数理解析研究所講究録
第 1903 巻 2014 年 215-223

無限積表現可能な多次元新谷ゼータ分布

立命館大学・理工学研究科　吉川　和宏
Kazuhiro Yoshikawa
Graduate School of Science and Engineering,
Ritsumeikan University

概要

多次元離散分布の特性関数について, 有益な情報が得られた結果は多くはない. それにはその特性関数となる (解析的な) 多変数関数を構成することも含まれる. しかし青山と中村 [4] では多重ゼータ関数を多変数関数に拡張することで, 多次元離散分布を導入することを考えた. それが多次元新谷ゼータ分布である. さらに青山と中村 [3] により, Euler 積表現可能な多次元新谷ゼータ分布の無限分解可能性が示されている. 本論説では青山と中村 [3], [4] に従って, その多次元新谷ゼータ分布あるいは Euler 積の拡張である多次元多重 Euler 積について概説する. 加えてそれらの具体例を元に [1] で得た結果も紹介する. これらの目的は多重無限級数と高次元積分論の関係を知ることである.

1　多次元のゼータ分布

1.1　Riemann ゼータ関数と分布

最初に Riemann ゼータ関数と Euler 積について述べる. それらについては, Apostol [5] 等を参照して頂きたい.

定義 1.1. $s=\sigma+it\in\mathbb{C}$ $(\sigma>1, t\in\mathbb{R})$ に対し, *Riemann* ゼータ関数は以下の無限級数 (1.1) で定義され, また *Euler* 積表示 (1.2) を持つ.

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} \tag{1.1}$$

$$= \prod_{p\in\mathbb{P}}\left(1-p^{-s}\right)^{-1}. \tag{1.2}$$

ここで $\mathbb{P}$ は素数全体である.

この無限級数及び無限積は $\sigma>1$ において絶対収束する. その絶対収束領域 $\sigma>1$ において, Riemann ゼータ関数を用いた以下の $\mathbb{R}$ 上の分布が古くから知られている.

定義 1.2 (Riemann ゼータ分布). $n\in\mathbb{N}$, $\sigma>1$ に対して, 確率変数 X_σ が以下の分布に従うとき *Riemann* ゼータ確率変数, その分布を *Riemann* ゼータ分布という.

$$\Pr\left(X_\sigma=\{-\log n\}\right)=\frac{n^{-\sigma}}{\zeta(\sigma)}.$$

この分布の特性関数は $f_\sigma(t) = \zeta(\sigma + \mathrm{i}t)/\zeta(\sigma)\,(t \in \mathbb{R})$ で与えられる．Riemann ゼータ分布は，その原型として Jessen and Wintner [9] に，正規化された形としては Khinchine [10] に記されている．また Gnedenko and Kolmogorov [7] には以下の命題がある．

命題 1.3 ([7]). *Riemann ゼータ分布は複合 Poisson 分布であり，その* $\mathbb{R}$ *上の Lévy 測度* N_σ *は以下のように書ける．*

$$N_\sigma(dx) = \sum_{p\in\mathbb{P}} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} p^{-r\sigma} \delta_{r\log p}(dx).$$

近年ではゼータ分布は，Hu and Lin [11] 等によって研究されている．彼らは Riemann ゼータ関数の代わりに Dirichlet 級数を用いて分布を考えた．さらにその Dirichlet 級数がある Euler 積で表現できるとき，その分布が無限分解可能であることも示している．

以後ゼータ関数は，その級数表示において Apostol [5] にあるように Hurwitz や Barnes 型等に拡張されている．また Euler 積においても，Steuding [13] 等に様々な拡張がなされた例がある．そして青山と中村 [3], [4] は，それら多重の級数と Euler 積の双方に着目し拡張することを考えた．さらにそれらを多変数化することにより，その正規化した関数が導入し得る多次元上の確率分布を提唱している．

