数理解析研究所講究録
第 1902 巻 2014 年 1-20

Phase space Feynman path integrals as analysis on path space

工学院大学基礎・教養部門　熊ノ郷 直人 *
Naoto Kumano-go
Liberal Arts, Kogauin University

概要

この概説では, RIMS での講演に従って, 区分的定数経路による相空間経路積分の理論の論文 [12] に, 区分的定数経路による相空間経路積分の論文 [16] と偏微分方程式の基本解の計算例 [13] を交えて解説する.

§1. 相空間経路積分とは

時間の変数 $T>0$, 空間の変数 $x\in\mathbf{R}^d$, Planck パラメータを $0<\hbar<1$ とし, Schrödinger 方程式の基本解の作用素を $U(T,0)$ とする. つまり

$$\left(i\hbar\partial_T-H(T,x,\frac{\hbar}{i}\partial_x)\right)U(T,0)=0\,,\quad U(0,0)=I\,, \tag{1.1}$$

とする. $x_0\in\mathbf{R}^d$ に関する Fourier 変換と $\xi_0\in\mathbf{R}^d$ に関する逆 Fourier 変換で

$$Iv(x)\equiv v(x)=\left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^d\int_{\mathbf{R}^{2d}}e^{\frac{i}{\hbar}(x-x_0)\cdot\xi_0}v(x_0)dx_0d\xi_0\,,$$
$$\frac{\hbar}{i}\partial_x v(x)=\left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^d\int_{\mathbf{R}^{2d}}e^{\frac{i}{\hbar}(x-x_0)\cdot\xi_0}\xi_0 v(x_0)dx_0d\xi_0\,,$$

と書けるので, Hamilton 作用素は

$$H(T,x,\frac{\hbar}{i}\partial_x)v(x)=\left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^d\int_{\mathbf{R}^{2d}}e^{\frac{i}{\hbar}(x-x_0)\cdot\xi_0}H(T,x,\xi_0)v(x_0)dx_0d\xi_0\,,$$

2010 Mathematics Subject Classification(s): Primary 81S40; Secondary 35S30.
キーワード: Path integrals, Fourier integral operators
Supported by JSPS KAKENHI(C)24540193.
*〒 192-0015 東京都八王子市中野町 2665-1 工学院大学 基礎・教養教育部門 熊ノ郷直人

と書ける. T が小さいとき,

$$U(T,0)v(x)=\left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^{d}\int_{\mathbf{R}^{2d}}e^{\frac{i}{\hbar}(x-x_0)\cdot\xi_0}U(T,0,x,\xi_0)v(x_0)dx_0d\xi_0\,, \tag{1.2}$$

を満たす関数 $U(T,0,x,\xi_0)$ を考える. $U(T,0)$ の近似として,

$$I(T,0)v(x)\equiv\left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^{d}\int_{\mathbf{R}^{2d}}e^{\frac{i}{\hbar}(x-x_0)\cdot\xi_0}e^{-\frac{i}{\hbar}\int_0^T H(t,x,\xi_0)dt}v(x_0)dx_0d\xi_0\,,$$

で定義される作用素 $I(T,0)$ を用いる. 区間 $[0,T]$ の任意の分割を

$$\Delta_{T,0}:T=T_{J+1}>T_J>\cdots>T_1>T_0=0\,,$$

とする. $U(T,0)$ は基本解なので

$$U(T,0)v(x)=U(T,T_J)U(T_J,T_{J-1})\cdots U(T_2,T_1)U(T_1,0)v(x)\,,$$

と書ける. $t_j=T_j-T_{j-1}$ とし分割の幅を $|\Delta_{T,0}|=\max_{1\le j\le J+1}t_j$ とおく. $|\Delta_{T,0}|\to 0$ のとき, 適当な条件下では, 形式的に $U(T_j,T_{j-1})$ の近似として $I(T_j,T_{j-1})$ を用いて,

$$\begin{aligned}U(T,0)v(x)&=\lim_{|\Delta_{T,0}|\to 0}I(T,T_J)I(T_J,T_{J-1})\cdots I(T_2,T_1)I(T_1,0)v(x)\\&=\lim_{|\Delta_{T,0}|\to 0}\left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^{d(J+1)}\int_{\mathbf{R}^{2d(J+1)}}e^{\frac{i}{\hbar}\sum_{j=1}^{J+1}((x_j-x_{j-1})\cdot\xi_{j-1}-\int_{T_{j-1}}^{T_j}H(t,x_j,\xi_{j-1})dt)}\\&\qquad\times v(x_0)\prod_{j=0}^{J}dx_jd\xi_j\,,\end{aligned}\tag{1.3}$$

と書ける. ただし $x=x_{J+1}$ とする. (1.2) と (1.3) を比較すると, 形式的には

$$\begin{aligned}&e^{\frac{i}{\hbar}(x-x_0)\cdot\xi_0}U(T,0,x,\xi_0)\\&=\lim_{|\Delta_{T,0}|\to 0}\left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^{dJ}\int_{\mathbf{R}^{2dJ}}e^{\frac{i}{\hbar}\sum_{j=1}^{J+1}((x_j-x_{j-1})\cdot\xi_{j-1}-\int_{T_{j-1}}^{T_j}H(t,x_j,\xi_{j-1})dt)}\prod_{j=1}^{J}dx_jd\xi_j\,,\end{aligned}\tag{1.4}$$

と書ける. R. P. Feynman [6, Appendix B] に従って, $q(T_j)=x_j$ となる位置経路 $q(t)$ と $p(T_j)=\xi_j$ となる運動量経路 $p(t)$ (例えば図 1) を用いて大雑把に解釈すると, (1.4) は

$$e^{\frac{i}{\hbar}(x-x_0)\cdot\xi_0}U(T,0,x,\xi_0)=\int e^{\frac{i}{\hbar}\phi[q,p]}\mathcal{D}[q,p]\,, \tag{1.5}$$

と書ける. ここで $\phi[q,p]$ は

$$\phi[q,p]=\int_{[0,T)}p(t)\cdot dq(t)-\int_{[0,T)}H(t,q(t),p(t))dt\,,$$

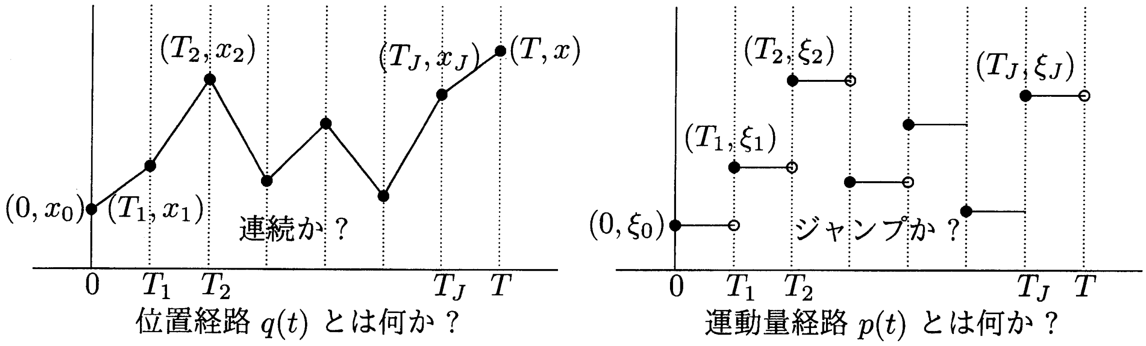


図 1.

で定義される相空間経路 (q,p) の作用であり, 相空間経路積分 $\int \sim \mathcal{D}[q,p]$ は "$q(0)=x_0$, $q(T)=x$, $p(0)=\xi_0$ となる, すべての相空間経路 (q,p) に関する和" である. 表現 (1.4) や表現 (1.3) は相空間経路積分 (1.5) の時間分割近似法と呼ばれている.

注意 1.1. (1.4) から (1.5) への解釈については様々なアプローチがあるため, ここでは大雑把なイメージとして説明する: $x_1, \xi_1, \ldots, x_J, \xi_J$ が $\mathbf{R}^d$ 上を動くので, (1.4) の有限次元積分を, 例えば図 1 のような $\Delta_{T,0}$ を分割とする区分的に線分となる相空間経路に関する和と解釈し, (1.4) の $|\Delta_{T,0}| \to 0$ のときの有限次元積分をすべての相空間経路に関する和と解釈する. 特に, $|\Delta_{T,0}| \to 0$ とする有限次元積分における指数部分の

$$\sum_{j=1}^{J+1}((x_j - x_{j-1})\cdot\xi_{j-1} - \int_{T_{j-1}}^{T_j} H(t, x_j, \xi_{j-1})dt)$$

は, 相空間の作用

$$\phi[q,p] = \int_{[0,T)} p(t)\cdot dq(t) - \int_{[0,T)} H(t, q(t), p(t))dt,$$

と対応する. 著者の解釈については注意 2.5 を見て欲しい.

注意 1.2. (1.5) のように Schrödinger 方程式の解を表現する相空間経路積分の数学的定式化には様々なアプローチがある. 例えば I. Daubechies-J. R. Klauder [5] は測度の解析接続, S. Albeverio-G. Guatteri-S. Mazzucchi [2] (あるいは [1, §10.5.3], [17, §3.3]) は Fresnel 積分変換, O. G. Smolyanov-A. G. Tokarev-A. Truman [19] は Chernoff の公式, W. Bock-M. Grothaus [3] は white noise 解析を用いて定式化している. (1.4) のような時間分割近似法 の (広義) 一様収束については, H. Kumano-go-H. Kitada [9], N. Kumano-go [11], W. Ichinose [8] が Fourier 積分作用素の理論を用いて調べている.

