数理解析研究所講究録
第 1903 巻 2014 年 209-214

臨界的なシュレディンガー形式における ファインマン・カッツ汎関数の時間増大度

東北大学大学院理学研究科数学専攻 D3　和田正樹
Masaki Wada
Mathematical Institute, Tohoku University

2013 年 12 月 19 日発表

1　背景と動機

1.1　α-安定型過程と熱核評価

$\{X_t\}_{t\geq 0}$ を $\mathbb{R}^d$ 上の対称 α-安定過程 $(0<\alpha<2)$ とする。このようなマルコフ過程は、以下の式を満たすものとして特徴付けることができる。

$$\mathbb{E}_0[\exp(iu\cdot X_t)]=\exp(-t|u|^{\alpha}) \qquad (u\in\mathbb{R}^d) \tag{1}$$

また、$\{X_t\}_{t\geq 0}$ に対応する生成作用素 $\mathscr{L}$ は、$\mathscr{L}=-(-\Delta)^{\alpha/2}$ で与えられ、$L^2(\mathbb{R}^d)$ 上のディリクレ形式 $(\mathscr{E},\mathscr{F})$ は次のように定められる。

$$\mathscr{E}(u,u)=-(\mathscr{L}u,u)=\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}(u(y)-u(x))^2\frac{c_\alpha}{|x-y|^{d+\alpha}}dxdy, \qquad \mathscr{F}=\overline{\{C_c(\mathbb{R}^d)\}}^{\mathscr{E}_1^{1/2}}$$

ここで、c_α は適切な定数、$C_c(\mathbb{R}^d)$ はコンパクト台をもつ連続関数全体の集合、$\mathscr{E}_1$ は、$\mathscr{E}_1(u,u)=\mathscr{E}(u,u)+\int_{\mathbb{R}^d}u^2(x)dx$ で定まるノルムである。対称 α-安定過程をより一般化したものに、α-安定型過程がある。これを $\{Y_t\}_{t\geq 0}$ と表し、対応する生成作用素を $\tilde{\mathscr{L}}$ とすると、そのディリクレ形式 $(\tilde{\mathscr{E}},\tilde{\mathscr{F}})$ は

$$\tilde{\mathscr{E}}(u,u)=-(\tilde{\mathscr{L}}u,u)=\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}(u(y)-u(x))^2J(x,y)dxdy, \qquad \tilde{\mathscr{F}}=\overline{\{C_c(\mathbb{R}^d)\}}^{\tilde{\mathscr{E}}_1^{1/2}}$$

で与えられる。ここで、$J(x,y)$ は飛躍測度と呼ばれ、適切な正定数 C_1,C_2 により

$$\frac{C_1}{|x-y|^{d+\alpha}}\leq J(x,y)=J(y,x)\leq\frac{C_2}{|x-y|^{d+\alpha}}$$

を満たす。方程式 $\partial u/\partial t=\tilde{\mathscr{L}}u$ の基本解 $\tilde{p}(t,x,y)$ はマルコフ過程 $\{Y_t\}_{t\geq 0}$ の推移確率密度関数に等しい。$\tilde{p}(t,x,y)$ は具体的な関数を用いて上下から評価されることが、Chen・熊谷 [1] により、示されている。

定理 1. *(Chen・熊谷 [1])*
α-安定型過程 $\{Y_t\}_{t\geq 0}$ の推移確率密度関数 $\tilde{p}(t,x,y)$ は、適切な正定数 C_1,C_2 により、以下の評価式を満たす。

$$C_1\left(t^{-\frac{d}{\alpha}}\wedge\frac{t}{|x-y|^{d+\alpha}}\right)\leq\tilde{p}(t,x,y)\leq C_2\left(t^{-\frac{d}{\alpha}}\wedge\frac{t}{|x-y|^{d+\alpha}}\right) \tag{2}$$

1.2 シュレディンガー形式と基本解の安定性

以下、対称 α-安定過程 $\{X_t\}_{t\geq 0}$ 及びディリクレ形式 $(\mathscr{E},\mathscr{F})$ は、過渡的であるとする。すなわち、$\{X_t\}_{t\geq 0}$ の推移確率密度関数を $p(t,x,y)$ としたとき、グリーン核 $G(x,y)$ は

$$G(x,y) := \int_0^\infty p(t,x,y)dt < \infty, \qquad (x \neq y) \tag{3}$$

を満たしているものとする。尚、定理 1 を踏まえると、$\{X_t\}_{t\geq 0}$ の過渡性は $\alpha < d$ に同値である。次に、μ を加藤クラスに属すグリーン緊密な正値ラドン測度 $(\mu \in \mathscr{K}_\infty)$ とする。すなわち以下の 2 条件を満たすとする。