1.2 多次元多重 Euler 積

青山と中村 [3] において，Euler 積を拡張した多次元多重 Euler 積について述べる．

定義 1.4 (多次元多重 Euler 積, [3]). $d, m, J \in \mathbb{N}$, $\vec{s} \in \mathbb{C}^d$ とする．ここで $-1 \le \alpha_j(l,p) \le 1$, $\vec{c}_l \in \mathbb{R}^d$, $1 \le l \le m$, $1 \le j \le J$, $p \in \mathbb{P}$ に対し，多次元多重オイラー積 $Z_E(\vec{s})$ を以下のように定義する．

$$Z_E(\vec{s}) = \prod_{p\in\mathbb{P}} \prod_{l=1}^{m} \prod_{j=1}^{J} \left(1 - \alpha_j(l,p) p^{-\langle \vec{c}_l, \vec{s}\rangle}\right)^{-1}.$$

ここで $\langle\cdot,\cdot\rangle$ は $\mathbb{R}^d$ 上の通常の内積であるが，$\vec{c}, \vec{\sigma}, \vec{t} \in \mathbb{R}^d$, $\vec{s} = \vec{\sigma} + \mathrm{i}\vec{t}$ に対しては $\langle \vec{c}, \vec{s}\rangle = \langle \vec{c}, \vec{\sigma}\rangle + \mathrm{i}\langle \vec{c}, \vec{t}\rangle$ とする．また無限積 $Z_E(\vec{s})$ は $\min_{1\le l\le m}\langle \vec{c}_l, \vec{\sigma}\rangle > 1$ を絶対収束領域として持つ．それは不等式 $\sum_{p\in\mathbb{P}} |\alpha_j(l,p)/p^{\langle \vec{c}_l,\vec{s}\rangle}| < \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{\langle \vec{c}_l,\vec{\sigma}\rangle} < \infty$ と $\prod_{p\in\mathbb{P}} \left(1 + |\alpha_j(l,p)p^{-\langle \vec{c}_l,\vec{s}\rangle}|\right) < \exp\left(\sum_{p\in\mathbb{P}} |\alpha_j(l,p)p^{-\langle \vec{c}_l,\vec{s}\rangle}|\right)$ からわかる．その領域において，関数 $f_{E,\vec{\sigma}}$ を次のように定義する．

$$f_{E,\vec{\sigma}}(\vec{t}) = \frac{Z_E(\vec{\sigma} + \mathrm{i}\vec{t})}{Z_E(\vec{\sigma})}, \quad \vec{t} \in \mathbb{R}^d.$$

多次元多重 Euler 積 Z_E を正規化した関数 $f_{E,\vec{\sigma}}$ は，常に特性関数になるというわけではない．しかし青山と中村 [3] は，ある条件下において関数 $f_{E,\vec{\sigma}}$ が特性関数になる必要十分条件があること，加えてそれが無限分解可能な特性関数になる条件であることを示し，その Lévy 測度も具体的に求めた．以下にあるのはその結果の一つである．

命題 1.5 ([3]). $\alpha_j(l,p) \in \{-1,0,1\}$ とする.

(i) $\mathbb{R}^d$ 上のベクトル $\vec{c}_1,\ldots,\vec{c}_m$ が一次独立である場合.

$f_{E,\vec{\sigma}}$ が特性関数である必要十分条件は, 任意の $1 \le l \le m$, $p \in \mathbb{P}$ に対して, $\sum_{j=1}^{J} \alpha_j(l,p) \ge 0$ が成り立つことである.

(ii) $\vec{c}_1 = \cdots = \vec{c}_m (\neq 0)$ の場合.

$f_{E,\vec{\sigma}}$ が特性関数である必要十分条件は, 任意の $p \in \mathbb{P}$ に対して, $\sum_{l=1}^{m} \sum_{j=1}^{J} \alpha_j(l,p) \ge 0$ が成り立つことである.

さらに (i) あるいは (ii) において $f_{E,\vec{\sigma}}$ が特性関数であるとき, それは $\mathbb{R}^d$ 上の複合 *Poisson* 分布（無限分解可能）となり, その *Lévy* 測度 $N_{\vec{\sigma}}$ は有限かつ次のように書ける.

$$N_{\vec{\sigma}}(dx) = \sum_{p\in\mathbb{P}} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{m} \sum_{j=1}^{J} \frac{1}{r} \alpha_j(l,p)^r p^{-r\langle \vec{c}_l, \vec{\sigma} \rangle} \delta_{-r\log p\,\vec{c}_l}(dx).$$

命題1.5は, 青山と中村 [3] にて厳密な証明が与えられているが, その概略を述べておく. まず無限積 $Z_E(\vec{s})$ の絶対収束領域 $\min_{1\le l\le m}\langle \vec{c}_l, \vec{\sigma}\rangle > 1$ において次の等式を得る.