しかしながら, 数学的意味において相空間経路積分 (1.5) の測度 $\mathcal{D}[q,p]$ は存在しない. なぜ (1.5) を積分と言えるのか？ 収束 (1.3) が作用素の意味では位置 x_0 と運動量 ξ_0 を

区別できないように思える．また物理的意味においても不確定原理によれば, 位置 $q(t)$ と運動量 $p(t)$ を同時刻 t に測定できない．なぜ (q,p) を相空間経路と言えるのか？ さらに L. S. Schulman [18] は 'in this method, formal tricks of great power can give just plain wrong answer'（相空間経路積分では形式的な演算で間違った答を与えることできる）と指摘している．

さて著者は論文 [12] で, 区分的定数経路を用いて, 一般的な汎関数 $F[q,p]$ を振幅とする相空間経路積分

$$\int e^{\frac{i}{\hbar}\phi[q,p]}F[q,p]\mathcal{D}[q,p]\,, \tag{1.6}$$

の存在を証明した．より正確に言えば, 任意の汎関数 $F[q,p]\in\mathcal{F}_{\mathcal{Q}}\cup\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$ に対し, 相空間経路積分 (1.6) の時間分割近似法が位置経路の終点 x と運動量経路の始点 ξ_0 に関して広義一様収束する 2 つの一般的な汎関数のクラス $\mathcal{F}_{\mathcal{Q}}$, $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$ を与えた．さらに, その相空間経路積分 (1.6) で, 積分の性質に類似した性質を証明した．

注意 1.3. 我々は Schrödinger 方程式の基本解となる相空間経路積分 (1.5) を, 相空間経路積分 (1.6) の $F[q,p]\equiv 1$ の場合とする．相空間経路積分に関する上記の疑問に対する著者なりの答は「一般の汎関数 $F[q.p]$ に関して定義できて（時間分割近似法が収束して）, 積分に類似した性質を持つので, 積分と言って良いだろう」「位置経路の終点と運動量経路の始点に関して収束するので, 相空間経路と言って良いだろう」である．

注意 1.4. 位置の折れ線経路と運動量の区分的定数経路を用いて, W. Ichinose [8] は汎関数 $F[q,p]=q(t)\cdot p(t)$ に対して (1.6) の時間分割近似法が収束しないことを示した．不確定性原理を避けるため, 我々は, この汎関数を 2 つのクラス $\mathcal{F}_{\mathcal{Q}}$, $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$ から排除しているので, 時間分割近似法が収束する．

この概説では, RIMS での講演に従って, 区分的定数経路による相空間経路積分の理論の論文 [12] に, 区分的定数経路による相空間経路積分の論文 [16] と偏微分方程式の基本解の計算例 [13] を交えて解説する．

注意 1.5. この概説は, 講演に従った解説のため [14][15] と内容が重複する点がある．

§2. 相空間経路積分の存在

(1.1) の Hamilton 関数 $H(t,x,\xi)$ の仮定は以下とする．

仮定 1 (Hamilton 関数)**.** $(t,x,\xi)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d$ の実数値関数 $H(t,x,\xi)$ は, 任意の多重指数 α, β に対して, $\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta H(t,x,\xi)$ が連続で, ある正の定数 $C_{\alpha,\beta}$ が存在して

$$|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta H(t,x,\xi)|\le C_{\alpha,\beta}(1+|x|+|\xi|)^{\max(2-|\alpha+\beta|,0)}\,,$$

を満たすとする.

(1.1) の Hamilton 作用素 $H(t,x,\frac{\hbar}{i}\partial_x)$ の典型的な例は以下である.

例 2.1 (Hamilton 作用素).

$$H(t,x,\frac{\hbar}{i}\partial_x)=\sum_{j,k=1}^{d}\left(a_{j,k}(t)\frac{\hbar}{i}\partial_{x_j}\frac{\hbar}{i}\partial_{x_k}+b_{j,k}(t)x_j\frac{\hbar}{i}\partial_{x_k}+c_{j,k}(t)x_jx_k\right)$$
$$+\sum_{j=1}^{d}\left(a_j(t)\frac{\hbar}{i}\partial_{x_j}+b_j(t)x_j\right)+c(t,x)\,.$$

ただし $a_{j,k}(t)$, $b_{j,k}(t)$, $c_{j,k}(t)$, $a_j(t)$, $b_j(t)$ と任意の多重指数 α に対して $\partial_x^\alpha c(t,x)$ は連続で有界な実数値関数とする.

時間分割近似法における経路の解釈は本や論文によって異なるようである. このため, この概説における区分的定数経路による時間分割近似法を厳密に定義することから始める.

$\Delta_{T,0}=(T_{J+1},T_J,\dots,T_1,T_0)$ を区間 $[0,T]$ の任意の分割する.

$$\Delta_{T,0}:T=T_{J+1}>T_J>\cdots>T_1>T_0=0\,. \tag{2.1}$$

$x_{J+1}=x$ とおき $x_j\in\mathbf{R}^d$, $\xi_j\in\mathbf{R}^d$, $j=1,2,\dots,J$ とする. 左連続で区分的に定数となる位置経路

$$q_{\Delta_{T,0}}=q_{\Delta_{T,0}}(t,x_{J+1},x_J,\dots,x_1,x_0)$$

を $q_{\Delta_{T,0}}(0)=x_0$, $q_{\Delta_{T,0}}(t)=x_j$, $T_{j-1}<t\le T_j$ で定義し, 右連続で区分的に定数となる運動量経路

$$p_{\Delta_{T,0}}=p_{\Delta_{T,0}}(t,\xi_J,\dots,\xi_1,\xi_0)$$

を $p_{\Delta_{T,0}}(t)=\xi_{j-1}$, $T_{j-1}\le t<T_j$ で定義する (図 2 参照).

注意 2.2. 左連続な位置経路と右連続な運動量経路を取る我々のアプローチは J.-C. Zambrini[4, Part 2] の前方 (forward) と後方 (backward) の Hamilton-Jacobi 方程式のアプローチからインスピレーションを得た.

定義 1 (区分的定数経路の空間 $\mathcal{Q}$, $\mathcal{P}$).

(1) q が左連続な区分的定数経路, つまり $q=q_{\Delta_{T,0}}$ のとき, $q\in\mathcal{Q}$ とする.

(2) p が右連続な区分的定数経路, つまり $p=p_{\Delta_{T,0}}$ のとき, $p\in\mathcal{P}$ とする.

定義 2.3 (汎関数 $F[q,p]$ の 2 つのクラス $\mathcal{F}_\mathcal{Q}$, $\mathcal{F}_\mathcal{P}$).
$F[q,p]$ は $q\in\mathcal{Q}$ と $p\in\mathcal{P}$ の汎関数とする.

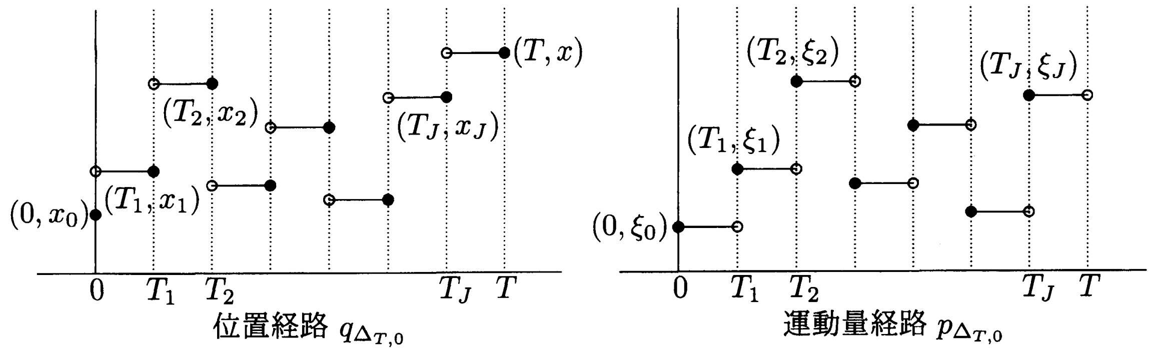


図 2.

(1) $F[q,p]$ が §13 の仮定 3 (1) を満たすとき, $F[q,p]\in\mathcal{F}_{\mathcal{Q}}$ とする.

(2) $F[q,p]$ が §13 の仮定 3 (2) を満たすとき, $F[q,p]\in\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$ とする.

注意 2.4. 簡明さのため, 仮定 3 (1)(2) は最後の節 §13 で述べる.

汎関数 $\phi[q_{\Delta_{T,0}},p_{\Delta_{T,0}}]$, $F[q_{\Delta_{T,0}},p_{\Delta_{T,0}}]$ は, 有限個の変数 x_{J+1}, ξ_J, x_J, $\ldots$, ξ_0, x_0 の関数となるので $\phi_{\Delta_{T,0}}$, $F_{\Delta_{T,0}}$ と書く.

$$
\begin{aligned}
\phi[q_{\Delta_{T,0}},p_{\Delta_{T,0}}] &= \sum_{j=1}^{J+1}\left(\int_{[T_{j-1},T_j)} p_{\Delta_{T,0}}\cdot dq_{\Delta_{T,0}}(t) - \int_{[T_{j-1},T_j)} H(t,q_{\Delta_{T,0}},p_{\Delta_{T,0}})dt\right)\\
&= \sum_{j=1}^{J+1}\left((x_j-x_{j-1})\cdot\xi_{j-1} - \int_{[T_{j-1},T_j)} H(t,x_j,\xi_{j-1})dt\right)\\
&\equiv \phi_{\Delta_{T,0}}(x_{J+1},\xi_J,x_J,\ldots,\xi_1,x_1,\xi_0,x_0)\,,\\
F[q_{\Delta_{T,0}},p_{\Delta_{T,0}}] &\equiv F_{\Delta_{T,0}}(x_{J+1},\xi_J,x_J,\ldots,\xi_1,x_1,\xi_0,x_0)\,.
\end{aligned}
$$

$t_j=T_j-T_{j-1}$ とおき, 分割の幅を $|\Delta_{T,0}|=\max_{1\le j\le J+1}t_j$ とする.

