数理解析研究所講究録
第 1897 巻 2014 年 117-127

特殊な双有理射を持つ4次元ファノ多様体

東海大学・理学部数学科　　月岡　透
Toru Tsukioka
Department of Mathematics, Faculty of Science
Tokai University

1　序論

森・向井の分類 ([4])、つまりピカール数が2以上の非特異3次元ファノ多様体の分類は、端射線の情報をもとに幾何構造を復元するという考えに基づく。4次元以上についても、端射線収縮射を用いてファノ多様体の分類を目指すのは自然ではあるが、問題設定として漠然としているので、ある種の条件のもとで分類するのが現実的である ([5] の問題6を参照)。そこで、本稿では特殊な場合として、小収縮 (small contraction) を持つ4次元ファノ多様体について考えてみる。3次元では存在しない型の収縮射なので、興味深い例が期待できる。

4次元の非特異射影多様体について、端射線が定める小収縮の例外集合は $\mathbb{P}^2$ の直和であることが知られている ([3] Theorem 1.1)。また、互いに交差する曲線と曲面のブローアップを組み合わせる事により、例外集合が実際に複数個の既約成分からなる小収縮を持つ非特異4次元射影多様体を構成できる ([3] Example 2.6)。もちろん、小収縮を持つすべての4次元ファノ多様体が、この構成法によって得られる訳ではない。たとえば、$\mathbb{P}^4$ の2次曲線に沿ったブローアップや、$\mathbb{P}^2$ 上の $\mathbb{P}^2$ 束 $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)^{\oplus 2})$ は小収縮を持つ4次元ファノ多様体であるが、これらはピカール数が2なので、上記の構成法では得られない。

したがって、本来は「小収縮が存在する」という条件での分類を考えるべきだが、これでもやはり漠然としているので、本稿では上述の構成法 (ブローアップの組み合わせ) で得られた小収縮を持つような4次元ファノ多様体のみを考察することにする。

なお、4次元非特異ファノ多様体のピカール数については上限が18であると予想されている。ピカール数が7以上の例は Del Pezzo 曲面の直積以外に知られていない。小収縮を持つ4次元ファノ多様体は、ピカール数の上限問題の考察において重要である ([2] を参照)。

本稿では、代数多様体は複素数体上定義されているとする。

2 小収縮の構成法

曲線と曲面のブローアップの組み合わせによる小収縮の構成法（[3] Example 2.6）を復習する。

Y を非特異 4 次元射影多様体、S を Y 内の非特異曲面、C を Y 内の非特異曲線とする。ただし、S と C は k 個の点で重複度なしに交わっているとし、

$$S \cap C = \{p_1, \cdots, p_k\}$$

とおく。

まず、$\pi : X \to Y$ を曲線 C に沿ったブローアップとし、例外因子を E とおく。制限射 $\pi|_E : E \to C$ は $\mathbb{P}^2$ 束になる。曲面 S のブローアップ π による狭義変換を S' とおく。また、各 $i = 1, \cdots, k$ について、$E_i := \pi^{-1}(p_i)$ とし、$e_{i0} := S' \cap E_i$ とおく。e_{i0} は $E_i \simeq \mathbb{P}^2$ の直線である。$e_i \subset E_i$ を e_{i0} とは異なる直線とする。制限射 $\pi|_{S'} : S' \to S$ は点 $p_1, \cdots, p_k$ でのブローアップであり、$e_{10}, \cdots, e_{k0}$ が例外曲線になることに注意する。

次に、$\beta : \widetilde{X} \to X$ を曲面 S' に沿ったブローアップとし、例外因子を F とおく。制限射 $\beta|_F : F \to S'$ は $\mathbb{P}^1$ 束になる。$\widetilde{E} := \beta^{-1}(E)$ とおく。制限射 $\beta|_{\widetilde{E}} : \widetilde{E} \to E$ は k 本の直線 $e_{10}, \cdots, e_{k0}$ に沿ったブローアップである。