$$\begin{aligned}
\log f_{E,\vec{\sigma}}(\vec{t}) &= \log \frac{Z_E(\vec{\sigma}+\mathrm{i}\vec{t})}{Z_E(\vec{\sigma})} = \sum_{p\in\mathbb{P}} \sum_{l=1}^{m} \sum_{j=1}^{J} \log \frac{1-\alpha_j(l,p)p^{-\langle \vec{c}_l,\vec{\sigma}\rangle}}{1-\alpha_j(l,p)p^{-\langle \vec{c}_l,\vec{\sigma}+\mathrm{i}\vec{t}\rangle}} \\
&= \sum_{p\in\mathbb{P}} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{m} \sum_{j=1}^{J} \frac{1}{r} \alpha_j(l,p)^r p^{-r\langle \vec{c}_l,\vec{\sigma}\rangle} \left(p^{-\mathrm{i}r\langle \vec{c}_l,\vec{t}\rangle} - 1\right) \\
&= \sum_{p\in\mathbb{P}} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{m} \sum_{j=1}^{J} \frac{1}{r} \alpha_j(l,p)^r p^{-r\langle \vec{c}_l,\vec{\sigma}\rangle} \left(e^{-\mathrm{i}r\langle \vec{c}_l,\vec{t}\rangle \log k} - 1\right) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} (e^{-\mathrm{i}\langle \vec{t},x\rangle} - 1) \sum_{p} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{m} \sum_{j=1}^{J} \frac{1}{r} \alpha_j(l,p)^r p^{-r\langle \vec{c}_l,\vec{\sigma}\rangle} \delta_{r\log p\,\vec{c}_l}(dx) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} (e^{\mathrm{i}\langle \vec{t},x\rangle} - 1) N_{\vec{\sigma}}(dx).
\end{aligned}$$

したがって $N_{\vec{\sigma}}$ が (有限) 測度であれば, $f_{E,\vec{\sigma}}$ は複合 Poisson 分布の特性関数になる. このことから命題の十分条件を得ることができる.

反対に $f_{E,\vec{\sigma}}$ が特性関数になる必要条件は Kronecker の近似定理 (Apostol [6] 参照) が鍵となる. その定理は, $r_1,\ldots,r_n$ を任意の実数, $\theta_1,\ldots,\theta_n$ を有理数上一次独立とするとき, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, 不等式 $|t\theta_k - h_k - r_k| < \epsilon$, $(1 \le k \le n)$ を満たす実数 t と整数 $h_1,\ldots,h_n$ が存在することを主張するものである. 命題1.5において $f_{E,\vec{\sigma}}$ が特性関数になる十分条件を満たさないと仮定する. このとき $\log p_1, \ldots, \log p_n$ (p_k は k 番目のに素数) の $\mathbb{Q}$ 上一次独立性と Kronecher の近似定理により $|f_{E,\vec{\sigma}}(\vec{t_0})| > 1$ となる $\vec{t_0} \in \mathbb{R}^d$ をとることができる. しかしながら特性関数はその絶対値において 1 を超えない. よってその場合は $f_{E,\vec{\sigma}}$ は特性関数にはなりえないことがわかり, 命題1.5が示されたことになる.

1.3 多次元新谷ゼータ関数と分布

多次元多重 Euler 積は, その積表示を用いて無限分解可能なゼータ分布を構成しているが, ゼータ分布はその分布の計算において級数表示が有用になる. そこで青山と中村 [4] は, 多次元多重 Euler 積が級数の形に書き直せるように, Hurwitz や Barnes 型の多重ゼータ関数をさらに拡張した多次元新谷ゼータ関数および分布を導入した.