(イ) β 次レゾルベント $G_\beta(x,y) = \int_0^\infty e^{-\beta t}p(t,x,y)dt$ において、$\lim_{\beta\to\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} G_\beta(x,y)\mu(dy) = 0$ が成立する。

(ロ) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して、コンパクトな集合 K 及び $\delta > 0$ を適切に選べば、$\mu(B) < \delta$ かつ $B \subset K$ となる任意の B に対して $\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\int_{K^c\cup B} G(x,y)\mu(dy) < \varepsilon$ が成立する。

ここで、シュレディンガー形式 $(\mathscr{E}^\mu,\mathscr{F})$ を

$$\mathscr{E}^\mu(u,u) = \mathscr{E}(u,u) - \int_{\mathbb{R}^d} u^2 d\mu$$

で与える。シュレディンガー形式 $(\mathscr{E}^\mu,\mathscr{F})$ に対応する生成作用素を $\mathscr{L}^\mu$ で表し、方程式 $\partial u/\partial t = \mathscr{L}^\mu u$ の基本解を $p^\mu(t,x,y)$ とする。$p^\mu(t,x,y)$ が正定数を選び直すことで、$p(t,x,y)$ の上下評価 (2) を満たすとき、基本解の安定性が成立しているという。基本解の安定性が成立するために課すべき μ の条件は、必要十分の形で [10] にて与えられている。

定理 2. *(W. [10])*
ディリクレ形式 $(\mathscr{E},\mathscr{F})$ は過渡的で、測度 $\mu \in \mathscr{K}_\infty$ はエネルギー有限、すなわち

$$\iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} G(x,y)\mu(dx)\mu(dy) < \infty \tag{4}$$

を満たしているとする。このとき、基本解の安定性が成立するための必要十分条件は

$$\inf\left\{\mathscr{E}(u,u) \mid u \in \mathscr{F}, \int_{\mathbb{R}^d} u^2 d\mu = 1\right\} > 1 \tag{5}$$

を満たすことである。

式 (5) は、元のディリクレ形式 $(\mathscr{E},\mathscr{F})$ に対する μ の小ささを表しており、このとき μ は劣臨界的であるという。この結果は同じ問題をブラウン運動について扱った竹田 [6] の結果を対称 α-安定過程に拡張したものである。定理 2 を示すうえで鍵になることは、$\mu \in \mathscr{K}_\infty$ における以下の命題である。

命題 3. $\mu \in \mathscr{K}_\infty$ において、以下の *3* 条件は互いに同値である。

(i) μ は劣臨界的、すなわち式 (5) が成立する。

(ii) $x \neq y$ に対して $G^\mu(x,y) = \int_0^\infty p^\mu(t,x,y)dt < \infty$ である。

(iii) μ とルヴューズ対応する正値連続加法的汎関数 A_t^μ において、$\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\mathbb{E}_x[\exp(A_\infty^\mu)] < \infty$ である。

(定理 2 の証明概略)

式 (5) が必要であること：(3) 及び、基本解の安定性が成立することから命題 3 の (ii) が成立するため、μ は式 (5) が成立していなければならない。

式 (5) が十分であること：命題 3 の条件 (iii) より、$h(x)=\mathbb{E}_x[\exp(A_\infty^\mu)]$ と定めると、正定数 C_1 により $1\le h(x)\le C_1$ が満たされている。$P_t^\mu f(x)=\mathbb{E}_x[\exp(A_t^\mu)f(X_t)]$ で定まるファインマン・カッツ半群の関数 $h(x)$ によるドゥーブ変換、$\{P_t^{\mu,h}\}_{t\ge 0}$ を

$$P_t^{\mu,h}f(x)=\mathbb{E}_x\left[\frac{h(X_t)}{h(X_0)}\exp(A_t^\mu)f(X_t)\right]$$

により与える。これは、$L^2(h^2\cdot m)$ 上の半群を与え、それに対応するディリクレ形式 $(\tilde{\mathscr{E}},\tilde{\mathscr{F}})$ が

$$\tilde{\mathscr{E}}(u,u)=\iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}(u(y)-u(x))^2\frac{c_\alpha h(x)h(y)}{|x-y|^{d+\alpha}}dxdy \qquad \tilde{\mathscr{F}}=\mathscr{F}$$