各 $i = 1, \cdots, k$ に対して、$\widetilde{E_i} := \beta_*^{-1} E_i$ とおく。$\beta|_{\widetilde{E_i}} : \widetilde{E_i} \to E_i \simeq \mathbb{P}^2$ は同型射であり、$N_{\widetilde{E_i}/\widetilde{X}} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)^{\oplus 2}$ となる。

各 $i = 1, \cdots, k$ に対して、有理曲線 $\widetilde{e_i} := \beta_*^{-1} e_i$ を考える。いま、点 $q_i := e_i \cap e_{i0}$ について $f_i := \beta^{-1}(q_i)$ とおく。任意の $i, j \in \{1, \ldots, k\}$ について、e_i と e_j は $E \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ において数値的同値なので、X においてもそうである。したがって、$\widetilde{X}$ における数値的同値関係：

$$\widetilde{e_i} + f_i \equiv \widetilde{e_j} + f_j$$

を得る。f_i と f_j は両方とも $\mathbb{P}^1$ 束 $\beta|_F : F \to S'$ のファイバーなので、$\widetilde{X}$ において $f_i \equiv f_j$ である。よって、$\widetilde{e_i} \equiv \widetilde{e_j}$ となり、$\mathbb{R}^+[\widetilde{e_i}] = \mathbb{R}^+[\widetilde{e_j}]$ を得る。よって、$\mathbb{R}^+[\widetilde{e_1}], \cdots, \mathbb{R}^+[\widetilde{e_k}]$ は $\overline{\mathrm{NE}}(\widetilde{X})$ において同一の端射線であることが分かる。対応する収縮射は、$\widetilde{E_1}, \cdots, \widetilde{E_k}$ をそれぞれ相異なる k 個の点に同時につぶす小収縮である。また、$\mathbb{P}^1$ 束 $\beta|_F : F \to S'$ のファイバーを f と書けば、$\mathbb{R}^+[f]$ も $\overline{\mathrm{NE}}(\widetilde{X})$ における端射線である。

したがって、Y, S, C の取り方いかんによらず、上記の構成法で得られた $\widetilde{X}$ は少なくともふたつの $K_{\widetilde{X}}$-負な端射線 $\mathbb{R}^+[e_1]$ と $\mathbb{R}^+[f]$ を持つことに注意

する。また、次の交点数の表を得る：

	$\widetilde{E}$	F
$\widetilde{e_i}$	-1	1
f	0	-1

（証明）まず、

$$\widetilde{E}\cdot\widetilde{e_i}=\beta^*E\cdot\widetilde{e_i}=E\cdot e_i=-1$$

である。$\widetilde{E}\cdot f=0$ は f がブローダウン $\beta:\widetilde{X}\to X$ でつぶれることより明らか。また、

$$F\cdot\widetilde{e_i}=F|_{\widetilde{E_i}}\cdot\widetilde{e_i}=\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)\cdot(\mathrm{line})=1$$

である。$F\cdot f=-1$ は F がブローアップ $\beta:\widetilde{X}\to X$ の例外因子で、f が $\mathbb{P}^1$ 束 $\beta|_F:F\to S'$ のファイバーであることより明らか。（証明終）

3　具体例

まず、記号と仮定をまとめておく。

- Y：非特異 4 次元射影多様体
- C：Y の非特異既約曲線
- S：Y の非特異既約曲面
- S と C は k 個の点 $p_1,\cdots,p_k$ で重複度なしで交わると仮定
- $\pi:X\to Y$：曲線 C に沿ったブローアップ
- $E:=\mathrm{Exc}(\pi)$
- $E_i:=\pi^{-1}(p_i)$ $(i=1,\cdots k)$
- $S':=\pi_*^{-1}S$
- $\beta:\widetilde{X}\to X$：曲面 S' に沿ったブローアップ
- $F:=\mathrm{Exc}(\beta)$
- f：$\mathbb{P}^1$ 束 $\beta|_F:F\to S'$ のファイバー

- $\widetilde{E} := \beta^{-1}(E)$
- $\widetilde{E_i} := \beta_*^{-1}E_i \ (i = 1, \cdots k)$
- $\widetilde{e_i}$: $\widetilde{E_i} \simeq \mathbb{P}^2$ 内の直線 $(i = 1, \cdots k)$