定義 1.6 (多次元新谷ゼータ関数, [4]). $d,m,r \in \mathbb{N}$, $\vec{s} \in \mathbb{C}^d$, $(n_1,\ldots,n_r) \in \mathbb{Z}^r_{\geq 0}$ とする. このとき $\lambda_{lj}, u_j > 0$, $\vec{c_l} \in \mathbb{R}^d$, $(1 \leq j \leq r,\ 1 \leq l \leq m)$, 及び $|\theta(n_1,\ldots,n_r)| = O((n_1+\cdots+n_r)^{\varepsilon})$, $(\forall\varepsilon > 0)$ を満たす複素数値関数 $\theta(n_1,\ldots,n_r)$ に対し, 多重無限級数

$$Z_S(\vec{s}) := \sum_{n_1,\ldots,n_r=0}^{\infty} \frac{\theta(n_1,\ldots,n_r)}{\prod_{l=1}^{m}\big(\lambda_{l1}(n_1+u_1)+\cdots+\lambda_{lr}(n_r+u_r)\big)^{\langle \vec{c_l},\vec{s}\rangle}}$$

を多次元新谷ゼータ関数という.

以下, 関数 $\theta(n_1,\ldots,n_r)$ を多次元新谷ゼータ関数における指標と呼ぶこととする. また無限級数 $Z_S(\vec{s})$ は 領域 $\mathrm{D_S} := \{\vec{s} \in \mathbb{C}^d \mid \min_{1\leq l\leq m} \Re\langle \vec{c_l},\vec{s}\rangle > r/m\}$ で絶対収束する. この絶対収束領域 $\mathrm{D_S}$ において, 指標 θ を定符号とするとき $\mathbb{R}^d$ 上の分布が次のように定義されている.

定義 1.7 (多次元新谷ゼータ分布, [4]). $\vec{\sigma} \in \mathrm{D_S}$ に対し, 確率変数 $X_{\vec{\sigma}}$ が以下の分布に従うとき, 多次元新谷ゼータ確率変数, その分布 $\mu_{\vec{\sigma}}$ を多次元新谷ゼータ分布という.

$$\begin{aligned}\Pr\Bigg(X_{\vec{\sigma}} = \bigg(&-\sum_{l=1}^{m} c_{l1}\log\big(\lambda_{l1}(n_1+u_1)+\cdots+\lambda_{lr}(n_r+u_r)\big),\\ &\ldots, -\sum_{l=1}^{m} c_{ld}\log\big(\lambda_{l1}(n_1+u_1)+\cdots+\lambda_{lr}(n_r+u_r)\big)\bigg)\Bigg)\\ = &\ \frac{\theta(n_1,\ldots,n_r)}{Z_S(\vec{\sigma})}\prod_{l=1}^{m}\big(\lambda_{l1}(n_1+u_1)+\cdots+\lambda_{lr}(n_r+u_r)\big)^{-\langle \vec{c_l},\vec{\sigma}\rangle}.\end{aligned}$$

多次元新谷ゼータ確率変数 $X_{\vec{\sigma}}$ は以下のような性質を持っている.

命題 1.8 ([4]). $f_{\vec{\sigma}}$ を多次元新谷ゼータ確率分布 $X_{\vec{\sigma}}$ の特性関数とする. このとき以下の式が成り立つ.

$$f_{\vec{\sigma}}(\vec{t}) = \frac{Z_S(\vec{\sigma}+\mathrm{i}\vec{t})}{Z_S(\vec{\sigma})}, \quad \vec{t} \in \mathbb{R}^d.$$

このように多次元新谷ゼータ分布の特性関数は級数型のゼータ関数で書くことができるが, その関数の微分可能性により以下のことを得る.

命題 1.9 ([4]). $k \in \mathbb{N}$, $X_{\vec{\sigma}}$ を多次元新谷ゼータ確率変数とする. このとき次が成り立つ.

$$E|X_{\vec{\sigma}}|^{2k} < \infty.$$

さらに多次元新谷ゼータ関数全体は多次元多重 Euler 積全体を含む. (青山と中村 [4].) しかしながら, 多次元新谷ゼータ関数全体は多次元多重 Euler 積全体よりもずっと広い. つまりは数多くの多次元離散分布が多次元新谷ゼータ分布として書き表わせることになる. そこで本解説の目的の一つは, 具体的に書き表すことのできる分布を探し, それらを考察することで多次元新谷ゼータ分布全体を見渡すことである.

2 分布と指標の関係

多次元新谷ゼータ分布は多くのパラメータが付随するが, 特にその性質は指標 θ に大きく依存する. そこでまず多次元新谷ゼータ関数として書き表せる具体的な例をいくつか挙げることにより, それらが導入する分布と指標の関係について考えた. 以下では [1] で得られた結果を紹介する.

