

トーリック・ファノ多様体の第二チャーン指標

岐阜聖徳学園大学・経済情報学部 佐藤 拓*

Hiroshi Sato

Faculty of Economics and Information,
Gifu Shotoku Gakuen University

概要

トーリック・ファノ多様体の高次化として、第二チャーン指標が正や非負であるようなトーリック多様体の分類問題について紹介する。ファノ多様体の場合と違い、同型類の個数は有限にはならないが、いくつかの場合について、そのような多様体の構造は限定されることが分かった。第三チャーン指標や第四チャーン指標の場合の結果についても少しだけ述べる。

目次

1	トーリック 2 ファノ多様体	1
2	第二チャーン指標が正または非負であるようなトーリック多様体	3
3	第三チャーン指標, 第四チャーン指標の場合	4

1 トーリック 2 ファノ多様体

非特異トーリック・ファノ多様体の分類は基本的な問題であり、様々な研究がある (例えば, [B1], [B2], [KrNl], [S1], [WW]などを参照せよ)。しかしながら、よく知られているように、Øbro [Øb] が構築したアルゴリズム SFP により、非特異トーリック・ファノ多様体の分類は任意次元で完成されてしまった。実際、SFP に次元 d を入力すると、 d 次元の非特異トーリック・ファノ多様体を重複無く全て出力してくれる (無論、次元が大きくなれば、計算時間は膨大なものとなる)。

Øbro の結果は、非特異トーリック・ファノ多様体の分類問題を心の拠り所としていた筆者にとっては衝撃的な出来事であったが、幸いなことに (?), Jong-Starr [JS] は、代数多様体上の有理曲面の研究の中で、次の概念を導入していた:

*〒 500-8288 岐阜県岐阜市中鷺 1-38, e-mail: hirosato@gifu.shotoku.ac.jp

定義 1.1 (トーリックとは限らない) 非特異ファノ多様体 X が**2ファノ多様体** (*2-Fano manifold*) であるとは, $(\text{ch}_2(X) \cdot S) > 0$ が任意の曲面 $S \subset X$ に対して成立することである. また, 同様に, $(\text{ch}_2(X) \cdot S) \geq 0$ が任意の曲面 $S \subset X$ に対して成立するとき, X を**弱2ファノ多様体** (*weakly 2-Fano manifold*) と呼ぶ.

注 1.2 [JS] においては, 弱2ファノ多様体のことを単に2ファノ多様体と呼んでいた. おそらく, 後述するように, $(\text{ch}_2(X) \cdot S) > 0$ で定義すると, 多様体はかなり限定されてしまうからであると思われる. しかしながら, 定義の自然さから, ここでの名称は [AC] に従った.

注 1.3 2ファノに対する条件のことを“ $\text{ch}_2(X)$ は**アンブル**”, 弱2ファノに対する条件のことを“ $\text{ch}_2(X)$ は**ネフ**”と表現することにする. 前者に関しては本稿のみでの表現とする.

つまりは, 次なる問題として, **非特異トーリック2ファノ多様体の分類**を試みよう, というわけである (非特異トーリック・ファノ多様体の分類表をチェックすれば良いだけなのでは? というもっともな指摘は今は無視させて頂くことにする). 尚, トーリックとは限らない一般の場合の結果については Araujo-Castravet [AC] を参照して頂きたい.

結果として, 4次元以下の場合については, 第2章で述べる方法により, 次の分類結果を得た:

定理 1.4 (Nobili [No], Sato [S2]) (1) 4次元以下のトーリック2ファノ多様体は射影空間に限る.

(2) 4次元以下のトーリック弱2ファノ多様体の同型類の個数は以下の通りになる:

次元	1	2	3	4
トーリック・ファノ多様体の数	1	5	18	124
トーリック弱2ファノ多様体の数	1	3	8	25

この結果は, 非特異トーリック・ファノ多様体の分類表をチェックすることによりなされている (そのチェックの仕方に一工夫有り, かりうじて論文としての体裁をとれている, と筆者は思っている). 故に, 今後もこの方向で非特異トーリック弱2ファノ多様体の分類を考えるのは面白みに欠けると思われるが, 分類問題を色々な条件で考察するうち, 実は考える多様体が**ファノ多様体であるという仮定は不要**なのではないか, という状況が見えてきた.

考察によって得た予想を述べる:

予想 1.5 X を非特異かつ射影的なトーリック多様体とする.

(1) $\text{ch}_2(X)$ はアンブル $\iff X$ は射影空間.

(2) $\text{ch}_2(X)$ はネフ \implies 次のうちいずれかが成立:

- (a) $\text{ch}_2(X)$ はアンブル.
- (b) $X = X_1 \times X_2$ と分解して, $\text{ch}_2(X_1)$ 及び $\text{ch}_2(X_2)$ はネフ.
- (c) X は射影直線束の構造を持つ.