により与えられる。$1\le h(x)\le C_1$ より、これは α-安定型過程に対応するディリクレ形式にほかならず、その推移確率密度関数 $p^\mu(t,x,y)/h(x)h(y)$ は $p(t,x,y)$ と同様の評価式をもつ。$p^\mu(t,x,y)$ についても同様である。

注意 4. 定理 2 は、[10] ではマルコフ過程が α-安定型過程や、相対論的 α-安定型過程のときでも示されている。また、金・桑江 [3] により、ドゥーブの h-変換の適用範囲を拡張することで、定理 2 の前提条件、μ のエネルギー有限性 (4) は、課さなくてもよくなる。また、金・桑江 [4] では、ポテンシャルを非局所なものも含めた形で基本解の安定性について扱っている。

1.3 考えたい問題

μ の劣臨界性に対立する概念に以下の 2 点がある。

定義 5. (a) μ が臨界的であるとは、以下の式が成立することである。

$$\inf\left\{\mathscr{E}(u,u)\mid u\in\mathscr{F},\int_{\mathbb{R}^d}u^2d\mu=1\right\}=1$$

(b) μ が優臨界的であるとは、以下の式が成立することである。

$$\inf\left\{\mathscr{E}(u,u)\mid u\in\mathscr{F},\int_{\mathbb{R}^d}u^2d\mu=1\right\}<1$$

これらの場合については、基本解 $p^\mu(t,x,y)$ は $p(t,x,y)$ とは全く異なる上下評価をもつことが、定理 2 によりわかる。しかしながら、$p^\mu(t,x,y)$ の評価については、元のマルコフ過程がブラウン運動の場合であっても、確立されているのは一部の場合に限られている。そこで、$p^\mu(t,x,y)$ の振る舞いを考える前に、$p^\mu(t,x,y)$ の y による空間積分

$$\mathbb{E}_x[\exp(A_t^\mu)]=\int_{\mathbb{R}^d}p^\mu(t,x,y)dy$$

を考える。更に μ の劣臨界性と同値な条件の一つに命題 3 の (iii) がある。したがって、μ が臨界的・優臨界的なとき、$\mathbb{E}_x[\exp(A_t^\mu)]$ は $t\to\infty$ とすると発散することがわかる。$p^\mu(t,x,y)$ の具体的な評価を行うための一歩として、期待値 $\mathbb{E}_x[\exp(A_t^\mu)]$ の時間無限大における発散の挙動を考えたい。

2　主結果とその証明概略

2.1　先行結果

期待値 $\mathbb{E}_x[\exp(A_t^\mu)]$ の増大度に関する先行結果として、次のようなものがある。

定理 6. *(竹田 [7])*
$\{X_t\}_{t\geq 0}$ は対称 α-安定過程、正値測度は $\mu \in \mathscr{K}_\infty$ を満たすとする。このとき、期待値 $\mathbb{E}_x[\exp(A_t^\mu)]$ は以下を満たす。

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\mathbb{E}_x[\exp(A_t^\mu)] = -\inf\left\{\mathscr{E}^\mu(u,u) \mid \int_{\mathbb{R}^d}u^2(x)dx = 1\right\} =: C(\mu)$$

更に、μ が優臨界的であることは $C(\mu)>0$ であることと同値であることから、μ が優臨界的なときは、期待値 $\mathbb{E}_x[\exp(A_t^\mu)]$ は指数関数的に増大することが分かる。一方、μ が臨界的なときは、$C(\mu)=0$ であるので、この定理のみでは具体的な $\mathbb{E}_x[\exp(A_t^\mu)]$ の増大度が得られず、工夫が必要である。そこで、以下では μ が臨界的なときを考えるものとする。

$\{X_t\}_{t\geq 0}$ がブラウン運動の場合には、Simon による [5] や Cranston・Koralov らによる [2] の結果がある。

定理 7. *(Simon [5], Cranston, Koralov et al. [2])*
$\{X_t\}_{t\geq 0}$ は $\mathbb{R}^d$ 上のブラウン運動、測度 μ は臨界的であるとする。更に μ は $\mathbb{R}^d$ 上のルベーグ測度 m に対して絶対連続で、$V\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ により、$\mu = V\cdot m$ と表されるとする。$h(x)$ を $(-\Delta - V)h(x)=0$ の解とする。期待値 $\mathbb{E}_x[\exp(A_t^\mu)]$ は次元 d に応じて $t\to\infty$ で以下の評価をもつ。

$$\mathbb{E}_x[\exp(A_t^\mu)] \sim \begin{cases} C_1 h(x)\cdot t^{1/2} & (d=3)\\ C_2 h(x)\cdot t/\log t & (d=4)\\ C_3 h(x)\cdot t & (d\geq 5)\end{cases}$$

