数理解析研究所講究録
第1903巻 2014年 67-72

多次元の予測理論的手法の最近の進展について

広島大学・大学院理学研究科　井上 昭彦 (Akihiko Inoue)
Graduate School of Science, Hiroshima University

北海道大学・大学院理学研究院　笠原 雪夫 (Yukio Kasahara)
Graduate School of Science, Hokkaido University

Mohsen Pourahmadi, Department of Statistics, Texas A&M University

1　予測理論的手法とその多次元への拡張

タイトルにある予測理論的手法とは,

$$\text{有限の過去} = (\text{無限の過去}) \cap (\text{無限の未来})$$

という観点と von Neumann の交代射影定理を組み合わせて,

$$\text{有限の予測} = \text{有限時間の確率過程の張る空間への正射影}$$

に係わる様々な量に対する表現定理を得る手法である. この手法の原形は [I1] において定常時系列の場合に導入され, その後, [I2], [IK1], [IK2], [AI], [AIK], [INA], [IN], [IK2], [IA1], [I3], [IKP], [BIK], [IA2], [KB] 等で, 離散および連続時間の確率過程に対して, 発展・応用されてきた. 一方, この手法を応用上重要な多次元の場合に拡張する問題は, 長らく未解決であったが, 2011年に著者たちによるブレイクスルーがあり, 現在までの研究で予測理論的手法を離散時間多次元過程に拡張するアプローチの基礎が確立されてきている. 次節に述べる結果は, それらのうちの最新のものである.

上記の予測理論的手法により得られた結果の一部は, 単位円周上の直交多項式 (Orthogonal Polynomials on the Unit Circle, 略して **OPUC**) の理論と密接な関係がある. 実際, Barry Simon は 2005年に AMS より出版した OPUC に関する2分冊の本 [Si1, Si2] の中で, OPUC における中心的な問題として「単位円周上の確率測度とそれに付随する **Verblunsky** 係数の間の関係」の解明を挙げているが, 単位円周上の確率測度を定常時系列のスペクトル測度と見ると,

$$\text{Verblunsky 係数} = \text{偏相関関数}$$

であり, そして予測理論的手法は元々偏相関関数を解析する目的で導入されたものである. すなわち, 上記の予測理論的手法により得られた結果のうち偏相関関数に関するものは, Verblunsky 係数に関する結果に他ならない. 尚, Verblunsky 係数は, 最近の量子ウォークの CGMV 法 ([CGMV]) でも重要な役割を果たしている.

一方, 予測理論的手法で本質的な役割を果たすが, Simon の本には書かれていない重要な概念として, **rigid 関数**と**相係数** (phase coefficients あるいは Nehari 列ともいう) の二つがある. これらは, 上記の予測理論的手法の研究中に陰に陽に出現していたものであるが, 最近の笠原–Bingham [KB] によってその事情が非常に明快に解明された. これら

rigid 関数と相係数は，上記の研究以外にも解析学の様々な場面に登場する不思議な概念である (rigid 関数が係わる様々な結果が Sarason [Sa2, Ch. X] で解説されている)．尚，rigid 関数の命名は Sarason [Sa1] によるが，先に中路 [N1] により **strongly outer 関数**の名で導入されていた．

上記の 1 次元での予測理論的手法により得られる結果の応用として，確率解析を非マルコフの設定で用いるための一つのアプローチが得られている ([AIK], [INA], [IN] 等)．しかし，そのような動的従属性解析手法が真に必要とされるのは，実際は多次元の設定においてである．例えば，ファイナンスの信用リスクへの問題を考えても，金融市場にプレーヤーが 2 人以上いて初めて信用リスクが意味を成す．著者たちは，既に 2005 年に予測理論的手法を多次元に拡張する問題に取り組んだが，そのときは結局，うまくいかず，この問題は本質的かつ困難な未解決問題として残った．

上に述べたように，この問題に関し 2011 年にブレイクスルーがあった．即ち，離散時間の場合に多次元でも通用する予測理論的新手法の新アプローチが著者たちにより発見された．そして現在までの研究で，[I1], [I2], [I3], [IK1], [IK2], [KB] 等の離散時間過程の場合の結果の多くが多次元に拡張されている．2013 年になって，さらに進展があった．すなわち，rigid 関数の行列値版の適切な定義を与えることにより完全非決定性 (= 予測理論的手法が働くための必要十分条件) の多次元での特徴付けが得られた．次節ではこの多次元 rigid 関数の定義とそれに関する結果について紹介する．