まず多次元新谷ゼータ関数のパラメータ及び指標を次のように定める. d, m, $N \in \mathbb{N}$, 各 $k, r \in \mathbb{N}$, $1 \le l, j \le m$ に対し, $u_l = 1$, $\lambda_{l,l} = 1$, $\lambda_{l,j} = 0\,(l \neq j)$ とし, $\vec{c_l}, \vec{\sigma} \in \mathbb{R}^d$ 及び $\phi(l,k,r) \in \mathbb{R}$ を $\sum_{l=1}^{m}\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty}|\phi(l,k,r)|k^{-r\langle \vec{c_l},\vec{\sigma}\rangle<\infty}$ となるように選ぶ. そして各非負整数 $n_1, \ldots, n_m$ に対し, 指標 $\theta_N(n_1, \ldots, n_m)$ を

$$\theta_N(n_1,\ldots,n_m) = \sum{}' N!\prod_{l=1}^{m}\prod_{k=2}^{\infty}\prod_{r=1}^{\infty}\frac{(\phi(l,k,r))^{n(l,k,r)}}{n(l,k,r)!}$$

で定義する. ただし $\sum'$ は次の関係式を満たす非負整数の組 $n(l,k,r)$ で和をとる:

$$\sum_{l=1}^{m}\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty}n(l,k,r) = N, \quad \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{k=2}^{\infty} r\,\nu(k,p)\,n(l,k,r) = \nu(n_l+1,p), \quad (1 \le l \le m,\ p \in \mathbb{P}).$$

ここで $\nu(n,p)$ は自然数 n の素因数分解における素数 p の指数である. このとき指標 θ_N に対応する多次元新谷ゼータ関数 Z_N は, 多項定理を応用することにより次のように書ける. 各 $\vec{s} = \vec{\sigma} + \mathrm{i}\vec{t}$, $\vec{t} \in \mathbb{R}^d$ に対し,

$$Z_N(\vec{s}) = \sum_{n_1,\ldots,n_m=0}^{\infty}\frac{\theta_N(n_1,\ldots,n_m)}{\prod_{l=1}^{m}(n_l+1)^{\langle \vec{c_l},\vec{s}\rangle}} = \Big(\sum_{l=1}^{m}\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty}\phi(l,k,r)k^{-r\langle \vec{c_l},\vec{s}\rangle}\Big)^N.$$

また $k_0, r_0 \in \mathbb{N}$, $1 \le l_0 \le m$, に対して

$$q(l_0,k_0,r_0) := \frac{\phi(l_0,k_0,r_0)k_0^{-r_0\langle \vec{c_{l_0}},\vec{\sigma}\rangle}}{\sum_{l=1}^{m}\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty}\phi(l,k,r)k^{-r\langle \vec{c_l},\vec{\sigma}\rangle}}$$

とし, Z_N を正規化した関数を $f_{N,\vec{\sigma}}$ とおけば, 各 $\vec{t}\in\mathbb{R}^d$ について

$$f_{N,\vec{\sigma}}(\vec{t})=\frac{Z_N(\vec{\sigma}+\mathrm{i}\vec{t})}{Z_N(\vec{\sigma})}=\Big(\sum_{l=1}^{m}\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty}q(l,k,r)e^{-\mathrm{i}r\langle\vec{c}_l,\vec{t}\rangle\log k}\Big)^N$$

が成り立つ.

さらに非負整数値確率変数 T に対して, 新たな指標 $\theta_T(n_1,\dots,n_m)$ を

$$\theta_T(n_1,\dots,n_m)=\sum_{N=0}^{\infty}\frac{\Pr(T=N)\,\theta_N(n_1,\cdots,n_m)}{Z_N(\vec{\sigma})}$$

で定義する. このとき指標 θ_T に対応する多次元新谷ゼータ関数 Z_T は,

$$\begin{aligned}Z_T(\vec{\sigma}+\mathrm{i}\vec{t})&=\sum_{n_1,\dots,n_m=0}^{\infty}\frac{\theta_T(n_1,\dots,n_m)}{\prod_{l=1}^{m}(n_l+1)^{\langle\vec{c}_l,\vec{s}\rangle}}\\&=\sum_{N=0}^{\infty}\Pr(T=N)\Big(\sum_{l=1}^{m}\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty}q(l,k,r)e^{-\mathrm{i}r\langle\vec{c}_l,\vec{t}\rangle\log k}\Big)^N\end{aligned}$$