注 1.6 定理 1.5 (2) において, “(c) $\implies \text{ch}_2(X)$ はネフ” は一般には成立しない. 例えば, 非特異トーリック弱 2 ファノ多様体の分類結果を参照して欲しい.

タイトルに “ファノ” とついているが, 以降は関係無く, 次章で予想 1.5 に関連する結果について述べる.

2 第二チャーン指標が正または非負であるようなトーリック多様体

最初に, [S2] より射影空間上の射影空間束の場合の計算を紹介する. この場合, 次が成立する:

定理 2.1 (Sato [S2]) X をピカル数が 2 である非特異かつ射影的なトーリック多様体とする. このとき次が成立する:

- (1) $\text{ch}_2(X)$ はアンブルではない.
- (2) $\text{ch}_2(X)$ がネフ $\iff X$ は二つの射影空間の直積か, または射影空間上の射影直線束.

注 2.2 当然のことであるが, 次元を固定しても, 射影空間上の射影直線束の構造を持つトーリック多様体の同型類は無数存在する. つまり, $\text{ch}_2(X)$ がネフという条件では, トーリック・ファノ多様体のときのような**有限性は成立しない**.

詳しい計算は [S2] を参照して頂きたいが, 計算を (楽しく, 簡単に) 行う上でのテクニックとして, 次の概念が重要であった:

定義 2.3 X を非特異かつ完備なトーリック多様体とし, $Y \subset X$ を任意のトーラス不変な部分多様体として, $\dim Y = l$ とする. $\{D_1, \dots, D_m\}$ をトーラス不変因子全体の集合としたとき, 各 D_i に対して変数 X_i を対応させて, 多項式 $I_{Y/X}$ を以下のように定義する:

$$I_{Y/X} = I_{Y/X}(X_1, \dots, X_m) := \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_l \leq m} (D_{i_1} \cdots D_{i_l} \cdot Y) X_{i_1} \cdots X_{i_l} \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_m].$$

$I_{Y/X}$ は Y の X 上での数値的なデータを全て持っていると言えるが, 大変ありがたいことに, 次の結果のように良い性質を持つことがある.

定理 2.4 (Sato [S2]) $S \cong \mathbb{P}^2 \subset X$ をトーラス不変な部分曲面とし, $C \subset S$ をトーラス不変な曲線とする. このとき

$$I_{S/X} = (I_{C/X})^2$$

が成立する.

定理 2.5 (Sato [S2]) $S \cong F_\alpha \subset X$ を, 次数 α のヒルツェブルフ曲面に同型であるようなトーラス不変な部分曲面とする. このとき, $C_{\text{fib}} \subset S$ をファイバーに対応するトーラス不変曲線, C_{neg} を負切断に対応するトーラス不変曲線とすると,

$$I_{S/X} = \alpha(I_{C_{\text{fib}}/X})^2 + 2I_{C_{\text{fib}}/X}I_{C_{\text{neg}}/X}$$

が成立する.

トーラス不変曲線 C に対する $I_{C/X}$ は, 本質的には C に付随する壁関係式に他ならないので, 定理 2.4, 2.5 を用いることにより, 射影曲面, またはヒルツェブルフ曲面に同型な S に対する $I_{S/X}$ を容易に求めることが出来るのである.

この章の最後に, もう少し一般的な結果を紹介する:

定理 2.6 (Sato [S3]) X を非特異かつ射影的なトーリック多様体として, X はファノ収縮写像 $\varphi: X \rightarrow \bar{X}$ を持つとする. このとき以下が成立する:

- (1) $\text{ch}_2(X)$ がアンプル $\iff \bar{X} = \{\text{一点}\}$. すなわち, X は射影空間.
- (2) $\text{ch}_2(X)$ がネフ $\implies X$ は射影空間と \bar{X} の直積に分解するか, または, φ は射影直線束となる.

定理 2.6 の証明方針は, φ のファイバーと \bar{X} からそれぞれトーラス不変な曲線を (テキトーではなく) 適当に選んで, それらからヒルツェブルフ曲面に同型なトーラス不変な曲面を構成して, X の構造を限定して行く, というものである. ヒルツェブルフ曲面であるので, 定理 2.5 が適用出来る.

3 第三チャーン指標, 第四チャーン指標の場合

前章までは多様体上の曲面が中心の話であったが, 第 3 章では更に次元の高い部分多様体を中心にした場合の計算を (ほんの少し) 紹介する. 定理 2.1 の高次化として, 以下が成立する (ただし, アンプル性, ネフ性は 2次元のときと同様に定義する):

定理 3.1 X をピカル数が 2 である非特異かつ射影的なトーリック多様体とする. このとき次が成立する:

- (1) $\text{ch}_3(X)$ はアンプルではない.