2　多次元の rigid 関数に関する結果

$\mathbb{T}$ と $\mathbb{D}$ をそれぞれ $\mathbb{C}$ の単位円と開単位円板とする．$1 \le p \le \infty$ に対し，L^p は $\mathbb{T}$ 上の (正規化された Lebegue 測度に関しての) 通常の Lebesgue 空間とする．$\mathscr{M} := M_d(\mathbb{C})$ を複素 $d \times d$ 行列の空間，$\mathscr{V} := \mathbb{C}^d$ を縦ベクトルの成す Euclid 空間とする．$\mathbb{T}$ 上の $\mathscr{M}$-値関数 f は $\det f \neq 0$ a.e. の時，**非退化**とよばれる．$L^p_{\mathscr{M}}$ を ($L^p_{\mathscr{V}}$ を) $\mathbb{T}$ 上の $\mathscr{M}$-値 ($\mathscr{V}$-値) 関数の Lebesgue 空間とする．Hardy 空間 $H^p_{\mathscr{M}}$ は次により定義できる:

$$H^p_{\mathscr{M}} := \left\{ f \in L^p_{\mathscr{M}} \,\middle|\, \int_0^{2\pi} e^{in\theta} f(e^{i\theta}) d\theta = 0 \ \text{ for } n = 1, 2, \ldots \right\}.$$

Hardy 空間 $H^p_{\mathscr{V}}$ も，$\mathscr{M}$ を $\mathscr{V}$ に置き換えることにより同様に定義される．非退化の $g \in H^p_{\mathscr{M}}$ が **outer** であるとは，$\det g(z)$ が 1 次元の outer 関数であること，すなわち，$c = \det g(0)/|\det g(0)|$ に対し次が成り立つことである:

$$\det g(z) = c \exp\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \log|\det g(e^{i\theta})| d\theta \right) \qquad (z \in \mathbb{D}).$$

尚，2 次元以上 ($d \ge 2$) の場合の outer 関数 g 自身には，このような明示的な表示による特徴付けは知られていない．

次のようにおく:

$$\mathscr{D} := \{(f, f_\sharp) \in H^2_{\mathscr{M}} \times H^2_{\mathscr{M}} : f \text{ は非退化}, f_\sharp \text{ は outer}, \ f^* f = f_\sharp f_\sharp^*\}.$$

任意の非退化関数 $F \in H^1_{\mathscr{M}}$ は，次の形の分解を持つ:

$$F = f f_\sharp, \qquad (f, f_\sharp) \in \mathscr{D} \tag{2.1}$$

(Helson–Lowdenslager[HL] を見よ). 我々が **HL-分解**とよぶこの F の分解は，定ユニタリ行列の因子の不定性を除いて一意である．一方，任意の非退化関数 $f \in H^2_{\mathscr{M}}$ に対し，$(f, f_\sharp) \in \mathscr{D}$ を満たす $f_\sharp$ が存在し, 定ユニタリ行列の因子の不定性を除いて一意である．

非退化関数 $F \in H^1_{\mathscr{M}}$ に対し，U_F をそのユニタリ・パートとする．すなわち，

$$F = U_F \sqrt{F^* F} = \sqrt{F F^*}\, U_F.$$

すると，HL-分解 $F = f f_\sharp$ により, 次が成り立つ:

$$U_F = f (f_\sharp^*)^{-1} = (f^*)^{-1} f_\sharp. \tag{2.2}$$

次が我々の多次元 (非退化) の場合の rigid 関数の定義である.

定義 2.1 (多次元 rigid 関数). 非退化関数 $F \in H^1_{\mathscr{M}}$ が **rigid** であるとは次が成り立つことである: 任意の非退化関数 $G \in H^1_{\mathscr{M}}$ に対し $G = g g_\sharp$ をその HL-分解とするとき，

$$U_F = U_G \quad \Longrightarrow \quad G = f k f_\sharp \text{ がある定数の正定値な } k \in \mathscr{M} \text{ に対して成り立つ.}$$

上の定義の意味の rigid 関数は outer であるが, 一方，rigid でない outer 関数が存在することを示すことができる (1 次元と同様ということである).

次のようにおく:

$$H^{2-}_{\mathscr{V}} := \left\{ f \in L^2_{\mathscr{V}} \;\middle|\; \int_0^{2\pi} e^{in\theta} f(e^{i\theta}) d\theta = 0 \ \text{ for } n = 0, -1, -2, \dots \right\}.$$

定理 2.2. $(f, f_\sharp) \in \mathscr{D}$ とし $F := f f_\sharp$ とおく．すると，次の三つの条件は同値である:

(1) F は *rigid* である.

(2) $(g, g_\sharp) \in \mathscr{D}$, $G = g g_\sharp$, $U_F = U_G \;\Rightarrow\; g = fc$ がある定数の可逆な $c \in \mathscr{M}$ に対して成り立つ.

(3) $U_F H^{2-}_{\mathscr{V}} \cap H^2_{\mathscr{V}} = \{0\}$.