また、$\{X_t\}_{t\geq 0}$ が対称 α-安定過程の場合のうち、$d/\alpha>2$ の場合については竹田による [8] の結果がある。

定理 8. *(竹田 [8])*
$\{X_t\}_{t\geq 0}$ は、$\mathbb{R}^d$ 上の対称 α-安定過程で、$d/\alpha>2$ を満たすとする。測度 $\mu\in\mathscr{K}_\infty$ が臨界的で、

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\left(|x|^{d-\alpha}\int_{\mathbb{R}^d}G(x,y)d\mu(y)\right)<\infty$$

を満たしているとする。$h(x)$ を $\mathscr{L}^\mu h(x)=0$ の解とする。このとき期待値 $\mathbb{E}_x[\exp(A_t^\mu)]$ は以下を満たす。

$$\mathbb{E}_x[\exp(A_t^\mu)] \sim C_1 h(x)\cdot t \qquad (t\to\infty)$$

これは、5 次元以上のブラウン運動での Simon [5] の結果を拡張したものであると考えられる。

2.2　主結果と証明概略

今回得られた結果は、$1<d/\alpha\leq 2$ のときの一例であり、以下の通りである。

定理 9. *(W. 2013)*
$\{X_t\}_{t\geq 0}$ は、$\mathbb{R}^2$ 上の *1* 次対称安定過程とする (すなわち、$d=2,\ \alpha=1$ である)。測度 μ は臨界的で、$V\in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ により、$\mu=V\cdot m$ と表されるとする。$h(x)$ を $\mathscr{L}^\mu h(x)=0$ の解とするとき、期待値 $\mathbb{E}_x[\exp(A_t^\mu)]$ は以下を満たす。

$$\mathbb{E}_x[\exp(A_t^\mu)]\sim C_1 h(x)\cdot t/\log t \qquad (t\to\infty)$$

一般に $d/\alpha>2$ のときには、調和関数 $h(x)$ が $L^2(\mathbb{R}^d)$ に属すので、h-変換した後のマルコフ過程は有限な不変測度 $h^2(x)dx$ 上に構成される。それゆえ、定理 8 はエルゴード定理を用いて確率論的な手法で示される。然るに、$1<d/\alpha\leq 2$ のときには $h(x)$ が $L^2(\mathbb{R}^d)$ に属さないため、この手法は用いることができない。このため、μ はルベーグ測度に対して絶対連続であるという条件を付帯しながら、解析的な手法で証明を行った。この手法は、ブラウン運動の場合の Simon のそれに倣ったものである。

(証明概略)
まずは、求めたい期待値 $\mathbb{E}_x[\exp(A_t^\mu)]$ を、マルコフ性とファインマン・カッツ半群を用いて以下のように変形する。

$$\mathbb{E}_x[\exp(A_t^\mu)]=P_t^\mu 1=1+\int_0^t P_s^\mu V ds \tag{6}$$

特性関数 (1) を逆フーリエ変換することで、熱核 $p(t,x,y)$ 及び、β 次のレゾルベントの $\beta\to 0$ での漸近展開が得られる。

$$p(t,x,y)=\frac{c_1 t}{(|x-y|^2+t^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$G_\beta(x,y)=G_0(x,y)+c_1\beta\log\beta-(c_2-c_3\log|x-y|)\beta+\mathscr{O}(\beta^2)$$

更にレゾルベント方程式を用いると、

$$G_\beta^\mu V=(1-L_\beta)^{-1}(G_\beta V)$$
$$L_\beta: L^\infty(\mathbb{R}^2)\to L^\infty(\mathbb{R}^2), \qquad L_\beta f(x)=G_\beta(Vf)(x)$$

が得られる。$G_\beta^\mu V$ の $\beta\to 0$ での振る舞いを見るためには、関数 $G_\beta V(x)$ と作用素 $(1-L_\beta)^{-1}$ の振る舞いを見る必要がある。