以下では、$\widetilde{X}$ がファノになるような (Y, C, S) の例を与える。

3.1

$Y = \mathbb{P}^4$ とする。超平面 $G \simeq \mathbb{P}^3$ 内に、直線 C と平面 S を考える。ただし、C は S に含まれないとする。直線 C と交わり、G に含まれる直線 g を考える。$H := (\pi \circ \beta)^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(1)$、$\widetilde{G} := (\pi \circ \beta)_*^{-1}G$、$\widetilde{g} := (\pi \circ \beta)_*^{-1}g$ とおく。

主張 1. 交点数の表：

	H	$\widetilde{E}$	F
$\widetilde{g}$	1	1	1
$\widetilde{e_1}$	0	-1	1
f	0	0	-1

を得る。

（証明）まず、$H \cdot \widetilde{g} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(1) \cdot g = 1$ である。$\widetilde{E} \cdot \widetilde{g} = 1$ と $F \cdot \widetilde{g} = 1$ は直線 g が直線 C と平面 S のそれぞれに 1 点で交わることより従う。$\widetilde{e_1}$ と f はブローダウンの合成 $\pi \circ \beta : \widetilde{X} \to \mathbb{P}^4$ でつぶれるので、$H \cdot \widetilde{e_1} = H \cdot f = 0$ は明らか。残りの交点数については、第 2 節で説明した。（証明終）

主張 2. 因子 H、$H - \widetilde{E}$、$2H - \widetilde{E} - F$ はネフである。

（証明）$H = (\pi \circ \beta)^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(1)$ がネフなのは明らか。まず、$H - \widetilde{E}$ がネフであることを示す。直線 C を含み G とは異なる超平面 D を考える。$\sigma := D \cap S$ は $D \simeq \mathbb{P}^3$ 内の直線となる。$D' := \pi_*^{-1}D$、$\widetilde{D} := \beta_*^{-1}D'$ とおく。線形同値

$$\widetilde{D} \sim H - \widetilde{E}$$

を得る。したがって、$\widetilde{D}|_{\widetilde{D}}$ がネフであることを示せばよい。$\pi|_{D'} : D' \to D \simeq \mathbb{P}^3$ は直線 C に沿ったブローアップ、$\beta|_{\widetilde{D}} : \widetilde{D} \to D'$ は $\sigma' := D' \cap S' = (\pi|_{D'})_*^{-1}\sigma$ に沿ったブローアップである。非特異 3 次元多様体 $\widetilde{D}$ のネフ錐は

$$Nef(\widetilde{D}) = \mathbb{R}^+[H|_{\widetilde{D}}] + \mathbb{R}^+[(H - \widetilde{E})|_{\widetilde{D}}] + \mathbb{R}^+[(2H - \widetilde{E} - F)|_{\widetilde{D}}]$$

で与えられる（$\widetilde{D}$ はファノ多様体ではない)。特に、$\widetilde{D}|_{\widetilde{D}} \sim (H-\widetilde{E})|_{\widetilde{D}}$ がネフであることが分かるので、$\widetilde{D} \sim H-\widetilde{E}$ は $\widetilde{X}$ のネフ因子である。次に、$2H-\widetilde{E}-F$ がネフであることを示す。

$$2H-\widetilde{E}-F = H+(H-\widetilde{E}-F) \sim H+\widetilde{G}$$

なので、$(2H-\widetilde{E}-F)|_{\widetilde{G}}$ がネフであることを言えばよい。制限射

$$\varepsilon := (\pi\circ\beta)|_{\widetilde{G}} : \widetilde{G} \to G$$

は直線 $C \subset G \simeq \mathbb{P}^3$ に沿ったブローアップである。よって、$\widetilde{G}$ は 3 次元ファノ多様体（森・向井の分類表 [4] における、$B_2 = 2$ の $n°33$）であり、ネフ錐は

$$Nef(\widetilde{G}) = \mathbb{R}^+[\varepsilon^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) - \widetilde{E}|_{\widetilde{G}}] + \mathbb{R}^+[\varepsilon^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)]$$