定理 1 (相空間経路積分の存在). T は十分小さいとする. このとき, 任意の汎関数 $F[q,p]\in\mathcal{F}_{\mathcal{Q}}\cup\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$ に対し,

$$
\begin{aligned}
(2.2)\qquad &\int e^{\frac{i}{\hbar}\phi[q,p]}F[q,p]\mathcal{D}[q,p]\\
&\equiv \lim_{|\Delta_{T,0}|\to 0}\left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^{dJ}\int_{\mathbf{R}^{2dJ}} e^{\frac{i}{\hbar}\phi[q_{\Delta_{T,0}},p_{\Delta_{T,0}}]}F[q_{\Delta_{T,0}},p_{\Delta_{T,0}}]\prod_{j=1}^{J}dx_jd\xi_j\,,
\end{aligned}
$$

は $(x,\xi_0,x_0)\in\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d$ に関し, 広義一様収束する. つまり相空間経路積分 (2.2) は well-defined である.

注意 2.5. 荒く言えば, (2.2) において $x_1, \xi_1, \ldots, x_J, \xi_J$ は $\mathbf{R}^d$ 上を動くため, 有限次元積分は分割 $\Delta_{T,0}$ をもつ区分的定数経路に関する和と解釈でき, $|\Delta_{T,0}| \to 0$ とすれば, すべての区分的定数経路に関する和（経路積分）と解釈できるであろう.

注意 2.6. $F[q,p] \equiv 1$ のとき（Schrödinger 方程式の解のとき）でさえ, (2.2) の右辺

$$\lim_{|\Delta_{T,0}|\to 0} \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^{dJ} \int_{\mathbf{R}^{2dJ}} e^{\frac{i}{\hbar}\sum_{j=1}^{J+1}((x_j-x_{j-1})\cdot\xi_{j-1}-\int_{T_{j-1}}^{T_j} H(t,x_j,\xi_{j-1})dt)} \prod_{j=1}^{J} dx_j d\xi_j \,, \tag{2.3}$$

の各積分は絶対収束しない. つまり $\int_{\mathbf{R}^{2d}} d\xi_j dx_j = \infty$ である. さらに, 積分 (分割点) の個数 J は ∞ になる. つまり絶対値を取ると $\infty \times \infty \times \infty \times \infty \times \cdots\cdots$, $J \to \infty$ となる. このため, 我々は (2.2) の多重積分を振動積分 (H. Kumano-go [10, §1.6] 参照) として扱い, 多重積分の中で経路の形 $q_{\Delta_{T,0}}$, $p_{\Delta_{T,0}}$ を用いる.

注意 2.7. $d=1$, $H(t,x,\xi)=x^2/2+\xi^2/2$, $F[q,p]\equiv 1$ のとき, 基本解は

$$\begin{aligned} e^{\frac{i}{\hbar}(x-x_0)\cdot\xi_0}U(T,0,x,\xi_0) &= \int e^{\frac{i}{\hbar}\phi[q,p]}\mathcal{D}[q,p] \\ &= \frac{1}{(\cos T)^{1/2}} \exp\frac{i}{\hbar}\Big(-x_0\cdot\xi_0 + \frac{2x\cdot\xi_0-(x^2+\xi_0^2)\sin T}{2\cos T}\Big), \end{aligned}$$

となる. この例は関数の収束を扱うには T が小さい（$T<\pi/2$）ことが必要であることも示している. §12 で見るように, 区分的定数経路の代わりに [16] の区分的陪特性経路を用いると, 偏微分方程式の基本解 $U(T,0,x,\xi_0)$ が直接計算できる計算例 [13] がある.

§3. 多くの汎関数 $F[q,p]\in\mathcal{F}_{\mathcal{Q}}$ や $F[q,p]\in\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$ を創ることができる

$F[q,p]\in\mathcal{F}_{\mathcal{Q}}\cup\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$ の例を以下で与える.

例 3.1 ($F[q,p]\in\mathcal{F}_{\mathcal{Q}}\cup\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$). m を非負整数とする.

(a) 任意の多重指数 α に対し, $\partial_x^\alpha B(t,x)$ は連続で, 正の定数 C_α が存在して $|\partial_x^\alpha B(t,x)| \le C_\alpha(1+|x|)^m$ を満たすと仮定する. このとき, 時刻 t （$0\le t\le T$）での値

$$F[q]=B(t,q(t))\in\mathcal{F}_{\mathcal{Q}}\,,\quad F[p]=B(t,p(t))\in\mathcal{F}_{\mathcal{P}}\,.$$

特に, $F[q,p]\equiv 1\in\mathcal{F}_{\mathcal{Q}}\cap\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$.

(b) $0\le T'\le T''\le T$ とする. 任意の多重指数 α, β に対し, $\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta B(t,x,\xi)$ は連続で, 正の定数 $C_{\alpha,\beta}$ が存在して $|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta B(t,x,\xi)|\le C_{\alpha,\beta}(1+|x|+|\xi|)^m$ を満たすと仮定する. このとき, 積分

$$F[q,p]=\int_{[T',T'')} B(t,q(t),p(t))dt\in\mathcal{F}_{\mathcal{Q}}\cap\mathcal{F}_{\mathcal{P}}\,.$$

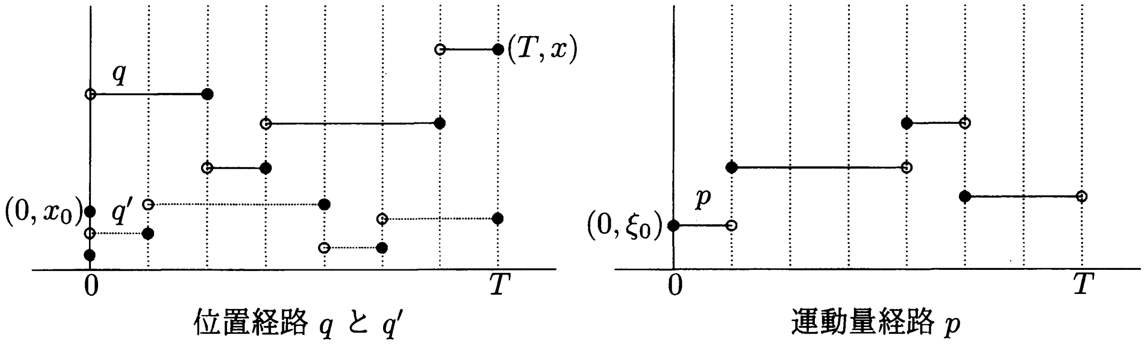


図 3.

(c) 任意の多重指数 α, β に対し, $\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta B(t,x,\xi)$ は連続で, 正の定数 $C_{\alpha,\beta}$ が存在して $|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta B(t,x,\xi)|\le C_{\alpha,\beta}$ を満たすと仮定する. このとき,

$$F[q,p]=e^{\int_{[T',T'')} B(t,q(t),p(t))dt}\in\mathcal{F}_{\mathcal{Q}}\cap\mathcal{F}_{\mathcal{P}}\,.$$

注意 3.2. 不確定性原理を避けるため, 位置 $q(t)$ と運動量 $p(t)$ を同時刻 t に扱わない. つまり $q(t)\in\mathcal{F}_{\mathcal{Q}}$, $p(t)\notin\mathcal{F}_{\mathcal{Q}}$ とし, $q(t)\notin\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$, $p(t)\in\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$ とする.

2 つのクラス $\mathcal{F}_{\mathcal{Q}}$, $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$ における代数を述べるため, 汎関数微分を定義する.

定義 2 (汎関数微分). 任意の分割 $\Delta_{T,0}$ に対し,

$$F[q_{\Delta_{T,0}},p_{\Delta_{T,0}}]=F_{\Delta_{T,0}}(x_{J+1},\xi_J,x_J,\ldots,\xi_0,x_0)\in C^\infty(\mathbf{R}^{d(2J+3)})\,,$$

とする. 任意の位置経路 q, $q'\in\mathcal{Q}$ と任意の運動量経路 p, $p'\in\mathcal{P}$ に対し, 汎関数微分 $D_{q'}F[q,p]$ と $D_{p'}F[q,p]$ を

$$D_{q'}F[q,p]=\frac{\partial}{\partial\theta}F[q+\theta q',p]\Big|_{\theta=0}\,,\quad D_{p'}F[q,p]=\frac{\partial}{\partial\theta}F[q,p+\theta p']\Big|_{\theta=0}$$

で定義する.

