

# “Stochastic Airy Operator” の定義と自己共役性

慶應義塾大学医学部 南 就将

Nariyuki Minami

School of Medicine, Keio University

## 1 序

Ramírez-Rider-Virág [RRV] は  $\beta$ -ensemble と呼ばれるサイズ  $n$  の三重対角型ランダム行列の, 上から  $k$  個までの固有値の組  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k$  に対して  $\{n^{1/6}(2\sqrt{n} - \lambda_j^{(n)})\}_{j=1}^k$  の結合分布が  $n \rightarrow \infty$  とするとき, 次の “Schrödinger 作用素” (stochastic Airy operator) の下から  $k$  個までの “固有値” の組に法則収束することを示した:

$$H = -\frac{d^2}{dt^2} + t + \frac{2}{\sqrt{\beta}} B'_\omega(t), \quad t \geq 0.$$

ただし  $H$  を  $t = 0$  における Dirichlet 境界条件の下で考える. また  $\{B_\omega(t)\}$  は標準 Brown 運動,  $B'_\omega(t)$  はその見本関数の形式的な微分である. [RRV] では  $H$  をある関数空間から Schwartz 超関数の空間へのランダムな線形写像と定義しているが, 実は  $H$  を Hilbert 空間  $L^2(\mathbf{R}_+)$  内の自己共役作用素として自然に実現することができる. すなわち次が成り立つ:

**定理 1.** 各々の  $\omega$  に対して  $H$  は Hilbert 空間  $L^2(\mathbf{R}_+)$  の閉対称作用素として実現され, それは確率 1 で自己共役であり, 離散スペクトルのみを持つ.

[RRV] では  $H$  の固有値系列を “stochastic Airy spectrum” と呼んでいるが, 上記の定理によればそれはある自己共役作用素の離散スペクトルであるにすぎない.

定理 1 はより一般的な次の定理に含まれる.

**定理 2**  $p(t)$  は  $\mathbf{R}_+ = [0, \infty)$  上の実数値連続関数で, ある  $\alpha > 0$  に対して  $\liminf_{t \rightarrow \infty} p(t)/t^\alpha > 0$  を満たすものとする. また  $\{X_\omega\}$  は Hurst parameter  $h \in (0, 1)$  の fractional Brownian motion ([N]) とする. このとき, 任意の実数  $c$  に対して, 原点  $t = 0$  における Dirichlet 境界条件の下で,

$$H = -\frac{d^2}{dt^2} + p(t) + cX'_\omega(t)$$

は Hilbert 空間  $L^2(\mathbf{R}_+)$  の閉対称作用素として実現され, それは確率 1 で自己共役であり, 離散スペクトルのみを持つ.

詳しくは [M3] を見られたい.

## 2 作用素の定義

$Q(t)$ ,  $0 \leq t < \infty$ , を  $Q(0) = 0$  なる実連続関数とする.

定義 1. ([M1], [M2])  $u$  が関数空間  $\mathcal{C}(Q)$  に属するとは,  $u$  が絶対連続であって, ある  $\beta \in \mathbb{C}$  とある  $v \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$  に対して

$$u'(t) = \beta + Q(t)u(t) - \int_0^t \{Q(y)u'(y) + v(y)\} dy$$

が成り立つことである.  $u \in \mathcal{C}(Q)$  に対して  $H(Q)u = v$  と定義する.

さらに関数空間

$$\mathcal{D}(Q) = \{u \in \mathcal{C}(Q) \cap L^2(\mathbb{R}_+); Hu \in L^2(\mathbb{R}_+), u(0) = 0\},$$

$$\mathcal{D}^S(Q) = \{u \in \mathcal{D}(Q); \lim_{t \rightarrow \infty} [u, v](t) = 0, \forall v \in \mathcal{D}(Q)\}$$

を定義する. ただし  $[u, v](t) = u(t)v'(t) - u'(t)v(t)$  である.

$$H_0(Q) = H|_{\mathcal{D}(Q)}, \quad H_0^S(Q) = H|_{\mathcal{D}^S(Q)}$$

とおくと Stone[S] にならって  $H_0(Q)^* = H_0^S(Q)$ ,  $H_0^S(Q)^* = H_0(Q)$  を示すことができる. 特に  $H_0^S(Q)$  は閉対称作用素である.  $H_0^S(Q)$  において  $Q(t) = \frac{1}{2}t^2 + \frac{2}{\sqrt{\beta}}B_\omega(t)$ , あるいはより一般に  $Q(t) = X_\omega(t) + \int_0^t p(y)dy$  ととれば stochastic Airy operator は  $L^2(\mathbb{R}_+)$  における閉対称作用素として実現される. これを  $H_0^S(\omega)$  で表す.

## 3 自己共役性とスペクトルの離散性

定理 2 の設定の下で  $H_0^S(\omega)$  の確率 1 での自己共役性を示すために,

$$L := \left\{ f; f \text{ is absolutely continuous on } \mathbb{R}_+, f(0) = 0, \int_0^\infty \{|f'(t)|^2 + (1+p(t))|f(t)|^2\} dt < \infty \right\}$$

を定義域とする 2 次形式

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\omega(u, v) &= \int_0^\infty \{u'(t)\overline{v'(t)} + (p(t) + ca'_\omega(t))u(t)\overline{v(t)}\} dt \\ &\quad - \int_0^\infty c(X_\omega(t) - a_\omega(t))(u(t)\overline{v(t)})' dt \end{aligned}$$

を考える (cf [FM]). ただし  $a_\omega(t) = \int_t^{t+1} X_\omega(s)ds$  とおいた.