(2) $\text{ch}_3(X)$ がネフ $\iff X$ は二つの射影空間の直積か, または射影空間上の \mathbb{P}^m 束 ($m = 1, 2$).

定理 3.2 X をピカル数が 2 である非特異かつ射影的なトーリック多様体とする. このとき次が成立する:

(1) $\text{ch}_4(X)$ はアンプルではない.

(2) $\text{ch}_4(X)$ がネフ $\iff X$ は二つの射影空間の直積か, または射影空間上の \mathbb{P}^m 束 ($m = 1, 2, 3$).

これらの計算を容易にするテクニックとして, 定理 2.5 の一般化の次の結果がある:

定理 3.3 (Sato [S4]) X を非特異かつ完備なトーリック多様体として, $Y \subset X$ をピカル数が 2 であるようなトーラス不変な部分多様体とする. すなわち,

$$Y \cong \mathbb{P}_{\mathbb{P}^{n-1}}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(a_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(a_{m-1})).$$

ただし, $k := \dim Y$, $m, n \geq 2$, $m+n = k+2$, $a_1, \dots, a_{m-1} \geq 0$. 更に, $C_1 \subset Y$ を \mathbb{P}^{m-1} 束構造のファイバーに対応するトーラス不変な曲線とし, $C_2 \subset Y$ をもう一方の端射線に属するトーラス不変な曲線とする. このとき,

$$I_{Y/X} = \sum_{i=1}^n \alpha^{n-i} \binom{k}{i-1} (I_{C_1/X})^{k-i+1} (I_{C_2/X})^{i-1}.$$

ただし, $\alpha := a_1 + \cdots + a_{m-1}$ とおいた.

最後に, 定理 3.1, 3.2 に関して予想を述べたいところであるが, $\text{ch}_3(X)$, $\text{ch}_4(X)$ の場合については, ここで述べた結果以外には検証を行っていないので, 代わりに次の質問と問題で本稿を締め括らせて頂くことにする:

質問 3.4 自然数 $k \geq 2$ を固定する. $\text{ch}_k(X)$ がアンプルとなるような非特異かつ射影的なトーリック多様体は射影空間だけに限るか?

問題 3.5 自然数 $k \geq 2$ を固定する. $\text{ch}_k(X)$ がネフとなるような非特異かつ射影的なトーリック多様体の構造を決定せよ.

謝辞

2 ファノ多様体方面の研究は, 2006 年の JAMI のときに, 京大の藤野氏に助言を頂き, 4 次元トーリック・ファノ多様体の分類表のチェック等を行ったのがそもそもの始まりである. 藤野先生に対する感謝の意をここで示したい. また, 本講演の機会を与えて下さった北大の松下先生に感謝致します.

本研究は JSPS 科研費, 基盤研究 (C) 23540062 の助成を受けている.

参考文献

- [AC] C. Araujo and A. Castravet, Classification of 2-Fano manifolds with high index, arXiv:1206.1357.
- [B1] V. Batyrev, Toroidal Fano 3-folds, *Math. USSR-Izv.* **19** (1982), 13–25.
- [B2] V. Batyrev, On the classification of toric Fano 4-folds, *Algebraic Geometry*, 9, *J. Math. Sci. (New York)* **94** (1999), 1021–1050.
- [JS] A. de Jong and J. Starr, Higher Fano manifolds and rational surfaces, *Duke Math. J.* **139** (2007), 173–183.
- [KrNl] M. Kreuzer and B. Nill, Classification of toric Fano 5-folds, *Advances in geometry* **9** (2009), 85–97.
- [No] E. Nobile, Classification of Toric 2-Fano 4-folds, *Bull. Braz. Math. Soc., New Series* **42** (2011), 399–414.
- [Øb] M. Øbro, An algorithm for the classification of smooth Fano polytopes, arXiv:0704.0049.
- [S1] H. Sato, Toward the classification of higher-dimensional toric Fano varieties, *Tohoku Math. J.* **52** (2000), 383–413.
- [S2] H. Sato, The numerical class of a surface on a toric manifold, *Int. J. Math. Math. Sci.* **2012** (2012).
- [S3] H. Sato, Toric manifolds whose second Chern character is negative and Fano contractions, in preparation.
- [S4] H. Sato, The numerical class of a submanifold on a toric manifold, in preparation.
- [WW] K. Watanabe and M. Watanabe, The classification of Fano 3-folds with torus embeddings, *Tokyo J. Math.* **5** (1982), 37–48.