注意 3.3. 区分的定数経路 q, $q'\in\mathcal{Q}$ と $p\in\mathcal{P}$ に対し, 分割 $\Delta_{T,0}$ を q, q' または p がジャンプする時刻をすべて含むように選ぶ (図 3). $q(T_j)=x_j$, $q'(T_j)=x'_j$ とおき, $p(T_{j-1})=\xi_{j-1}$ とおく. $(T_{j-1},T_j]$ 上 $(q+\theta q')(0)=x_0+\theta x'_0$, $(q+\theta q')(t)=x_j+\theta x'_j$ となり, $[T_{j-1},T_j)$ 上 $p(t)=\xi_{j-1}$ となるので,

$$F[q+\theta q',p]=F_{\Delta_{T,0}}(x_{J+1}+\theta x'_{J+1},\xi_J,x_J+\theta x'_J,\ldots,\xi_0,x_0+\theta x'_0)\,,$$

と書ける. よって $D_{q'}F[q,p]$ を関数として扱うことができる. つまり

$$D_{q'}F[q,p]=\frac{\partial}{\partial\theta}F[q+\theta q',p]\Big|_{\theta=0}=\sum_{j=0}^{J+1}(\partial_{x_j}F_{\Delta_{T,0}})(x_{J+1},\xi_J,\ldots,\xi_0,x_0)\cdot x'_j\,.$$

2 つのクラス $\mathcal{F}_{\mathcal{Q}}$, $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$ における代数は以下である.

定理 2 ($\mathcal{F}_{\mathcal{Q}}$, $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$ 上の滑らかな代数)**.**

(1) 任意の汎関数 $F[q,p], G[q,p] \in \mathcal{F}_{\mathcal{Q}}$, 任意の位置経路 $q' \in \mathcal{Q}$, 任意の運動量経路 $p' \in \mathcal{P}$ と任意の $d \times d$ 実行列 A, B に対し,

$$F[q,p]+G[q,p] \in \mathcal{F}_{\mathcal{Q}}\,,\ F[q,p]G[q,p] \in \mathcal{F}_{\mathcal{Q}}\,,\ F[q+q',p+p'] \in \mathcal{F}_{\mathcal{Q}}\,,$$
$$F[Aq,Bp] \in \mathcal{F}_{\mathcal{Q}}\,,\ D_{q'}F[q,p] \in \mathcal{F}_{\mathcal{Q}}\,,\ D_{p'}F[q,p] \in \mathcal{F}_{\mathcal{Q}}\,.$$

(2) 任意の汎関数 $F[q,p], G[q,p] \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}$, 任意の位置経路 $q' \in \mathcal{Q}$, 任意の運動量経路 $p' \in \mathcal{P}$ と任意の $d \times d$ 実行列 A, B に対し,

$$F[q,p]+G[q,p] \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}\,,\ F[q,p]G[q,p] \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}\,,\ F[q+q',p+p'] \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}\,,$$
$$F[Aq,Bp] \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}\,,\ D_{q'}F[q,p] \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}\,,\ D_{p'}F[q,p] \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}\,.$$

注意 3.4. 2 つのクラス $\mathcal{F}_{\mathcal{Q}}$, $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$ は和, 積, 経路の平行移動や実線形変換, 汎関数微分に関して閉じている. ゆえに, 定理 2 を例 3.1 に適用すると, 多くの相空間経路積分可能な汎関数 $F[q,p] \in \mathcal{F}_{\mathcal{Q}}$ や $F[q,p] \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}$ を創ることができる.

§4. しかしながら, どの演算が有効かに注意しなければならない

定理 4 と定理 6 で見るように, $q' \in \mathcal{Q}$, $p' \in \mathcal{P}$ は区分的定数であるため, $\phi[q,p]$ の $\int_{[0,T)} p(t)\cdot dq(t)$ 部分は定理 2 の演算で必ずしも良い性質を持つわけではない. ゆえに, 相空間経路 $\int e^{\frac{i}{\hbar}\phi[q,p]}F[q,p]\mathcal{D}[q,p]$ において, どの演算が有効かに注意しなければならない.

§5. Fubini 型の定理

相空間経路積分 (2.2) の測度は存在しないが, 以下の Fubini 型の定理が成立する.

定理 3 (Fubini 型の定理)**.** m は非負整数とする. 任意の多重指数 α に対し, $\partial_x^\alpha B(t,x)$ は連続で, 正の定数 C_α が存在して $|\partial_x^\alpha B(t,x)| \le C_\alpha(1+|x|)^m$ をみたすとする. T は十分小さいとし, $0 \le T' \le T'' \le T$ とする. このとき, 以下が成立する.

(1) 任意の汎関数 $F[q,p] \in \mathcal{F}_{\mathcal{Q}}$ （$F[q,p] \equiv 1$ を含む）に対し,

$$\int e^{\frac{i}{\hbar}\phi[q,p]}\int_{[T',T'')} B(t,q(t))dtF[q,p]\mathcal{D}[q,p]$$
$$= \int_{[T',T'')}\int e^{\frac{i}{\hbar}\phi[q,p]}B(t,q(t))F[q,p]\mathcal{D}[q,p]dt\,.$$

(2) 任意の汎関数 $F[q,p]\in\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$ （$F[q,p]\equiv 1$ を含む）に対し，

$$\begin{aligned}&\int e^{\frac{i}{\hbar}\phi[q,p]}\int_{[T',T'')}B(t,p(t))dtF[q,p]\mathcal{D}[q,p]\\&=\int_{[T',T'')}\int e^{\frac{i}{\hbar}\phi[q,p]}B(t,p(t))F[q,p]\mathcal{D}[q,p]dt\,.\end{aligned}$$

注意 5.1. 不確定性原理を避けるため, 位置 $q(t)$ と運動量 $p(t)$ を同時刻 t で扱わない.

注意 5.2. 相空間経路積分とある種の lim との順序交換定理も成立する. 特に $|\partial_x^\alpha B(t,x)|\le C_\alpha$ のとき, 摂動展開できる.

$$\begin{aligned}&\int e^{\frac{i}{\hbar}\phi[q,p]+\frac{i}{\hbar}\int_{[0,T)}B(\tau,q(\tau))d\tau}\mathcal{D}[q,p]=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{i}{\hbar}\right)^n\int_{[0,T)}d\tau_n\int_{[0,\tau_n)}d\tau_{n-1}\cdots\int_{[0,\tau_2)}d\tau_1\\&\times\int e^{\frac{i}{\hbar}\phi[q,p]}B(\tau_n,q(\tau_n))B(\tau_{n-1},q(\tau_{n-1}))\cdots B(\tau_1,q(\tau_1))\mathcal{D}[q,p]\,.\end{aligned}$$

§6. 経路の平行移動

定理 4 (経路の平行移動).

(1) 任意の運動量経路 $p'\in\mathcal{P}$ に対し, $e^{\frac{i}{\hbar}(\phi[q,p+p']-\phi[q,p])}\in\mathcal{F}_{\mathcal{Q}}$ となる.

さらに, T が十分小さいとき, 任意の汎関数 $F[q,p]\in\mathcal{F}_{\mathcal{Q}}$ に対し,

$$\begin{aligned}&\int_{q(T)=x,p(0)=\xi_0,q(0)=x_0}e^{\frac{i}{\hbar}\phi[q,p+p']}F[q,p+p']\mathcal{D}[q,p]\\&=\int_{q(T)=x,p(0)=\xi_0+p'(0),q(0)=x_0}e^{\frac{i}{\hbar}\phi[q,p]}F[q,p]\mathcal{D}[q,p]\,.\end{aligned}$$

(2) 任意の位置経路 $q'\in\mathcal{Q}$ に対し, $e^{\frac{i}{\hbar}(\phi[q+q',p]-\phi[q,p])}\in\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$ となる.

さらに, T が十分小さいとき, 任意の汎関数 $F[q,p]\in\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$ に対し,

$$\begin{aligned}&\int_{q(T)=x,p(0)=\xi_0,q(0)=x_0}e^{\frac{i}{\hbar}\phi[q+q',p]}F[q+q',p]\mathcal{D}[q,p]\\&=\int_{q(T)=x+q'(T),p(0)=\xi_0,q(0)=x_0+q'(0)}e^{\frac{i}{\hbar}\phi[q,p]}F[q,p]\mathcal{D}[q,p]\,.\end{aligned}$$

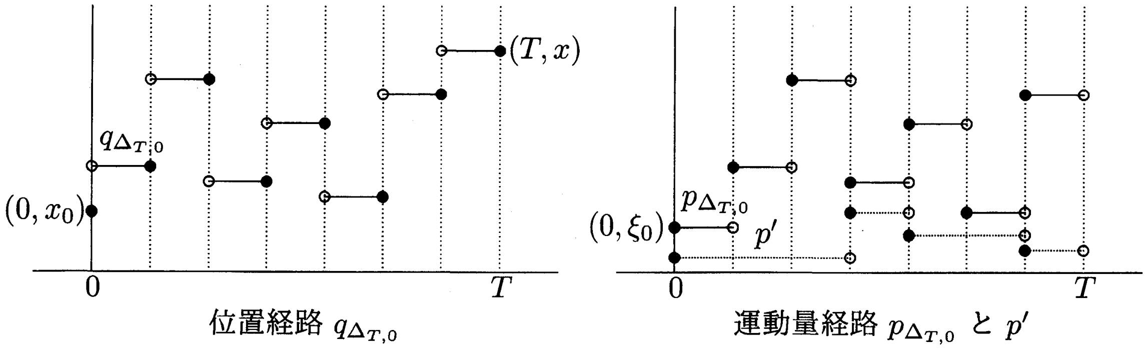


図 4.