で与えられる。一方、$H|_{\widetilde{G}} \sim F|_{\widetilde{G}} \sim \varepsilon^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)$ である。したがって、

$$(2H-\widetilde{E}-F)|_{\widetilde{G}} \sim \varepsilon^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) - \widetilde{E}|_{\widetilde{G}}$$

はネフである。(証明終)

上記の交点数の表を整理して、

	H	$H-\widetilde{E}$	$2H-\widetilde{E}-F$
$\widetilde{g}$	1	0	0
$\widetilde{e_1}$	0	1	0
f	0	0	1

を得る。よって、$\widetilde{X}$ のネフ錐と曲線の錐は

$$Nef(\widetilde{X}) = \mathbb{R}^+[H] + \mathbb{R}^+[H-\widetilde{E}] + \mathbb{R}^+[2H-\widetilde{E}-F]$$

$$\overline{\mathrm{NE}}(\widetilde{X}) = \mathbb{R}^+[\widetilde{g}] + \mathbb{R}^+[\widetilde{e_1}] + \mathbb{R}^+[f]$$

となる。ブローアップの合成 $\pi\circ\beta : \widetilde{X} \to \mathbb{P}^4$ の標準因子公式より、

$$-K_{\widetilde{X}} = 5H - 2\widetilde{E} - F$$

が分かる。これと上記の交点数の表より、$-K_{\widetilde{X}}\cdot\widetilde{g} = 2$、$-K_{\widetilde{X}}\cdot\widetilde{e_1} = 1$、$-K_{\widetilde{X}}\cdot f = 1$ を得る。したがって、クライマンの判定法より $-K_{\widetilde{X}}$ は豊富である。

端射線 $\mathbb{R}^+[\widetilde{g}]$ に付随する収縮射を $\mu : \widetilde{X} \to V$ とする。このとき、$V = \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)^{\oplus 2})$ である。また T を $\mathbb{P}^2$ 束 $V \to \mathbb{P}^2$ の切断で $N_{T/V} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$ となるものとし、B を $T \simeq \mathbb{P}^2$ 内の直線とすれば、μ は B に沿ったブローアップであり、$\widetilde{G}$ が例外因子である。

3.2

$Y = \mathbb{P}^4$ とし、P を超平面、S を $P \simeq \mathbb{P}^3$ 内の非特異 2 次曲面とする。$C \subset \mathbb{P}^4$ を S と交わり、P に含まれない直線とする。$S \cap C$ は 1 点よりなることに注意する。$H := (\pi \circ \beta)^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(1)$ とおく。点 $p_1 = S \cap C$ を通り、P に含まれる直線 m について、$\widetilde{m} := (\pi \circ \beta)_*^{-1} m$ とおく。

例 3.1 と同様の方針で、$H - \widetilde{E}$ と $2H - \widetilde{E} - F$ がネフであることが示される。また、交点数の表

	H	$\widetilde{E}$	F
$\widetilde{m}$	1	1	1
$\widetilde{e_1}$	0	-1	1
f	0	0	-1

	H	$H - \widetilde{E}$	$2H - \widetilde{E} - F$
$\widetilde{m}$	1	0	0
$\widetilde{e_1}$	0	1	0
f	0	0	1

を得る。よって、$\widetilde{X}$ のネフ錐と曲線の錐は

$$Nef(\widetilde{X}) = \mathbb{R}^+[H] + \mathbb{R}^+[H - \widetilde{E}] + \mathbb{R}^+[2H - \widetilde{E} - F]$$

$$\overline{\mathrm{NE}}(\widetilde{X}) = \mathbb{R}^+[\widetilde{m}] + \mathbb{R}^+[\widetilde{e_1}] + \mathbb{R}^+[f]$$

