, CP 多様体より一般的な凸有理連結多様体について述べられている.

- (ii) 任意の収縮射 $\pi : X \rightarrow Y$ に対し, ファイバー $\pi^{-1}(y)$ のピカール数は
相対ピカール数 $\rho_X - \rho_Y$ と一致する.
- (iii) クライマン-森錐 $NE(X)$ は単体である.

参考文献

- [A] Araujo, C. *Rational curves of minimal degree and characterizations of projective spaces*, Math. Ann. **335** (2006), 937–951.
- [CP] Campana, F and Peternell, T. *Projective manifolds whose tangent bundles are numerically effective*, Math. Ann. 289 (1991), 169–187.
- [CP2] Campana, F and Peternell, T. *4-folds with numerically effective tangent bundles and second Betti numbers greater than one*, Manuscripta Math. 79 (1993), no. 3-4, 225–238.
- [CMSB] Cho, K., Miyaoka, Y. and Shepherd-Barron, N. I. *Characterizations of projective space and applications to complex symplectic manifolds*, in *Higher dimensional birational geometry*, Kyoto, 1997, Advanced Studies in Pure Mathematics, vol. 35, (Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2002), 1–88.
- [DPS] Demailly, J. P., Peternell, P. and Schneider, M. *Compact complex manifolds with numerically effective tangent bundles*, J. Algebraic Geom. 3 (1994), no. 2, 295–345.
- [Fu] Furukawa, K., *Convex rationally connected varieties in arbitrary characteristic*, arXiv:1311.6181.
- [Hu] Humphreys, J.E. *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Graduate Texts in Mathematics, **9**. Springer-Verlag, New York, 1978.
- [Hw] Hwang, J.M. *Rigidity of rational homogeneous spaces*, Proceedings of ICM. 2006 Madrid, volume II, European Mathematical Society, 2006, 613–626.
- [Mi] Miyaoka, Y. *Numerical characterisations of hyperquadrics*, Complex analysis in several variables-Memorial Conference of Kiyoshi Oka’s Centennial Birthday, Advanced Studies of Pure Mathematics, vol. 42, (Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2004), 209–235.
- [Mok] N. Mok, *The uniformization theorem for compact Kähler manifolds of nonnegative holomorphic bisectional curvature*, J. Differential Geom. 27 (1988), no. 2, 179–214.
- [Mok2] Mok, N. *On Fano manifolds with nef tangent bundles admitting 1-dimensional varieties of minimal rational tangents*, Trans. Amer. Math. Soc. 354 (2002), no. 7, 2639–2658.
- [Mo] Mori, S. *Projective manifolds with ample tangent bundles*, Ann. of Math. (2) 110 (1979), no. 3, 593–606.
- [MOSW] Muñoz, R., Occhetta, G., Solá Conde, L.E. and Watanabe, K. *Rational curves, Dynkin diagrams and Fano manifolds with nef tangent bundles*. arXiv:1304.3928.
- [OSWW] Occhetta, G., Solá Conde, L.E., Watanabe, K. and Wiśniewski, J. *Fano manifolds whose elementary contractions are smooth \mathbb{P}^1 -fibrations*. submitted.
- [OSWW2] Occhetta, G., Solá Conde, L.E., Watanabe, K. and Wiśniewski, J. *Fano manifolds whose elementary contractions are smooth \mathbb{P}^1 -fibrations whose Dynkin diagram is F_4* . in preparation.
- [OSS] Okonek, C., Schneider, M. and Spindler, H. *Vector bundles over complex projective space*, Progress in Math., vol. 3, Birkhäuser, Boston, Basel, Stuttgart, 1980.
- [Ot] Ottaviani, G. *On Cayley bundles on the five-dimensional quadric*, Boll. Un. Mat. Ital. A (7) 4 (1990), 87–100.
- [Pa] Pandharipande, R. *Convex rationally connected varieties*, Proc. Am. Math. Soc. 141, No. 5, 1539–1543 (2013).
- [SY] Siu, Y. T. and Yau, S. T. *Compact Kähler manifolds of positive bisectional curvature*, Invent. Math. 59 (1980), no. 2, 189–204.
- [Wa] Watanabe, K. *Fano 5-folds with nef tangent bundles and Picard numbers greater than one*. Math. Z. 276 (2014), no. 1-2, 39–49.

[Wa2] Watanabe, K., \mathbb{P}^1 -bundles over projective manifolds of Picard number one each of which admit another smooth morphism of relative dimension one, submitted, arXiv:1201.3558.

COURSE OF MATHEMATICS, PROGRAMS IN MATHEMATICS, ELECTRONICS AND INFORMATICS, GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE AND ENGINEERING, SAITAMA UNIVERSITY. SHIMO-OKUBO 255, SAKURA-KU SAITAMA-SHI, 338-8570, JAPAN.

E-mail address: kwatanab@rimath.saitama-u.ac.jp