次に, rigid 関数と定常過程の完全非決定性に関する 1 次元の結果を多次元に拡張することを考えよう.

$X = (X_j)_{j \in \mathbb{Z}}$, $X_j = (X_{j,1}, \dots, X_{j,d})$, を平均 0 の複素 d-次元弱定常過程とする．我々は X は純非決定的 (purely non-deterministic, PND) であり full rank とする．すると，

$$\det w > 0 \quad \text{a.e.}, \qquad \log \det w \in L^1$$

を満たす非負定値エルミート行列に値を取る関数 $w \in L^1_{\mathscr{M}}$ があって

$$\mathbb{E}[X_j^* X_0] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ij\theta} w(\theta) d\theta \qquad (j \in \mathbb{Z})$$

が成り立つ.

密度 w は次のように分解される:

$$w = h^* h = h_\sharp h_\sharp^*. \tag{2.3}$$

ここで，h と $h_\sharp$ は $H^2_{\mathscr{M}}$ に属する outer 関数であり (cf. [HL]), これらの分解は定ユニタリ行列の因子を除いて一意である．1 次元 (d=1) の場合には，これらの分解は

$$w = |h|^2, \qquad h = h_\sharp$$

の形を取る．しかし，2 次元以上の場合には h と $h_\sharp$ の間に簡単な関係は知られていない．このことは，1 次元の場合の形式的な拡張によって 2 次元以上の結果を得ることはできないことを示唆している..

$I \subset \mathbb{R}$ に対し，H_I は成分 $\{X_{j,k} : j \in I \cap \mathbb{Z},\ k = 1, \dots, d\}$ たちが張る $L^2(\Omega, \mathscr{F}, P)$ の閉部分空間とする．

定義 2.3. 弱定常過程 X が**完全非決定的** (completely non-deterministic, CND) であるとは

$$H_{(-\infty,0]} \cap H_{[1,\infty)} = \{0\}$$

が成り立つことである．

次が成り立つことは割りと容易に分かる:

$$X \text{ は CND} \iff h(h_\sharp^*)^{-1} H^{2-}_{\mathscr{V}} \cap H^2_{\mathscr{V}} = \{0\}.$$

従って，定理 2.2 より次の定理が得られる．

定理 2.4. 次の 3 つの条件は同値である:

(1) $hh_\sharp$ は rigid.

(2) $(g, g_\sharp) \in \mathscr{D}$, $h(h_\sharp^*)^{-1} = g(g_\sharp^*)^{-1}$ ならば，$g = fc$ がある定可逆行列 $c \in \mathscr{M}$ に対して成り立つ．

(3) X は CND.

定理 2.2, 2.4 は，Levinson–McKean [LM], Bloomfield et al. [BJH], 中路 [N2] 等の結果の多次元への拡張と見ることができる．

最後に, CND 多次元定常過程に予測理論的手法を適用して得られる結果を 1 つ紹介する．

PND の弱定常過程 X に対し, 有限の過去 $X_0, X_1, \dots, X_{n-1}$ に基づく X_n の線形予測を $\hat{X}_n$ とし, 次のように書く:

$$\hat{X}_n = X_{n-1}\phi_{1,n} + X_{n-1}\phi_{2,n} + \dots + X_0\phi_{n,n}. \tag{2.4}$$

我々は第 n 番目の予測係数 $\phi_{n,n}$ に興味がある．1 次元の場合 $(d = 1)$ には, 列 $\{\phi_{n,n}\}_{n=1}^\infty$ は $\{X_n\}$ の**偏相関関数**とよばれるが, 一方 OPUC の分野ではこれはスペクトル測度 w の **Verblunsky 係数**とよばれる．

次のようにおく

$$v := h(0)^* h(0), \qquad v^\sharp := h_\sharp(0) h_\sharp(0)^*.$$

これらは，1-ステップの無限の過去あるいは無限の未来からの予測の誤差の分散にあたる．また，我々の議論において重要な枠割を果たす**相係数** (phase coefficients) γ_n を次により定義する:

$$\gamma_n := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{in\theta} h(h_\sharp^*)^{-1} d\theta. \tag{2.5}$$

次の定理は，1 次元の場合の [BIK] や [KB] の結果の多次元への拡張であり，$\phi_{n,n}$ の $n \to \infty$ での挙動などへの応用を持つ．また，元々この種の結果 (すなわち $\phi_{n,k}$ たちの γ_n にたちによる表現) は，[IK2] や [I3] で得られていたものである．

定理 2.5. X が CND ならば, $\phi_{n,n}$ は次の表現を持つ:

$$\phi_{n,n} = -\sqrt{v}^{-1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} {}^t\gamma_n (\Gamma_n^* \Gamma_n)^k e \right) \sqrt{v^\sharp} \qquad (n \in \mathbb{N}). \tag{2.6}$$