となる。例 3.1 と同様に計算して、$-K_{\widetilde{X}} \cdot \widetilde{m} = 2$、$-K_{\widetilde{X}} \cdot \widetilde{e_1} = 1$、$-K_{\widetilde{X}} \cdot f = 1$ を得る。クライマンの判定法より $-K_{\widetilde{X}}$ は豊富である。端射線 $\mathbb{R}^+[\widetilde{m}]$ は因子 $\widetilde{P} := (\pi \circ \beta)_*^{-1} P$ を $\mathbb{P}^2$ につぶす収縮射を定める。

3.3

$Y = \mathbb{P}^4$ とし、P を超平面とする。S を $P \simeq \mathbb{P}^3$ 内の非特異 2 次曲面とする。$C \subset \mathbb{P}^4$ を S と 2 点で交わる直線とする。$C \subset P$ となることに注意する。g を $P \simeq \mathbb{P}^3$ 内の直線で C と交わるものとする。$\widetilde{g} := (\pi \circ \beta)_*^{-1} g$ とおく。また $H := (\pi \circ \beta)^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(1)$ とおく。例 3.1 と同様にして、H、$H - \widetilde{E}$、$3H - \widetilde{E} - F$ がネフ因子であることが示せる。交点数の表

	H	$H - \widetilde{E}$	$3H - \widetilde{E} - F$
$\widetilde{g}$	1	0	0
$\widetilde{e_1}$	0	1	0
f	0	0	1

より、

$$Nef(\widetilde{X}) = \mathbb{R}^+[H] + \mathbb{R}^+[H - \widetilde{E}] + \mathbb{R}^+[3H - \widetilde{E} - F]$$

$$\overline{\mathrm{NE}}(\widetilde{X}) = \mathbb{R}^+[\widetilde{g}] + \mathbb{R}^+[\widetilde{e_1}] + \mathbb{R}^+[f]$$

を得る。標準因子公式と交点数の表より、

$$-K_{\widetilde{X}} \cdot \widetilde{g} = -K_{\widetilde{X}} \cdot \widetilde{e_1} = -K_{\widetilde{X}} \cdot f = 1$$

となり、$-K_{\widetilde{X}}$ は豊富である。端射線 $\mathbb{R}^+[\widetilde{e_1}]$ の定める収縮射は小収縮であるが、S と C は 2 点で交わるので、例外集合はふたつの既約成分 $\widetilde{E_1}$ と $\widetilde{E_2}$ よりなることに注意する。また、端射線 $\mathbb{R}^+[\widetilde{g}]$ は因子 $\widetilde{P} := (\pi \circ \beta)_*^{-1} P$ を $\mathbb{P}^1$ につぶす収縮射を定める。

3.4

$\mathbb{P}^4$ 内に相異なるふたつの平面 T と M、さらに T とは交わらず、M と 1 点で交わる直線 B を考える。また m を T, M, B のすべてに交わる直線とする。$\alpha : Y \to \mathbb{P}^4$ を $T \simeq \mathbb{P}^2$ に沿ったブローアップとし、$S := \alpha_*^{-1} M$、$C := \alpha^{-1}(B)$ とおく。$G := \mathrm{Exc}(\alpha)$ とし、g を $\mathbb{P}^1$ 束 $\alpha|_G : G \to T$ のファイバーとする。さらに、G と g の $\widetilde{X}$ における狭義変換を、それぞれ $\widetilde{G}$ と $\widetilde{g}$ で表す。また、$\ell := \alpha_*^{-1} m$ とし、$\widetilde{\ell} := (\pi \circ \beta)_*^{-1} \ell$ とする。$H := (\alpha \circ \pi \circ \beta)^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(1)$ とおけば、次の交点数の表を得る：

	H	$\widetilde{G}$	$\widetilde{E}$	F
$\widetilde{\ell}$	1	1	1	1
$\widetilde{g}$	0	-1	0	0
$\widetilde{e_1}$	0	0	-1	1
f	0	0	0	-1

主張 3. 因子 H、$H - \widetilde{E}$、$H - \widetilde{G}$、$2H - \widetilde{E} - F$ はネフである。