証明. (1) $e^{\frac{i}{\hbar}(\phi[q,p+p']-\phi[q,p])}\in\mathcal{F}_Q$ の証明は省略する. 定理 1 と定理 2(1) より,

$$
\begin{aligned}
(6.1)\quad &\int_{q(T)=x,p(0)=\xi_0,q(0)=x_0} e^{\frac{i}{\hbar}\phi[q,p+p']}F[q,p+p']\mathcal{D}[q,p]\\
&=\int_{q(T)=x,p(0)=\xi_0,q(0)=x_0} e^{\frac{i}{\hbar}\phi[q,p]}e^{\frac{i}{\hbar}(\phi[q,p+p']-\phi[q,p])}F[q,p+p']\mathcal{D}[q,p]\\
&\equiv\lim_{|\Delta_{T,0}|\to 0}\left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^{dJ}\int_{\mathbf{R}^{2dJ}} e^{\frac{i}{\hbar}\phi[q_{\Delta_{T,0}},p_{\Delta_{T,0}}+p']}F[q_{\Delta_{T,0}},p_{\Delta_{T,0}}+p']\prod_{j=1}^{J}d\xi_j dx_j\,.
\end{aligned}
$$

ただし $q_{\Delta_{T,0}}(T_j)=x_j$, $p_{\Delta_{T,0}}(T_j)=\xi_j$ とする. 分割 $\Delta_{T,0}$ が区分的定数経路 p' がジャンプする時刻をすべて含むように選ぶ (図 4 参照). $p'(T_{j-1})=\xi'_{j-1}$ とおく. $[T_{j-1},T_j)$ 上 $(p_{\Delta_{T,0}}+p')(t)=\xi_{j-1}+\xi'_{j-1}$ より,

$$
\begin{aligned}
&=\lim_{|\Delta_{T,0}|\to 0}\left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^{dJ}\int_{\mathbf{R}^{2dJ}} e^{\frac{i}{\hbar}\phi_{\Delta_{T,0}}(x_{J+1},\xi_J+\xi'_J,x_J,\ldots,\xi_1+\xi'_1,x_1,\xi_0+\xi'_0,x_0)}\\
&\quad\times F_{\Delta_{T,0}}(x_{J+1},\xi_J+\xi'_J,x_J,\ldots,\xi_1+\xi'_1,x_1,\xi_0+\xi'_0,x_0)\prod_{j=1}^{J}d\xi_j dx_j\,.
\end{aligned}
$$

変数変換: $\xi_j+\xi'_j\to\xi_j$, $j=1,2,\ldots,J$ より,

$$
\begin{aligned}
&=\lim_{|\Delta_{T,0}|\to 0}\left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^{dJ}\int_{\mathbf{R}^{2dJ}} e^{\frac{i}{\hbar}\phi_{\Delta_{T,0}}(x_{J+1},\xi_J,x_J,\ldots,\xi_1,x_1,\xi_0+\xi'_0,x_0)}\\
&\quad\times F_{\Delta_{T,0}}(x_{J+1},\xi_J,x_J,\ldots,\xi_1,x_1,\xi_0+\xi'_0,x_0)\prod_{j=1}^{J}d\xi_j dx_j\\
&=\int_{q(T)=x,p(0)=\xi_0+p'(0),q(0)=x_0} e^{\frac{i}{\hbar}\phi[q,p]}F[q,p]\mathcal{D}[q,p]\,.\ \square
\end{aligned}
$$

$\square$

注意 6.1. $e^{\frac{i}{\hbar}(\phi[q,p+p']-\phi[q,p])} \in \mathcal{F}_{\mathcal{Q}}$ より, 定理 1 は, (6.1) の相空間経路積分の存在, つまり $|\Delta_{T,0}| \to 0$ となる任意の分割 $\Delta_{T,0}$ に対する定義 "$\equiv$" を保証する. 我々は $e^{\frac{i}{\hbar}(\phi[q+q',p+p']-\phi[q,p])}$ の場合は扱わないことに注意する.

§7. 経路の直交変換

定理 5 (経路の直交変換). T が十分小さいとき, 任意の汎関数 $F[q,p] \in \mathcal{F}_{\mathcal{Q}} \cup \mathcal{F}_{\mathcal{P}}$ と任意の $d \times d$ 直交行列 Q に対し,

$$\int_{q(T)=x,p(0)=\xi_0,q(0)=x_0} e^{\frac{i}{\hbar}\phi[Qq,Qp]} F[Qq,Qp]\mathcal{D}[q,p]$$
$$= \int_{q(T)=Qx,p(0)=Q\xi_0,q(0)=Qx_0} e^{\frac{i}{\hbar}\phi[q,p]} F[q,p]\mathcal{D}[q,p]\,.$$

§8. 汎関数微分に関する部分積分

定理 6 (汎関数微分に関する部分積分).

(1) 任意の運動量経路 $p' \in \mathcal{P}$ に対し, $D_{p'}\phi[q,p] \in \mathcal{F}_{\mathcal{Q}}$ となる.

さらに, T が十分小さいとき, 任意の汎関数 $F[q,p] \in \mathcal{F}_{\mathcal{Q}}$ と, $p'(0)=0$ となる任意の運動量経路 $p' \in \mathcal{P}$ に対し,

$$\int e^{\frac{i}{\hbar}\phi[q,p]}(D_{p'}F)[q,p]\mathcal{D}[q,p] = -\frac{i}{\hbar}\int e^{\frac{i}{\hbar}\phi[q,p]}(D_{p'}\phi)[q,p]F[q,p]\mathcal{D}[q,p]\,.$$

(2) 任意の位置経路 $q' \in \mathcal{Q}$ に対し, $D_{q'}\phi[q,p] \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}$ となる.

さらに, T が十分小さいとき, 任意の汎関数 $F[q,p] \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}$ と, $q'(T)=q'(0)=0$ となる任意の位置経路 $q' \in \mathcal{Q}$ に対し,

$$\int e^{\frac{i}{\hbar}\phi[q,p]}(D_{q'}F)[q,p]\mathcal{D}[q,p] = -\frac{i}{\hbar}\int e^{\frac{i}{\hbar}\phi[q,p]}(D_{q'}\phi)[q,p]F[q,p]\mathcal{D}[q,p]\,.$$

注意 8.1 (正準方程式との類似). $F[q,p] \equiv 1$ とおく.

$$\phi[q,p] = \int_{[0,T)} p(t)\cdot dq(t) - \int_{[0,T)} H(t,q(t),p(t))dt$$

に注意すると, 定理 6 は以下のように書ける.

(1) $p'(0)=0$ となる任意の経路 $p' \in \mathcal{P}$ に対し,

$$0 = \int e^{\frac{i}{\hbar}\phi[q,p]}\left(\int_{[0,T)} p'dq - (\partial_\xi H)(t,q,p)p'dt\right)\mathcal{D}[q,p]\,.$$

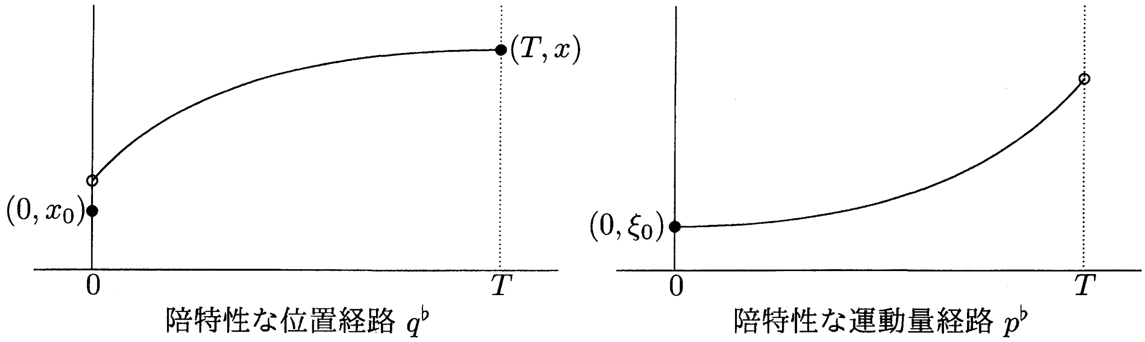


図 5.

(2) $q'(T)=q'(0)=0$ となる任意の経路 $q'\in\mathcal{Q}$ に対し,

$$0=\int e^{\frac{i}{\hbar}\phi[q,p]}\left(\int_{[0,T)}pdq'-(\partial_xH)(t,q,p)q'dt\right)\mathcal{D}[q,p]\,.$$

相空間経路積分の内部は正準方程式

$$\partial_t q(t)=(\partial_\xi H)(t,q,p)\,,\quad \partial_t p(t)=-(\partial_x H)(t,q,p)$$

に類似していることに注意して欲しい.

§9. $\hbar\downarrow 0$ のときの Hamilton 型準古典近似

T が十分小さいとする. $\bar{q}(t)=\bar{q}(t,x,\xi_0)$ と $\bar{p}(t)=\bar{p}(t,x,\xi_0)$ は正準方程式

$$\partial_t\bar{q}(t)=(\partial_\xi H)(t,\bar{q}(t),\bar{p}(t))\,,\quad \partial_t\bar{p}(t)=-(\partial_x H)(t,\bar{q}(t),\bar{p}(t))\,,\quad 0\le t\le T\,,$$

の境界条件 $\bar{q}(T)=x$ と $\bar{p}(0)=\xi_0$ における解とする. 陪特性経路 $q^\flat=q^\flat(t,x,\xi_0,x_0)$ と $p^\flat=p^\flat(t,x,\xi_0)$ を

$$\begin{aligned} q^\flat(0)=x_0,\quad q^\flat(t)&=\bar{q}(t,x,\xi_0)\,,\quad 0<t\le T\,,\\ p^\flat(t)&=\bar{p}(t,x,\xi_0)\,,\quad 0\le t<T \end{aligned}$$

で定義する (図 5 参照).

$$(\partial_{(\xi_J,x_J,\dots,\xi_1,x_1)}\phi_{\Delta_{T,0}})(x_{J+1},\xi_J^*,x_J^*,\dots,\xi_1^*,x_1^*,\xi_0)=0\,,$$

となる $\phi_{\Delta_{T,0}}$ の停留点 $(x_J^*,\xi_J^*,\dots,x_1^*,\xi_1^*)$ を Hesse 行列式に代入して $D(T,x,\xi_0)$ を

$$\begin{aligned} &D(T,x,\xi_0)\\ &\equiv\lim_{|\Delta_{T,0}|\to 0}(-1)^{dJ}\det(\partial^2_{(\xi_J,x_J,\dots,\xi_1,x_1)}\phi_{\Delta_{T,0}})(x_{J+1},x_J^*,\xi_J^*,\dots,x_1^*,\xi_1^*,\xi_0)\,, \end{aligned}$$

で定義する. ただし $x=x_{J+1}$ とおく.