(a) 関数 $G_\beta V(x)$ については、$\beta\to 0$ のとき $G_0 V$ に一様収束する。
(b) L^2 における作用素 K_β を $K_\beta f(x)=V^{1/2}G_\beta(V^{1/2}f)(x)$ と定めたとき、作用素 L_β の固有値は作用素 K_β の固有値と同一である。特に K_β の最大固有値を e_β としたとき、K_β 及び e_β は $\beta\to 0$ で以下の漸近展開をもつ。

$$K_\beta=K_0+c_1\beta\log\beta D_1+c_2\beta D_2+\ldots \qquad e_\beta=1+c_1\beta\log\beta+c_2\beta+\ldots$$

このことから、作用素 $(1-L_\beta)^{-1}$ は、L_β における固有値 e_β の固有空間への射影作用素 P_β と $\beta\to 0$ のときに有限な極限をもつ、ノルム連続な作用素 Q_β を用いることで、

$$(1-L_\beta)^{-1}=(1-e_\beta)^{-1}P_\beta+Q_\beta(1-P_\beta)$$

と表すことができる。

以上の考察及び、l を適切な線形汎関数として、$P_0\psi(x)=h(x)l(\psi)$ が成立することから

$$\lim_{\beta\to 0}-\beta\log\beta G_\beta^\mu V(x)=C_1h(x)$$

を満たすことがわかる。$G_\beta^\mu V(x)$ の $\beta\to 0$ での振る舞いと、$\int_0^t P_s^\mu V(x)ds$ の $t\to\infty$ での振る舞いの間の関係を表したものに、ターベリアンの定理がある。これを適用することで、

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\log t}{t}\int_0^t P_s^\mu V ds=C_1h(x)$$

が得られ、(6) から所望の結果を得ることができる。

3 今後の展望

今回得られた主結果は、4 次元ブラウン運動での Simon [5] の結果を拡張したものと考えられる。竹田 [8] の結果や、ブラウン運動が $\alpha=2$ とする対称安定過程であることに注意すると、一般の対称 α-安定過程では、期待値 $\mathbb{E}_x[\exp(A_t^\mu)]$ の増大度は d/α に依存していると予想される。更に、$d/\alpha>2$ のときの [8] の結果を証明する手法は確率論的であるため、μ がルベーグ測度に対して絶対連続とは限っていない。今回の結果では解析的な証明を行っているため、μ は絶対連続としていたが、これも一般の測度に拡張できると思われる。尚、竹田・土田 [9] より、臨界的な測度 μ では、関数 $h(x)$ が $c_1(1\wedge|x|^{\alpha-d})\le h(x)\le c_2(1\wedge|x|^{\alpha-d})$ を満たすため、h-変換後のマルコフ過程の飛躍測度は $|x-y|$ のみならず、$|x|$ や $|y|$ にも依存する。このような飛躍測度をもつマルコフ過程の推移確率密度関数を評価する問題も興味深い。

参考文献

[1] Chen, Z.-Q., Kumagai, T.: Heat kernel estimates for stable-like processes on d-sets, Stoc. Proc. Appli. 108, 27–62, (2003).

[2] Cranston, M., Koralov, L., Molchanov, S., Vainberg, B.: Continuous model for homopolymers, J. Funct. Anal., 256, 2656–2696, (2009).

[3] Kim, D., Kuwae, K.: Analytic characterizations of gaugeability for generalized Feynman-Kac functionals, preprint (2012).

[4] Kim, D., Kuwae, K.: On a stability of heat kernel estimates under generalized non-local Feynman-Kac perturbations for stable-like processes, preprint (2013).

[5] Simon, B.: Large time behavior of the L^p norm of Schrödinger semigroups, J. Funct. Anal., 40, 66–83, (1981).

[6] Takeda, M.: Gaussian bounds of heat kernels for Schrödinger operators on Riemannian manifolds, Bull. London Math. Soc. 39, 85–94, (2007).

[7] Takeda, M.: Large deviations for additive functionals of symmetric stable processes, J. Theor. Probab. 21, 336–355, (2008)

[8] Takeda, M.: Feynman-Kac penalisations of symmetric stable processes, Elect. Comm. in Probab. 15, 32–43, (2010).

[9] Takeda, M., Tsuchida, K.: Differentiability of spectral functions for symmetric α-stable processes, Trans. Amer. Math. Soc. 359, 4031–4054, (2007).

[10] Wada, M.: Perturbation of Dirichlet forms and stability of fundamental solutions, Tohoku Math Journal, to appear.