（証明）$2H - \widetilde{E} - F$ がネフであることを示す（その他については例 3.1 と同様）。$\mathbb{P}^4$ の超平面で B と M を含むものを D とおき、$\widetilde{X}$ における狭義変換を $\widetilde{D}$ とする。ブローアップの合成 $\gamma := (\alpha \circ \pi \circ \beta) : \widetilde{X} \to \mathbb{P}^4$ の制限射

$$\gamma|_{\widetilde{D}} : \widetilde{D} \to D \simeq \mathbb{P}^3$$

は 2 本の直線 $A := T \cap D$ と B に沿ったブローアップである（例外因子は $\widetilde{G}|_{\widetilde{D}}$ と $\widetilde{E}|_{\widetilde{D}}$）。したがって、$\widetilde{D}$ は 3 次元ファノ多様体であり（森・向井の分類表 [4] における $B_2 = 3$ の $n°25$）、$H|_{\widetilde{D}} \sim (\gamma|_{\widetilde{D}})^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)$ となるので、ネフ錐は

$$Nef(\widetilde{D}) = \mathbb{R}^+[H|_{\widetilde{D}}] + \mathbb{R}^+[(H - \widetilde{G})|_{\widetilde{D}}] + \mathbb{R}^+[(H - \widetilde{E})|_{\widetilde{D}}]$$

で与えられる。よって、$(2H-\widetilde{E}-F)|_{\widetilde{D}} \sim (H-\widetilde{E})|_{\widetilde{D}}$ はネフである（$F|_{\widetilde{D}} \sim H|_{\widetilde{D}}$ に注意）。したがって、$2H-\widetilde{E}-F \sim H+\widetilde{D}$ は $\widetilde{X}$ のネフ因子である。（証明終）

上記の交点数の表を整理して、

	H	$H-\widetilde{G}$	$H-\widetilde{E}$	$2H-\widetilde{E}-F$
$\widetilde{\ell}$	1	0	0	0
$\widetilde{g}$	0	1	0	0
$\widetilde{e_1}$	0	0	1	0
f	0	0	0	1

を得る。したがって、

$$Nef(\widetilde{X}) = \mathbb{R}^+[H] + \mathbb{R}^+[H-\widetilde{G}] + \mathbb{R}^+[H-\widetilde{E}] + \mathbb{R}^+[2H-\widetilde{E}-F]$$

$$\overline{\mathrm{NE}}(\widetilde{X}) = \mathbb{R}^+[\widetilde{\ell}] + \mathbb{R}^+[\widetilde{g}] + \mathbb{R}^+[\widetilde{e_1}] + \mathbb{R}^+[f]$$

を得る。ブローアップの標準因子公式より

$$-K_{\widetilde{X}} = 5H - \widetilde{G} - 2\widetilde{E} - F$$

となる。交点数の表より、

$$-K_{\widetilde{X}} \cdot \widetilde{\ell} = -K_{\widetilde{X}} \cdot \widetilde{g} = -K_{\widetilde{X}} \cdot \widetilde{e_1} = -K_{\widetilde{X}} \cdot f = 1$$

を得る。したがって、クライマンの判定法により $-K_{\widetilde{X}}$ は豊富である。

4　部分的な結果と問題

記号は第 3 節の冒頭と同様とする。

命題 1. $\widetilde{X}$ がファノで X がファノでないとき、$k \leq 1$ である。

（証明）曲面 S' に沿ったブローアップ $\beta : \widetilde{X} \to X$ において、$\widetilde{X}$ がファノ、X がファノでないという状況なので、[7]（Proposition 3.6）より、S' は $\mathbb{P}^2$ または曲線上の $\mathbb{P}^1$束 に同型である。第 2 節で注意したように、$\pi|_{S'} : S' \to S$ は k 点でのブローアップなので、S' は $k \geq 1$ 本の (-1) 曲線を含む。よって、$S' \simeq \mathbb{P}^2$ はありえない。したがって、S' は $\mathbb{P}^1$ 束の構造を持つ。$\mathbb{P}^1$ 束は高々 1 本しか (-1) 曲線を含まないので、$k \leq 1$ を得る。（証明終）