と書ける. 特に $Z_T(\vec{\sigma})=\sum_{N=0}^{\infty}\Pr(T=N)=1$ より,

$$f_{T,\vec{\sigma}}(\vec{t})=\frac{Z_T(\vec{\sigma}+\mathrm{i}\vec{t})}{Z_T(\vec{\sigma})}=\sum_{N=0}^{\infty}\Pr(T=N)\Big(\sum_{l=1}^{m}\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty}q(l,k,r)e^{-\mathrm{i}r\langle\vec{c}_l,\vec{t}\rangle\log k}\Big)^N. \tag{2.1}$$

次に指標 θ_N 及び θ_T に対応する多次元新谷ゼータ分布を考える. すべての l,k,r に対して $\phi(l,k,r)$ が定符号であるならば, 指標 θ_N 及び θ_T は定符号となる. したがって, $f_{N,\vec{\sigma}}$ 及び $f_{T,\vec{\sigma}}$ は多次元新谷ゼータ分布の特性関数である. よって $f_{N,\vec{\sigma}}$ は, 以下の分布に従う確率変数 $X_{N,\vec{\sigma}}$ の特性関数になっている:

$$\begin{aligned}&\Pr\left(X_{N,\vec{\sigma}}=\Big(\sum_{l=1}^{m}\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty}x(1,l,k,r)n(l,k,r),\dots,\sum_{l=1}^{m}\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty}x(d,l,k,r)n(l,k,r)\Big)\right)\\&=N!\prod_{l=1}^{m}\prod_{k=2}^{\infty}\prod_{r=1}^{\infty}\frac{(q(l,k,r))^{n(l,k,r)}}{n(l,k,r)!}\qquad(\text{ただし}\ \sum_{l=1}^{m}\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty}n(l,k,r)=N).\end{aligned}$$

ここで $\vec{c}_l=(c_{1l},\cdots,c_{dl})$ に対して $x(j,l,k,r):=-rc_{jl}\log k$ としている. また確率変数 $X_{N,\vec{\sigma}}$ が従う分布は, 有限個の点にしか重みのない多項分布を無限個の重みを持つように拡張された多次元離散型であることがわかる. このようにゼータ分布は無限個の点に重みを持つ離散分布を導入する際に有効である.

また指標が定符号の仮定の下で $f_{T,\vec{\sigma}}$ は複合分布の特性関数であることがわかる. したがって非負整数値確率変 T を任意に選ぶことによって, つまりは指標 θ_T を決めることに

よって対応する多次元新谷ゼータ分布の性質も決まることになる. またその中で特に重要なものは, 確率変数 T が平均 λ の Poisson 分布 $Po(\lambda)$ に従う場合である. そのとき

$$F_{Po(\lambda),\vec{\sigma}}(\vec{t}) = \exp \lambda \left(\sum_{l=1}^{m} \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} q(l,k,r)\, e^{i\langle \vec{x}(l,k,r),\vec{t}\rangle} - 1 \right)$$

となるが, これは複合 Poisson 分布の特性関数であり, またその Lévy 測度 $N_{P,\vec{\sigma}}$ は以下の $\mathbb{R}^d$ 上有限測度で与えられる:

$$N_{P,\vec{\sigma}}(dx) = \lambda \sum_{l=1}^{m} \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} q(l,k,r) \delta_{-r\log k\, \vec{c}_l}(dx).$$

これまでに挙げた例の他にも無限分解可能 (複合 Poisson) なものを含め, 数多くの分布が多次元新谷ゼータ分布として書き表せることがわかっている. しかしすべての無限分解可能分布は, ある複合 Poisson 分布列の極限として書き表せることがよく知られている. したがって複合 Poisson 分布の特性関数 $f_{Po(\lambda),\vec{\sigma}}$ 等が多次元新谷ゼータ関数であることから, 多次元新谷ゼータ分布全体は, 近似の意味も込めて, 非常に多くの無限分解可能分布を含んでいることが予想される. 少なくとも, 以下に挙げるような無限積表現可能な特性関数を持つ分布は含まれている.