定理 7 ($\hbar\downarrow 0$ における Hamilton 型準古典近似の誤差の評価). T が十分小さいとき, 任意の汎関数 $F[q,p]\in\mathcal{F}_{\mathcal{Q}}\cup\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$ に対し

$$\int e^{\frac{i}{\hbar}\phi[q,p]}F[q,p]\mathcal{D}[q,p]=e^{\frac{i}{\hbar}\phi[q^\flat,p^\flat]}\left(D(T,x,\xi_0)^{-1/2}F[q^\flat,p^\flat]+\hbar\Upsilon(\hbar,T,x,\xi_0,x_0)\right),$$

と書け, 任意の多重指数 α, β に対し, 正の定数 $C_{\alpha,\beta}$ が存在して

$$|\partial_x^\alpha\partial_{\xi_0}^\beta\Upsilon(\hbar,T,x,\xi_0,x_0)|\le C_{\alpha,\beta}(1+|x|+|\xi_0|+|x_0|)^m.$$

§10. 定理 1, 2 の証明

相空間経路積分の存在, つまり $|\Delta_{T,0}|\to 0$ のとき多重（振動）積分

$$\left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^{dJ}\int_{\mathbf{R}^{2dJ}}e^{\frac{i}{\hbar}\phi[q_{\Delta_{T,0}},p_{\Delta_{T,0}}]}F[q_{\Delta_{T,0}},p_{\Delta_{T,0}}]\prod_{j=1}^{J}d\xi_j dx_j\,,\tag{10.1}$$

の収束を証明するには, 関数

$$F_{\Delta_{T,0}}(x_{J+1},\xi_J,x_J,\ldots,x_1,\xi_0,x_0)=F[q_{\Delta_{T,0}},p_{\Delta_{T,0}}],$$

に多くの仮定を加え, その仮定で集合 $\mathcal{F}_{\mathcal{Q}}$, $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$ を定義すれば良い. そもそも, この節まで $F[q,p]$ の仮定 3 を与えていないため, 仮定が必要である.

他のことは考えない. そうすれば $\mathcal{F}_{\mathcal{Q}}$, $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$ は集合として大きくなる.
運が良ければ, $\mathcal{F}_{\mathcal{Q}}$, $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$ は少なくとも 1 つの例 $F[q,p]\equiv 1$ を含むであろう.

多重積分の収束の証明は次の 3 つのステップからなる.

1° H. Kumano-go-Taniguchi 型の評価 [10, p.360, (6.94)] を用い, 多重積分 (10.1) を, $J\to\infty$ のとき, 正の定数 C の J 乗 C^J でコントロールする.

2° Fujiwara 型の評価 [7] を用い, 多重積分 (10.1) を, $J\to\infty$ によらない正の定数 C でコントロールする.

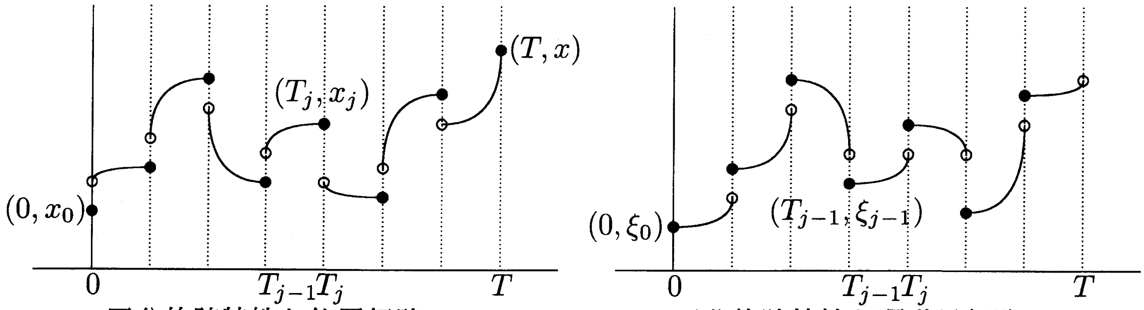
3° 多重積分 (10.1) が $|\Delta_{T,0}|\to 0$ のとき収束するように仮定を加える.

とは言え, 区分的定数経路は近似として荒く, 計算が大変である. 少しでも計算が簡単になるように, まず区分的定数経路の代わりに, 区分的陪特性経路を定義し, 用いた.

§11. 区分的陪特性経路の場合, 仮定 3(1) に対応する仮定

T が小さいとき, 陪特性経路

$$\bar{q}_{T_j,T_{j-1}}=\bar{q}_{T_j,T_{j-1}}(t,x_j,\xi_{j-1}),\quad \bar{p}_{T_j,T_{j-1}}=\bar{p}_{T_j,T_{j-1}}(t,x_j,\xi_{j-1}),\quad T_{j-1}\le t\le T_j,$$



区分的陪特性な位置経路 $q_{\Delta_{T,0}}$　区分的陪特性な運動量経路 $p_{\Delta_{T,0}}$

図 6.

を正準方程式

$$\begin{aligned}(11.1)\qquad &\partial_t\bar{q}_{T_j,T_{j-1}}(t)=(\partial_\xi H)(t,\bar{q}_{T_j,T_{j-1}},\bar{p}_{T_j,T_{j-1}}),\\ &\partial_t\bar{p}_{T_j,T_{j-1}}(t)=-(\partial_x H)(t,\bar{q}_{T_j,T_{j-1}},\bar{p}_{T_j,T_{j-1}}),\quad T_{j-1}\le t\le T_j\,,\end{aligned}$$

の境界条件 $\bar{q}_{T_j,T_{j-1}}(T_j)=x_j$ と $\bar{p}_{T_j,T_{j-1}}(T_{j-1})=\xi_{j-1}$ における解とする. $\bar{q}_{T_j,T_{j-1}}$ と $\bar{p}_{T_j,T_{j-1}}$ を用いて, 区分的陪特性経路 $q_{\Delta_{T,0}}=q_{\Delta_{T,0}}(t,x_{J+1},\xi_J,x_J,\dots,\xi_1,x_1,\xi_0,x_0)$ と $p_{\Delta_{T,0}}=p_{\Delta_{T,0}}(t,x_{J+1},\xi_J,x_J,\dots,\xi_1,x_1,\xi_0)$ を

$$\begin{aligned}(11.2)\qquad &q_{\Delta_{T,0}}(t)=\bar{q}_{T_j,T_{j-1}}(t,x_j,\xi_{j-1}),\quad T_{j-1}<t\le T_j\,,\quad q_{\Delta_{T,0}}(0)=x_0,\\ &p_{\Delta_{T,0}}(t)=\bar{p}_{T_j,T_{j-1}}(t,x_j,\xi_{j-1}),\quad T_{j-1}\le t<T_j\,,\quad j=1,2,\dots,J,J+1\,,\end{aligned}$$

で定義する (図 6 参照). 仮定 3 (1) に対応する, 区分的陪特性経路を用いた場合の仮定は以下である:

仮定 2 (区分的陪特性経路を用いた場合, 仮定 3(1) に対応する仮定). $m\ge 0$ とする. $u_j\ge 0$, $j=1,2,\dots,J,J+1$ は分割 $\Delta_{T,0}$ に依存するパラメータで $\sum_{j=1}^{J+1}u_j=U<\infty$ を満たすとする. 任意の非負整数 M に対し, 正の定数 A_M と X_M が存在し

$$\begin{aligned}(11.3)\qquad &\left|(\prod_{j=1}^{J+1}\partial_{x_j}^{\alpha_j}\partial_{\xi_{j-1}}^{\beta_{j-1}})F_{\Delta_{T,0}}(x_{J+1},\xi_J,x_J,\dots,\xi_1,x_1,\xi_0,x_0)\right|\\ &\le A_M(X_M)^{J+1}(\prod_{j=1}^{J+1}(t_j)^{\min(|\beta_{j-1}|,1)})(1+\sum_{j=1}^{J+1}(|x_j|+|\xi_{j-1}|)+|x_0|)^m\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(11.4)\qquad &\left|(\prod_{j=1}^{J+1}\partial_{x_j}^{\alpha_j}\partial_{\xi_{j-1}}^{\beta_{j-1}})\partial_{x_k}F_{\Delta_{T,0}}(x_{J+1},\xi_J,x_J,\dots,\xi_1,x_1,\xi_0,x_0)\right|\\ &\le A_M(X_M)^{J+1}u_k(\prod_{j\ne k}(t_j)^{\min(|\beta_{j-1}|,1)})(1+\sum_{j=1}^{J+1}(|x_j|+|\xi_{j-1}|)+|x_0|)^m\,,\end{aligned}$$

が, 任意の分割 $\Delta_{T,0}$, $|\alpha_j|, |\beta_{j-1}| \le M$ となる任意の多重指数 $\alpha_j, \beta_{j-1}, j = 1, 2, \ldots, J, J+1$ と任意の整数 $1 \le k \le J$ に対して成立する.