問題：実際に、$\widetilde{X}$ がファノで X がファノでない (Y,C,S) の例があるか？（命題1の証明からわかるように、このとき、$S' \simeq \Sigma_1$ であり、$\pi|_{S'}: S' \to S \simeq \mathbb{P}^2$ は1点ブローアップである。）

以下、X はファノであるとする。仮定より、X は4次元射影多様体 Y を曲線 C に沿ってブローアップしたものなので、[1] Lemme 2.1 の証明と同様に、$\overline{\mathrm{NE}}(X)$ 端射線 R で $E\cdot R>0$ となるものが存在することが示される。端射線 R の長さ（length of extremal ray）は

$$\ell(R) := \min\{-K_X\cdot\Gamma \mid [\Gamma]\in R \text{ かつ } \Gamma \text{ は有理曲線}\}$$

で定義されることを思い出す。

さて、[6] Proposition 3, 4 において $n=4$ とすると次を得る。

命題 2. $\ell(R)\geq 2$ のとき、(Y,C) は次のいずれかである（ただし、Q_4 は $\mathbb{P}^5$ 内の非特異2次超曲面を表すとする）：

1. $Y=\mathbb{P}^4$、C は直線
2. $Y=Q_4$、C は2次曲線（ただし $C\subset P\subset Q_4$ となる射影平面 $P\subset\mathbb{P}^5$ は存在しないとする）
3. $Y=Q_4$、C は直線
4. $Y=\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^3$、$C$ は射影 $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^3\to\mathbb{P}^3$ のファイバー
5. Y は $\mathbb{P}^4$ の $\mathbb{P}^2$ に沿ったブローアップ、C は中心と交わらない直線の逆像
6. Y は $\mathbb{P}^4$ の $\mathbb{P}^2$ に沿ったブローアップ、C は例外因子のファイバー
7. $Y=\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)^{\oplus 3})$ であり、C は $\mathbb{P}^3$ 束 $Y\to\mathbb{P}^1$ の切断で $N_{C/Y}\simeq\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)^{\oplus 3}$ となるもの。

以上の (Y,C) について、$\widetilde{X}$ がファノになる曲面 S の分類をするのが望ましいが、まだ完成していない。また、X がファノで $\ell(R)=1$ かつ $\widetilde{X}$ がファノとなる (Y,C,S) の例があるかどうかも分かっていない。以下では、部分的な結果をいくつか述べたい。

命題 3. $Y=\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^3$、$C$ は射影 $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^3\to\mathbb{P}^3$ のファイバーとする。このとき $\widetilde{X}$ がファノならば、$k\leq 1$ である。

（証明）仮に $k \geq 2$ とし、p_1, p_2 を $S \cap C$ の相異なる 2 点とする。射影 $pr_Y : Y \to \mathbb{P}^3$ を考え、$a := pr_Y(C)$ とおく。次の可換図式が存在する：

$$\begin{array}{ccc} X = \mathbb{P}^1 \times \mathrm{Bl}_a(\mathbb{P}^3) & \xrightarrow{pr_X} & \mathrm{Bl}_a(\mathbb{P}^3) \\ {\scriptstyle \pi}\downarrow & & \downarrow \text{点}\, a\, \text{でブローアップ} \\ Y = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3 & \xrightarrow[pr_Y]{} & \mathbb{P}^3 \end{array}$$

第 2 節と同様、$i = 1, 2$ に対して、$e_{i0} := \pi^{-1}(p_i) \cap S'$ とおく。射影

$$pr_E : E \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$$

を考える。$pr_E(e_{10})$ と $pr_E(e_{20})$ は $\mathbb{P}^2$ 内の直線である。$p_0 \in pr_E(e_{10}) \cap pr_E(e_{20})$ とし、$C_0 := pr_E^{-1}(p_0)$ とおく。曲線 C_0 は射影

$$X = \mathbb{P}^1 \times \mathrm{Bl}_a(\mathbb{P}^3) \to \mathrm{Bl}_a(\mathbb{P}^3)$$