各 $k, r \in \mathbb{N}$, $1 \le l \le m$ に対して, 改めて

$$\phi(l,k,r) = \sum_{j=1}^{J} \frac{m_{l,j}}{r} (\alpha_j(l,k))^r, \ -1 \le \alpha_j(l,k) \le 1, \ m_{l,j} \in \mathbb{R}, \ (j = 1, \cdots, J), \tag{2.2}$$

$$\lambda = \sum_{l=1}^{m} \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \phi(l,k,r) k^{-r\langle \vec{c}_l, \vec{\sigma}\rangle} \tag{2.3}$$

とおく. このとき $\min_{1\le l\le m}\langle \vec{c}_l, \vec{\sigma}\rangle > 1$ ならば, 多次元新谷ゼータ関数 $f_{Po(\lambda),\vec{\sigma}}$ は

$$f_{Po(\lambda),\vec{\sigma}}(\vec{t}) = \prod_{j=1}^{J} \prod_{l=1}^{m} \prod_{k=2}^{\infty} \Big(\frac{1 - \alpha_j(l,k) k^{-\langle \vec{c}_l, \vec{\sigma}\rangle}}{1 - \alpha_j(l,k) k^{-\langle \vec{c}_l, \vec{\sigma} + i\vec{t}\rangle}} \Big)^{m_{l,j}} \tag{2.4}$$

と書け, 無限積表現可能である. 特に $m_{l,j} = 1$ $(1 \le l \le m, 1 \le j \le J)$, かつ $k \notin \mathbb{P}$ ならば $\alpha(l,k) = 0$ とすれば正規化された多次元多重 Euler 積となる.

またすべての l,k,r に対して $\phi(l,k,r) \ge 0$ ならば, 無限積表現 (2.4) を持つ $f_{Po(\lambda),\vec{\sigma}}$ は無限分解可能分布の特性関数である. ある条件下において無限分解可能であるための指標の必要十分条件およびそのときの Lévy 測度については次の節で解説する.

3 特性関数になるための必要十分条件

正規化された多次元新谷ゼータ関数は, その指標が定符号であるときは特性関数となり, 分布を導入することができる. では指標が定符号でないときは特性関数にはなりえないの

だろうか. そもそも特性関数であるか否かが判別できなければ確率論では扱うことができないため, これは多次元新谷ゼータ関数と確率論の関係を知る上で極めて重要な問題である. だが一般に与えられた多次元新谷ゼータ関数に対して, それが特性関数になりえる指標の必要十分条件はまだ得られていない. しかし3節に挙げた例に関しては, いくつかの結果を得ているで紹介しておく.

定理を述べるために以下の記号を用意する.

$$\widehat{\mathbb{P}} := \bigcup_{l=1}^{m} \{k \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \mid \exists r \in \mathbb{N} \ s.t.\ \phi(l,k,r) \neq 0\}.$$

また $\widehat{\mathbb{P}}$ が条件 (RP) を満たすとは, 各 $k \in \widehat{\mathbb{P}}$ に対して, 素数 p が存在して $\nu(k,p)$ が奇数かつ k を除く $\widehat{\mathbb{P}}$ の全ての元 m について $\nu(m,p)$ が偶数となることとする. 条件 (RP) を満たす集合としては, 例えば素数全体 $\mathbb{P}$ あるいは $\{2p^3 \mid p \in \mathbb{P} \setminus \{2\}\}$ 等が挙げられる.

次に $\phi(l,k,r)$ は (2.2), λ は (2.3) で定義しておく. このとき3節の (2.1) あるいは (2.4) における $f_{2T,\vec{\sigma}}$ または $f_{Po(\lambda),\vec{\sigma}}$ について以下の定理が成り立つ.

定理 3.1 ([1]). $\alpha_j(l,p) \in \{-1,0,1\}$ とする. $\widehat{\mathbb{P}}$ が条件 (RP) を満たすとき以下が成り立つ.

(i) $\mathbb{R}^d$ 上のベクトル $\vec{c}_1,\ldots,\vec{c}_m$ が一次独立である場合.

$f_{Po(\lambda),\vec{\sigma}}$ あるいは $f_{2T,\vec{\sigma}}$ が特性関数である必要十分条件は, 任意の $1 \leq l \leq m$, $k \in \widehat{\mathbb{P}}$ に対して, $\sum_{j=1}^{J} m_{l,j}\alpha_j(l,k) \geq 0$ が成り立つことである.