ここで, 次のようにおいた:

$$\gamma_n := \begin{pmatrix} \gamma_n \\ \gamma_{n+1} \\ \gamma_{n+2} \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \Gamma_n := \begin{pmatrix} \gamma_{n+1} & \gamma_{n+2} & \gamma_{n+3} & \cdots \\ \gamma_{n+2} & \gamma_{n+3} & \gamma_{n+4} & \cdots \\ \gamma_{n+3} & \gamma_{n+4} & \gamma_{n+5} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad e := \begin{pmatrix} \mathrm{id} \\ o \\ o \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

References

[AI] V. V. Anh and A. Inoue, Financial markets with memory I: Dynamic models, *Stochastic Anal. Appl.* **23** (2005), 275–300.

[AIK] V. V. Anh, A. Inoue and Y. Kasahara, Financial markets with memory II: Innovation processes and expected utility maximization, *Stochastic Anal. Appl.* **23** (2005), 301–328.

[BIK] N. H. Bingham, A. Inoue and Y. Kasahara, An explicit representation of Verblunsky coefficients, *Statist. Probab. Lett.*, **82** (2012), 403–410.

[BJH] P. Bloomfield, N. P. Jewell and E. Hayashi, Characterizations of completely nondeterministic stochastic processes, *Pacific J. Math.* **107** (1983), 307–317.

[CGMV] M. J. Cantero, F. A. Grünbaum, L. Moral and L. Velázquez, Matrix-valued Szeg"o polynomials and quantum random walks, *Commun. Pure Appl. Math.* **58** (2010), 464–507.

[HL] H. Helson and D. Lowdenslager, Prediction theory and Fourier series in several variables. *Acta Math.* **99** (1958), 165-202; II. *Acta Math.* **106** (1961) 175–213.

[I1] A. Inoue, Asymptotics for the partial autocorrelation function of a stationary process, *J. Anal. Math.* **81** (2000), 65–109.

[I2] A. Inoue, Asymptotic behavior for partial autocorrelation functions of fractional ARIMA processes, *Ann. Appl. Probab.* **12** (2002), 1471–1491.

[I3] A. Inoue, AR and MA representation of partial autocorrelation functions, with applications, *Probab. Theory Related Fields* **140** (2008), 523–551.

[IA1] A. Inoue and V. V. Anh, Prediction of fractional Brownian motion-type processes, *Stoch. Anal. Appl.* **25** (2007), 641–666.

[IA2] A. Inoue and V. V. Anh, Prediction of fractional processes with long-range dependence, *Hokkaido Math. J.* **41** (2012), 157–183.

[IK1] A. Inoue and Y. Kasahara, Partial autocorrelation functions of fractional ARIMA processes with negative degree of differencing, *J. Multivariate Anal.* **89** (2004), 135–147.

[IK2] A. Inoue and Y. Kasahara, Explicit representation of finite predictor coefficients and its applications, *Ann. Statist.* **34** (2006), 973–993.

[IKP] A. Inoue, Y. Kasahara and P. Phartyal, Baxter's inequality for fractional Brownian motion-type processes with Hurst index less than 1/2, *Statist. Probab. Lett.* **78** (2008), 2889–2894.

[IN] A. Inoue and Y. Nakano, Optimal long-term investment model with memory, *Appl. Math. Optim.* **55** (2007), **55** (2007), 93–122.

[INA] A. Inoue, Y. Nakano and V. V. Anh, Linear filtering of systems with memory and application to finance, *J. Appl. Math. Stoch. Anal.* (2006), Art. ID 53104, 26 pp.

[KB] Y. Kasahara and N. H. Bingham, Verblunsky coefficients and Nehari sequences, *Trans. Amer. Math. Soc.*, electronically published in 2013.

[LM] N. Levinson and H. P. McKean, Weighted trigonometrical approximation on R^1 with application to the germ field of a stationary Gaussian noise, *Acta Math.* **112** (1964), 99–143.

[N1] T. Nakazi, Exposed points and extremal problems in H^1, *J. Funct. Anal.* **53** (1983), 224–230.

[N2] T. Nakazi, Kernels of Toeplitz operators, *J. Math. So. Japan* **38** (1986), 607–616.

[Sa1] D. Sarason, Exposed points in H^1, *Oper. Theory Adv. Appl.* **41** (1989), 485–496.

[Sa2] D. Sarason, *Sub-Hardy Hilbert Spaces in the Unit Disk*, Wiley, 1994.

[Si1] B. Simon, *Orthogonal Polynomials on the Unit Circle. Part 1. Classical Theory.*, AMS, 2005.

[Si2] B. Simon, S., *Orthogonal Polynomials on the Unit Circle. Part 2. Spectral Theory.*, AMS, 2005.