注意 11.1. この仮定 2 で定義される汎関数のクラスは, 汎関数の例 3.1 を含み, 和と積で閉じていて, 定理 1, 3, 7 が成立する（[16] 参照）.

注意 11.2. 計算が少し簡単になる区分的陪特性経路の場合について, 多重積分の収束の証明の 3 つのステップを大雑把に説明する.

1° まず

$$
\begin{aligned}
(11.5)\qquad &\left|(\prod_{j=1}^{J+1} \partial_{x_j}^{\alpha_j} \partial_{\xi_{j-1}}^{\beta_{j-1}}) F_{\Delta_{T,0}}(x_{J+1}, \xi_J, x_J, \ldots, \xi_1, x_1, \xi_0, x_0)\right| \\
&\le A_M (X_M)^{J+1} (1 + \sum_{j=1}^{J+1} (|x_j| + |\xi_{j-1}|) + |x_0|)^m ,
\end{aligned}
$$

を $|\alpha_j|$, $|\beta_{j-1}| \le M$ となる任意の多重指数 α_j, β_{j-1}, $j = 1, 2, \ldots, J, J+1$ に対し, 仮定する. 荒く言えば, $J \to \infty$ のとき, 変数の数は増えていくが, 関数が定数 X_M の J 乗でコントロールできると仮定する. これにより, 多重積分 (10.1) は $J \to \infty$ のとき定数 C の J 乗 C^J でコントロールする.

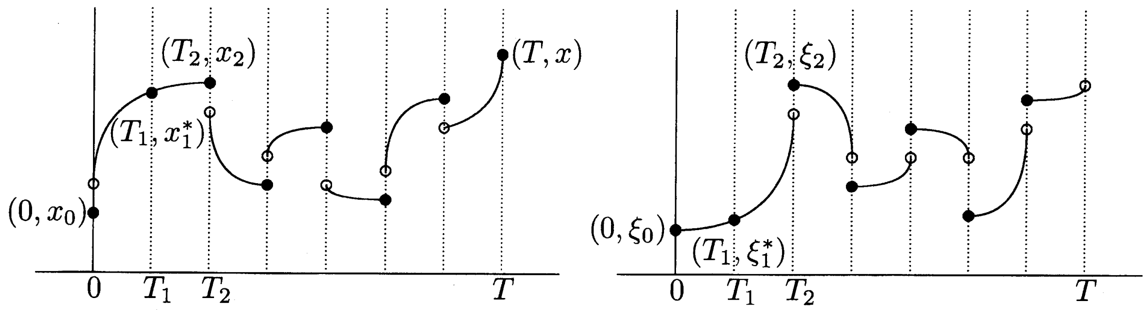
2° 任意の分割 $\Delta_{T,0}$ に対し, (11.3) を仮定する. 荒く言えば, 経路の分割の個数が $J = 0, 1, 2, \ldots$ ならば $(X_M)^1, (X_M)^2, (X_M)^3, \ldots$ でコントロールできると仮定する. 停留位相法を繰り返し, 停留位相法の主部を使って, 分割の個数 が 1 つずつ少ない経路へと取り替えていく. 停留位相法の余りがたくさん出てくるが, 小さい項 t_j を使って余りの和をコントロールする. これにより多重積分 (10.1) を $J \to \infty$ によらない定数 C でコントロールする.

3° (11.4) を仮定する. 荒く言えば, 測度論は底辺を考えるが, 積分は面積である. (11.4) は 2 つの経路の差が小さければ, 2 つの高さ, つまり 2 つの汎関数の差が小さくなることを意味する. これにより多重積分 (10.1) が $|\Delta_{T,0}| \to 0$ のとき収束させる.

§ 12. 区分的陪特性経路を用いた計算例

多重積分の収束だけを考え, 区分的陪特性経路を定義した. しかし, 論文 [16] の後, 区分的特性経路を用いると, 以下のように, いくつかの偏微分方程式で基本解 $U(T, 0)$ の関数 $U(T, 0, x, \xi)$ が直接計算できることに気づいた（計算例 [13] 参照）.

例 12.1. $d = 1$, $H(t, x, \xi) = x^2/2 + \xi^2/2$, $F[q, p] \equiv 1$ のとき, $U(T, 0, x, \xi)$ を計算する:



位置経路 $q_{(\Delta_{T,T_2},0)}$ と停留点 x_1^*　　運動量経路 $p_{(\Delta_{T,T_2},0)}$ と停留点 ξ_1^*

図 7.

$(\partial_\xi H) = \xi$ と $(\partial_x H) = x$ に注意する. 正準方程式

$$\partial_t \bar{q}_{T_j,T_{j-1}}(t) = \bar{p}_{T_j,T_{j-1}}(t)\,,\quad \partial_t \bar{p}_{T_j,T_{j-1}}(t) = -\bar{q}_{T_j,T_{j-1}}(t)\,,\quad T_{j-1} \le t \le T_j$$

を境界条件 $\bar{q}_{T_j,T_{j-1}}(T_j) = x_j$ と $\bar{p}_{T_j,T_{j-1}}(T_{j-1}) = \xi_{j-1}$ で解いて, 陪特性経路

$$\bar{q}_{T_j,T_{j-1}}(t) = \frac{x_j \cos(t - T_{j-1}) - \xi_{j-1}\sin(T_j - t)}{\cos(T_j - T_{j-1})},$$
$$\bar{p}_{T_j,T_{j-1}}(t) = \frac{-x_j \sin(t - T_{j-1}) + \xi_{j-1}\cos(T_j - t)}{\cos(T_j - T_{j-1})},$$

を得る. $q_{\Delta_{T,0}}$, $p_{\Delta_{T,0}}$ を (11.2) の区分的陪特性経路とする (図 6 参照). このとき汎関数 $\phi[q_{\Delta_{T,0}}, p_{\Delta_{T,0}}]$ は関数

$$\phi[q_{\Delta_{T,0}}, p_{\Delta_{T,0}}] = \phi_{\Delta_{T,0}} = \sum_{j=1}^{J+1} \phi_{T_j,T_{j-1}}(x_j, \xi_{j-1}, x_{j-1})\,,$$

となる. ただし

$$\phi_{T_j,T_{j-1}}(x_j, \xi_{j-1}, x_{j-1}) = -x_{j-1}\cdot\xi_{j-1} + \frac{2x_j\cdot\xi_{j-1} - (x_j^2 + \xi_{j-1}^2)\sin(T_j - T_{j-1})}{2\cos(T_j - T_{j-1})}.$$

となる. (ξ_1^*, x_1^*) を $\partial_{(\xi_1,x_1)}(\phi_{T_2,T_1} + \phi_{T_1,0})(x_2, \xi_1^*, x_1^*, \xi_0) = 0$ の解とする (図 7 参照).
このとき 2 次の Taylor の定理により

$$\begin{aligned}&\phi_{T_2,T_1}(x_2, \xi_1, x_1) + \phi_{T_1,0}(x_1, \xi_0, x_0)\\ &= \phi_{T_2,0}(x_2, \xi_0, x_0) + \frac{1}{2}\partial^2_{(\xi_1,x_1)}(\phi_{T_2,T_1} + \phi_{T_1,0})\begin{bmatrix}\xi_1 - \xi_1^*\\ x_1 - x_1^*\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\xi_1 - \xi_1^*\\ x_1 - x_1^*\end{bmatrix},\end{aligned}$$

となる.

$$(-1)\det\partial^2_{(\xi_1,x_1)}(\phi_{T_2,T_1} + \phi_{T_1,0}) = (-1)\begin{vmatrix}-\frac{\sin(T_2-T_1)}{\cos(T_2-T_1)} & -1\\ -1 & -\frac{\sin(T_1-0)}{\cos(T_1-0)}\end{vmatrix} = \frac{\cos T_2}{\cos t_2 \cos t_1}.$$

に注意する. 2×2 実対称行列 A に対して, 公式

$$\int_{\mathbf{R}^2} e^{\frac{i}{\hbar}\frac{1}{2}Ax\cdot x}dx = \sqrt{\frac{(2\pi\hbar i)^2}{\det A}} = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{(-1)\det A}},$$

を用いて

$$\left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)\int_{\mathbf{R}^2} e^{\frac{i}{\hbar}\phi_{T_2,T_1}(x_2,\xi_1,x_1)+\frac{i}{\hbar}\phi_{T_1,0}(x_1,\xi_0,x_0)}dx_1 d\xi_1$$
$$= e^{\frac{i}{\hbar}\phi_{T_2,0}(x_2,\xi_0,x_0)}\left(\frac{\cos t_2 \cos t_1}{\cos T_2}\right)^{1/2},$$

を得る. この関係を帰納的に用いて $|\Delta_{T,0}| = \max_{1\le j\le J+1} t_j \to 0$ とすると

$$e^{\frac{i}{\hbar}(x-x_0)\cdot\xi_0}U(T,0,x,\xi_0) = \int e^{\frac{i}{\hbar}\phi[q,p]}\mathcal{D}[q,p]$$
$$= \lim_{|\Delta_{T,0}|\to 0}\left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^J \int_{\mathbf{R}^{2J}} e^{\frac{i}{\hbar}\sum_{j=1}^{J+1}\phi_{T_j,T_{j-1}}(x_j,\xi_{j-1},x_{j-1})}\prod_{j=1}^{J} dx_j d\xi_j$$
$$= \lim_{|\Delta_{T,0}|\to 0} e^{\frac{i}{\hbar}\phi_{T,0}(x,\xi_0,x_0)}\left(\frac{\prod_{j=1}^{J+1}\cos t_j}{\cos T}\right)^{1/2}$$
$$= \frac{1}{(\cos T)^{1/2}}\exp\frac{i}{\hbar}\Big(- x_0\cdot\xi_0 + \frac{2x\cdot\xi_0 - (x^2+\xi_0^2)\sin T}{2\cos T}\Big),$$

より, 相空間経路積分の時間分割近似法から基本解の関数 $U(T,0,x,\xi_0)$ が直接計算できた.