のファイバーなので、$K_X \cdot C_0 = -2$ である。$\widetilde{C_0} := \beta_*^{-1} C_0$ とおく。$C_0 \cap e_{10} \neq \emptyset$ かつ $C_0 \cap e_{20} \neq \emptyset$ なので、C_0 と曲面 S' は少なくとも 2 点で交わる。よって、$F \cdot \widetilde{C_0} \geq 2$ である。したがって、

$$K_{\widetilde{X}} \cdot \widetilde{C_0} = K_X \cdot C_0 + F \cdot \widetilde{C_0} \geq -2 + 2 = 0$$

となり、$-K_{\widetilde{X}}$ は豊富でない。（証明終）

命題 4. $Y = \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)^{\oplus 3})$、$C$ は $\mathbb{P}^3$ 束 $Y \to \mathbb{P}^1$ の切断で、$N_{C/Y} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)^{\oplus 3}$ となるものとする。このとき $\widetilde{X}$ はファノでない。

（証明）まず、$N_{C/Y} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)^{\oplus 3}$ より $E \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ であることに注意する。射影 $pr_E : E \to \mathbb{P}^2$ のファイバーで S' と交わるものを C_0 とする。このとき $\widetilde{C_0} := \beta_*^{-1} C_0$ とおけば、

$$K_{\widetilde{X}} \cdot \widetilde{C_0} = K_X \cdot C_0 + F \cdot \widetilde{C_0} \geq -1 + 1 = 0$$

となり、$-K_{\widetilde{X}}$ は豊富でない。（証明終）

命題 5. Y は $\mathbb{P}^4$ の $\mathbb{P}^2$ に沿ったブローアップ、C は例外因子のファイバーとする。このとき $\widetilde{X}$ はファノでない。

（証明）やや煩雑なので概略を示す。ブローアップ $Y \to \mathbb{P}^4$ の例外因子を G とおく。曲線 C は射影 $pr_G : G \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ のファイバーである。$a := pr_G(C)$ とおき、$g : T \to \mathbb{P}^2$ を点 a でのブローアップとする。$G' := \pi_*^{-1}G$ とおくと、次の可換図式が存在する：

$$\begin{tikzcd} G' \simeq \mathbb{P}^1 \times T \arrow[r, "pr_{G'}"] \arrow[d, "\pi|_{G'}"'] & T \arrow[d, "g"] \\ G \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \arrow[r, "pr_G"'] & \mathbb{P}^2 \end{tikzcd}$$

例外曲線 $g^{-1}(a) \subset T$ 上の点 b をうまくとれば、曲線 $C_b := pr_{G'}^{-1}(b)$ は S' と交わる。さらに、$C_b \not\subset S'$ となる。したがって、$\widetilde{C_b} := \beta_*^{-1}C_b$ とおけば、命題4の証明と同様、$K_{\widetilde{X}} \cdot \widetilde{C_b} \geq 0$ となり、$\widetilde{X}$ はファノでない。（証明終）

謝辞：本研究は JSPS 科研費 23740028 の助成を受けたものです。

参考文献

[1] L. Bonavero, F. Campana, J. A. Wiśniewski, Variétés complexes dont l'éclatée en un point est de Fano. C. R. Math. Acad. Sci. Paris Ser. I 334 (2002), 463–468

[2] C. Casagrande, Numerical invariants of Fano 4-folds. Mathematische Nachrichten Volume 286 (2013), 1107–1113

[3] Y. Kawamata, Small contractions of four-dimensional algebraic manifolds. Math. Ann. 284 (1989), 595–600

[4] S. Mori and S. Mukai, Classification of Fano 3-folds with $B_2 \geq 2$, Manuscripta Math. 36 (1981/82), 147–162 Erratum: Manuscripta Math. 110 (2003), 407

[5] H. Takagi, Fano 多様体の諸問題 数理解析研究所講究録 No.1731 (2011), 106–126

[6] T. Tsukioka, On the minimal length of extremal rays for Fano four-folds. Math. Z. 271 (2012), 555–564

[7] J. A. Wiśniewski, On contractions of extremal rays of Fano manifolds. J. Reine Angew. Math. 417 (1991), 141–157