(ii) $\vec{c}_1 = \cdots = \vec{c}_m (\neq 0)$ の場合.

$f_{Po(\lambda),\vec{\sigma}}$ あるいは $f_{2T,\vec{\sigma}}$ が特性関数である必要十分条件は, 任意の $k \in \widehat{\mathbb{P}}$ に対して, $\sum_{j=1}^{J}\sum_{l=1}^{m} m_{l,j}\ \alpha_j(l,k) \geq 0$ が成り立つことである.

さらに (i) あるいは (ii) において $f_{Po(\lambda),\vec{\sigma}}$ が特性関数であるとき, それは $\mathbb{R}^d$ 上の複合 *Poisson* 分布となり, その *Lévy* 測度 $N_{P,\vec{\sigma}}$ は有限かつ次のように書ける.

$$N_{P,\vec{\sigma}}(dx) = \sum_{p\in\mathbb{P}}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{m}\sum_{j=1}^{J} \frac{m_{l,j}}{r}\alpha_j(l,p)^r p^{-r\langle \vec{c}_l,\vec{\sigma}\rangle}\delta_{-r\log k\,\vec{c}_l}(dx).$$

定理3.1は (i) あるいは (ii) の場合, $\widehat{\mathbb{P}}$ が条件 (RP) を満たすならば, $f_{Po(\lambda),\vec{\sigma}}$ または $f_{2T,\vec{\sigma}}$ が特性関数になるのは指標が定符号であるときに限ることを意味する. しかしそれら前提条件がなければその限りでない. なぜならその関数の級数表現のある種の一意性が保証できない為に, 対応する分布を定めるのが困難になるからである. 青山と中村 [3] では (i) と (ii) の他に命題1.5が成り立つようなベクトル $c_1,\cdots,c_m$ の条件も考えられているが, 青山と中村 [2] では, それらの条件をさらに弱めた場合における多次元多重 Euler 積が導入する分布についても議論している. そこで今後の課題としては, 条件 (i), (ii) あるいは (RP) を弱めた場合において多次元新谷ゼータ関数が特性関数になる必要十分条件は何か. また特性関数になる場合, どのような分布が対応するのかを研究することだと考えている.

参考文献

[1] T. Aoyama and K. Yoshikawa, Representations of multinomial distributions by multiple zeta functions, preprint.

[2] T. Aoyama and T. Nakamura, Behaviors of multivariable finite Euler products in probabilistic view, Math. Nachr. **286** (2013), 1691–1700.

[3] T. Aoyama and T. Nakamura, Multidimensional polynomial Euler products and infinitely divisible distributions on $\mathbb{R}^d$, submitted, (2013), http://arxiv.org/abs/1204.4041.

[4] T. Aoyama and T. Nakamaura, Multidimensional Shintani zeta functions and zeta distributions on $\mathbb{R}^d$, Tokyo J. Math. **36** (2013), 521–538.

[5] T. M. Apostol, Introduction to Analytic Number Theory, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 1976.

[6] T. M. Apostol, Modular Functions and Dirichlet Series in Number Theory, Graduate Texts in Mathematics 41, Springer, 1990.

[7] B. V. Gnedenko and A. N. Kolmogorov, Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables (Translated from the Russian by Kai Lai Chung), Addison-Wesley, 1968.

[8] C.-Y. Hu, A. M. Iksanov, G. D. Lin and O. K. Zakusylo, The Hurwitz zeta distribution, Aust. N. Z. J. Stat. **48** (2006), 1–6.

[9] B. Jessen and A. Wintner, Distribution functions and the Riemann zeta function, Trans. Amer. Math. Soc. **38** (1935), 48–88.

[10] A. Ya. Khinchine, Limit Theorems for Sums of Independent Random Variables (in Russian), Moscow and Leningrad, 1938.

[11] G. D. Lin and C.-Y. Hu, The Riemann zeta distribution, Bernoulli **7** (2001), 817–828.

[12] K. Sato, Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions, Cambridge University Press, 1999.

[13] J. Steuding, Value Distributions of L-functions, Lecture Notes in Mathematics Vol. 1877, Springer-Verlag, 2007.