例 12.2. $d=1$, $H(t,x,\xi) = \xi^2/2 + x\cdot\xi + x^2/2$, $F[q,p]\equiv 1$ のとき, 同様の議論で

$$e^{\frac{i}{\hbar}(x-x_0)\cdot\xi_0}U(T,0,x,\xi_0) = \left(\frac{e^T}{1+T}\right)^{1/2}\exp\frac{i}{\hbar}\left(-x_0\cdot\xi_0 + \frac{2x\cdot\xi_0 - T(x^2+\xi_0^2)}{2(1+T)}\right),$$

と計算できる.

例 12.3. $d=1$, $H(t,x,\xi) = -ix^2/2 - i\xi^2/2$, $F[q,p]\equiv 1$ のとき, $H(t,x,\xi)$ は複素数値で熱方程式であるが, この場合でさえも, 同様の議論で

$$e^{\frac{i}{\hbar}(x-x_0)\cdot\xi_0}U(T,0,x,\xi_0) = \frac{1}{(\cosh T)^{1/2}}\exp\frac{i}{\hbar}\left(-x_0\cdot\xi_0 + \frac{2x\cdot\xi_0 + i(x^2+\xi_0^2)\sinh T}{2\cosh T}\right),$$

と計算できる.

§13. 汎関数 $F[q,p]$ の 2 つのクラス $\mathcal{F}_Q$, $\mathcal{F}_P$ の仮定

高階の汎関数微分を用いて, 区分的陪特性経路に対する仮定 2 を区分的定数経路の場合の仮定 3 (1) に書き換える.

仮定 3. m は非負整数とする. $u_j, j = 1, 2, \ldots, J, J+1$ は分割 $\Delta_{T,0}$ に依存するパラメータで $\sum_{j=1}^{J+1} u_j = U < \infty$ を満たすとする. $||q|| = \sup_{0\le t\le T} |q(t)|$ とし $||p|| = \sup_{0\le t<T} |p(t)|$ とする.

(1) 任意の非負整数 M に対し, 正の定数 A_M, X_M が存在し

$$\left|(\prod_{j=0}^{J+1}\prod_{l=1}^{L_{\mathcal{Q},j}} D_{q_{j,l}})(\prod_{j=1}^{J+1}\prod_{l=1}^{L_{\mathcal{P},j}} D_{p_{j,l}})F[q,p]\right| \le A_M (X_M)^{J+1}(1+||q||+||p||)^m$$
$$\times(\prod_{j=1}^{J+1}(t_j)^{\min(L_{\mathcal{P},j},1)})\prod_{j=0}^{J+1}\prod_{l=1}^{L_{\mathcal{Q},j}}||q_{j,l}||\prod_{j=1}^{J+1}\prod_{l=1}^{L_{\mathcal{P},j}}||p_{j,l}||,$$
$$\left|(\prod_{j=0}^{J+1}\prod_{l=1}^{L_{\mathcal{Q},j}} D_{q_{j,l}})(\prod_{j=1}^{J+1}\prod_{l=1}^{L_{\mathcal{P},j}} D_{p_{j,l}})D_{q_k}F[q,p]\right| \le A_M (X_M)^{J+1}(1+||q||+||p||)^m$$
$$\times u_k||q_k||(\prod_{j=1,j\neq k}^{J+1}(t_j)^{\min(L_{\mathcal{P},j},1)})\prod_{j=0}^{J+1}\prod_{l=1}^{L_{\mathcal{Q},j}}||q_{j,l}||\prod_{j=1}^{J+1}\prod_{l=1}^{L_{\mathcal{P},j}}||p_{j,l}||,$$

が, 任意の分割 $\Delta_{T,0}$, 任意の $L_{\mathcal{Q},j} = 0, 1, \ldots, M$, 任意の $L_{\mathcal{P},j} = 0, 1, \ldots, M$, $(T_{j-1}, T_j]$ の外部で $q_{j,l}(t) = 0$ となる任意の位置経路 $q_{j,l} \in \mathcal{Q}$, $(T_{k-1}, T_k]$ の外部で $q_k(t) = 0$ となる任意の位置経路 $q_k \in \mathcal{Q}$, $[T_{j-1}, T_j)$ の外部で $p_{j,l}(t) = 0$ となる任意の運動量経路 $p_{j,l} \in \mathcal{P}$ に対して成立する (図 8).

(2) は省略 (論文 [12] を参照).

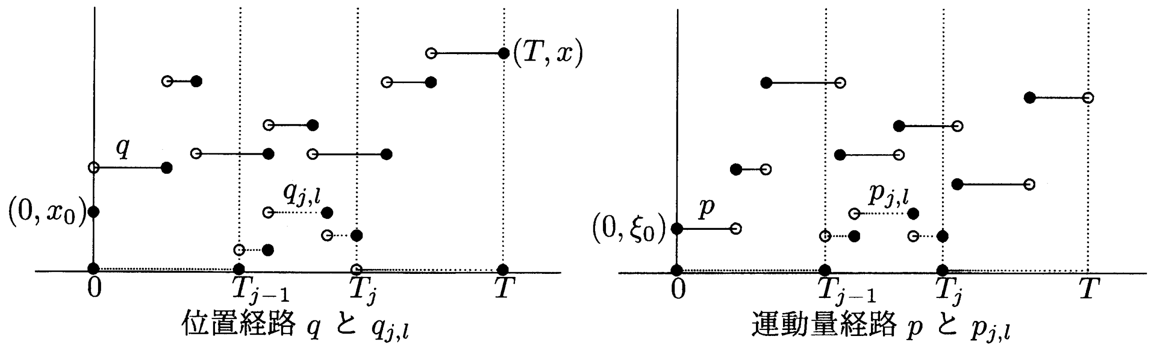


図 8.

参考文献

[1] Albeverio, S., Høegh-Krohn, and Mazzucchi, S., *Mathematical theory of Feynman path integrals*, Lecture notes of Math. **523**, Springer, Berlin, 1976 (The 2nd edition, 2008).

[2] Albeverio, S., Guatteri, G. and Mazzucchi, S., Phase space Feynman path integrals, *J. Math. Phys.* **43** (2002), 2847–2857.

[3] Bock, W. and Grothaus, M., A white noise approach to phase space Feynman path integrals. Teor. Imovir. Mat. Stat. text85 (2011), 7-21.

[4] Chung, K. L. and Zambrini, J.-C., *Introduction to Random Time and Quantum Randomness*, World Scientific Pub Co Inc, 2003.

[5] Daubechies, I. and Klauder, J. R., Quantum mechanical path integrals with Wiener measure for all polynomial Hamiltonians. *J. Math. Phys.* **26** (1985), 2239-2256.

[6] Feynman, R. P., An operator calculus having applications in quantum electrodynamics, *Appendix B, Phys. Rev.* **84**, (1951), 108–236.

[7] Fujiwara, D., The stationary phase method with an estimate of the remainder term on a space of large dimension, *Nagoya Math. J.* **124** (1991), 61–97.

[8] Ichinose, W., A mathematical theory of the phase space Feynman path integral of the functional, *Comm. Math. Phys.* **265** (2006), 739–779.

[9] Kitada, H. and Kumano-go, H., A family of Fourier integral operators and the fundamental solution for a Schrödinger equation, *Osaka J. Math.* **18** (1981), 291-360.

[10] Kumano-go, H., *Pseudo-Differential Operators*, The MIT press, Cambridge, MA, 1981.

[11] Kumano-go, N., A construction of the fundamental solution for Schrödinger equations, *J. Math. Sci. Univ. Tokyo* **2** (1995), 441–498.

[12] Kumano-go, N., Phase space Feynman path integrals with smooth functional derivatives by time slicing approximation, Bull. Sci. math. **135** (2011), 936–987.

[13] Kumano-go, N., Phase space Feynman path integrals - Calculation examples via piecewise bicharacteristic paths, RIMS Kôkyûroku, **1797** (2012), 167–186.

[14] Phase space Feynman path integrals - As analysis on path space via piecewise constant paths, RIMS Kôkyûroku, **1797** (2012), 187–203.

[15] Kumano-go, N., Phase space path integrals as analysis on path space, RIMS Kôkyûroku, **1861** (2013), 83–99.

[16] Kumano-go, N. and Fujiwara, D., Phase space Feynman path integrals via piecewise bicharacteristic paths and their semiclassical approximations, Bull. Sci. math. **132** (2008), 313–357.

[17] Mazzucchi, S., Mathematical Feynman Path Integrals and Their Applications, World Scientific Pub Co Inc, 2009.

[18] Schulman, L. S., *Techniques and Applications of Path Integration*, Monographs and Texts in Physics and Astronomy, Wiley-Interscience, New York, 1981 (with new supplementary section, Dover Publications, Inc, Mineola, New York 2005).

[19] Smolyanov, O. G., Tokarev, A. G. and Truman, A., Hamiltonian Feynman path integrals via Chernoff formula, *J. Math. Phys.* **43** (2002), 5161-5171.