[N] の Theorem 4.1 を用いると, 次の補題を容易に示すことができる:

補題  $\{X_\omega(t)\}$  が Hurst parameter  $h \in (0, 1)$  の fractional Brownian motion ならば, 確率 1 で

$$|X_\omega(t) - a_\omega(t)| = \mathcal{O}(\sqrt{\log(1+t)}), \quad |a'_\omega(t)| = \mathcal{O}(\sqrt{\log(1+t)}), \quad t \rightarrow \infty$$

が成り立つ.

また, 次の命題の証明も難しくない.

命題. 補題の主張を成り立たせる任意の  $\omega$  に対して,  $\mathcal{E}_\omega$  は  $L$  で定義された下に半有界な閉形式であり, かつ次の意味で完全連続である:  $\mathcal{E}_\omega + \gamma_\omega$  が狭義に正となるように  $\gamma_\omega$  を選ぶと,

$$\sup_n \{\mathcal{E}_\omega(u_n, u_n) + \gamma_\omega(u_n, u_n)\} < \infty$$

を満たす任意の列  $\{u_n\} \subset L^*$  は  $L^2$ -収束する部分列を含む.

したがって一般論 ([RS1] Theorem VIII.15, [RS2] Theorem XIII.64) により  $L$  のある部分空間  $D_\omega$  を定義域とする自己共役作用素  $A_\omega$  が存在して

$$\mathcal{E}_\omega(u, v) = (u, A_\omega v), \quad u, v \in D_\omega$$

を満たし, さらに  $A_\omega$  は下半有界で離散スペクトルのみを持つ.

この  $A_\omega$  が §2 で定義した  $H_0^S(\omega)$  と一致することを示すためにまず  $A_\omega \subset H_0(\omega)$  が成り立つことに注意する. これより  $A_\omega$  の固有関数は  $H_0(\omega)u = \lambda u$  の解であり, 特に  $\lambda$  が  $A_\omega$  の最低固有値であるとき, 対応する固有関数は  $(0, \infty)$  においてゼロ点を持たないことが振動定理により示される. したがって Hartman [H] の定理により  $H_0(\omega)$  は  $+\infty$  において極限点型となり,  $H_0(\omega)$  は自己共役である. すなわち  $H_0(\omega) = H_0(\omega)^* = H_0^S(\omega) \subset A_\omega \subset H_0(\omega)$  が得られる.

## 4 今後の課題

[RRV] が示しているのは,  $\beta$ -ensemble として定義されるランダム行列を  $H_n^\beta$  とするとき, stochastic Airy operator  $H$  が  $n^{1/6}(2\sqrt{n} - H_n^\beta)$  の “連続極限” になるということであるが, stochastic Airy operator が通常の意味での自己共役作用素として定義された以上は, この連続極限の問題にも, 作用素の収束にともなうスペクトル速度の収束という形での定式化が与えられるべきであろう.

小谷眞一氏は [K] において

$$Lu = -\frac{d(du/dx) - udQ}{dM}$$

という形の一般化 Sturm-Liouville 作用素を考察している. ただし  $M$  は直線上の Radon 測度,  $Q(t)$  は有界変動関数である.  $L$  の定義を,  $Q(t)$  が必ずしも有界変動

でない場合にまで拡張し,  $(M, Q)$  が連続的に変化するとき, 対応するスペクトル測度が収束する, という定理を示すことができれば有用と思われる. なぜならば, 三重対角行列はすなわち 2 階差分作用素であり, それは  $M$  として離散的な測度を考えれば, 上記の一般化 Sturm-Liouville 作用素の形に書かれるからである ([M4]).

ところで, ランダム行列の中には三重対角型に変換できないものも当然ある. そのような場合にも “連続極限” を考えることができるであろうか? 行列サイズ  $n$  を大きくするにつれて “漸近的に” 三重対角化されるようなランダム行列のクラスが設定できれば, ランダム行列の固有値分布の普遍性の問題に新しいアプローチができるかもしれないと考えている.

## References

- [FM] M. Fukushima, S. Nakao: On spectra of the Schrödinger operator with a white Gaussian noise potential. *Z. Wahr. verw. Geb.*, vol.37 (1977), 267-274
- [H] Ph. Hartman: Differential equations with non-oscillatory eigenfunctions. *Duke Math. J.*, vol.15 (1948) 697-709
- [K] S. Kotani: On asymptotic behavior of the spectra of a one-dimensional Hamiltonian with a certain random coefficient. *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* vol.12 (1976) 447-492
- [M1] N. Minami: Schrödinger operator with potential which is the derivative of a temporally homogeneous Lévy process. *Probability Theory and Mathematical Physics*, Lect. Notes Math. 1299 (1988), 289-304
- [M2] N. Minami: Random Schrödinger operator with a constant electric field. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, vol.56 (1992) 307-344
- [M3] N. Minami: Definition and self-adjointness of the stochastic Airy operator. arXiv: 1401.0853
- [M4] N. Minami: An extension of Kotani's theorem to random generalized Sturm-Liouville operators. *Commun. Math. Phys.* vol.103 (1986) 387-402
- [N] I. Nourdin: *Selected Aspects of Fractional Brownian Motion*. Springer-Verlag Italia (2012)
- [RRV] J.A. Ramírez, B. Rider, B. Virág: Beta ensembles, stochastic Airy spectrum, and a diffusion. *J. AMS* vol. 24 (2011) 919-944
- [RS1] M. Reed and B. Simon: *Methods of Modern Mathematical Physics vol.I: Functional Analysis*. Academic Press (1980)
- [RS2] M. Reed and B. Simon: *Methods of Modern Mathematical Physics vol.IV: Analysis of Operators*. Academic Press (1978)
- [S] M.H. Stone: Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis, *Amer. Math. Soc. Colloq. Publ.* vol. XV (1932)