

# Craik's 3D dynamical system arising in fluid mechanics

宮路 智行

京都大学・数理解析研究所, 日本学術振興会特別研究員 (PD)

Tomoyuki MIYAJI

Research Institute for Mathematical Sciences,

Kyoto University, JSPS Research Fellow

email: tmiyaj@kurims.kyoto-u.ac.jp

## 概要

本小論は, Alex. D. D. Craik 教授 (University of St Andrews), 岡本久教授 (京都大学数理解析研究所) と著者による共同研究で得られた結果の予報である. 詳細は別の論文で発表する予定である.

## 1 はじめに

以下の常微分方程式系を考える:

$$\dot{x} = yz - y, \quad \dot{y} = -zx + z, \quad \dot{z} = xy - x. \quad (1)$$

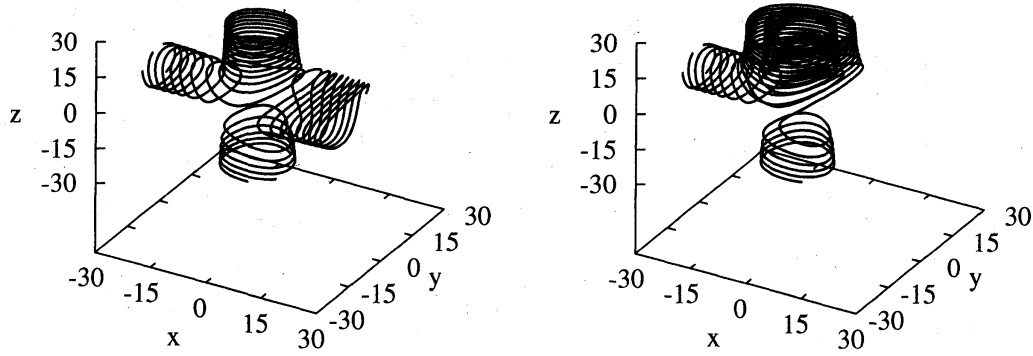
ただし,  $x(t), y(t), z(t)$  は実数値関数,  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$  はそれらの時間  $t$  に関する導関数を表す. 我々は, 精度保証付き数値計算に基づく数値的検証法によって, (1) の周期解の存在を示す.

問題の背景を紹介する. Craik と Okamoto は次の形の方程式に対して理論的な考察と網羅的な数値計算を行った [3]:

$$\dot{x} = ayz + bz + cy, \quad \dot{y} = dzx + ex + fz, \quad \dot{z} = gxy + hy + kx, \quad (2)$$

ここで,  $a$  から  $k$  までの係数は実数のパラメータである. その背景には, Navier-Stokes 方程式のあるクラスの厳密解が (2) の形の方程式の解を用いて表せるという, Craik[1] の研究がある. (2) は一般的な係数を含むが, Navier-Stokes 方程式の解を与えるのは, 係数にある種の対称性がある場合である. 詳細は [1] を参照されたい.

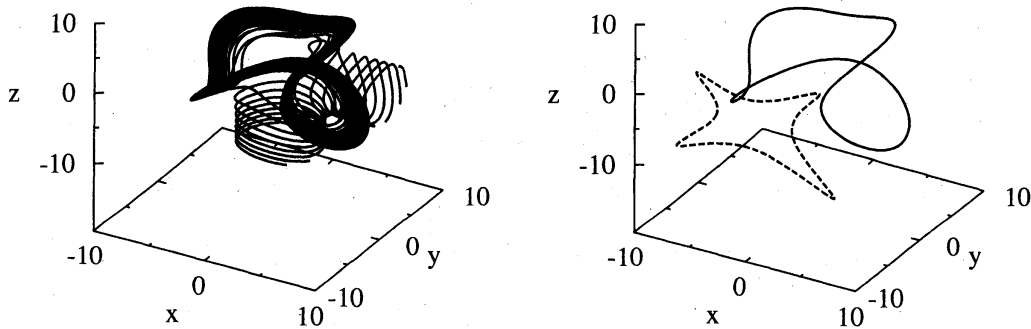
[3] によれば, (2) の解の多くは非有界である. また, 有限時刻での爆発解をもつパラメータ領域さえある. それ以外のパラメータでは, 時間大域解であっても,  $|t| \rightarrow \infty$  のとき解が遠方へ遠ざかる. 図 1 に典型的な軌道を示す. 同一のパラメータにおける, 四つの時間大域解の軌道である.  $|t|$  が大きいとき, 解は  $x$  軸または  $z$  軸に沿って, らせん状の軌道を描く. しか



(a) 方向転換する軌道

(b) 方向転換する軌道としない軌道

図1 (2) に対する大域解の典型的な軌道. ([3, Fig. 1] の再現).



(a) 不安定周期軌道の近くを通る軌道

(b) 不安定周期軌道

図2 (1) に対する不安定周期軌道. 点線は  $(x, z)$  平面への射影. ([3, Fig. 12](b),(c) の再現).

し,  $(x, y, z)$  が  $O(1)$  程度の大きさのとき, 軌道に変化が生じる. ある場合には振動の振幅のみが変化する. またある場合には, 振幅が変わるだけでなく, 方向転換して, 別の軸に沿ってらせんを描くようになる.

何が解軌道の行先を決めるのか?

Craik と Okamoto は, (2) の理解のため, 特殊な場合である (1) について詳細な数値計算を行い, 図2のようなサドル型の不安定周期軌道が重要な役割を果たすことを見出した ([3, Section 6, 7]). ((1) も図1と同様の特徴的な振る舞いを示す). 非有界な軌道の間, サドル型周期軌道がひとつだけあり, 解軌道の行先をコントロールしていると考えられる. この不安定周期軌道の存在と局所一意性を示すことが我々の目的の一つである.

## 2 主結果

我々は (1) で定義される力学系の周期軌道を Poincaré 写像の不動点として特徴づける。  
(1) に対して, Poincaré 断面

$$S = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x + z - 1 = 0, x > 0\}. \quad (3)$$

上で定義される Poincaré 写像  $\tilde{P}$  を考える.  $S$  上の座標系  $\phi: S \rightarrow \mathbb{R}^2$  を

$$\phi: (x, y, 0) \mapsto (x, y)$$

とする. 写像  $P: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  を  $P = \phi^{-1}\tilde{P}\phi$  とする.

我々は以下の結果を得た. 数値的検証法の詳細については [2] で発表する.

**定理 1** ([2]). 方程式 (1) に対して (3) で定義される断面上の Poincaré 写像を考える.  $X = [7.5, 8.5] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$  とする. このとき, 以下が成り立つ.

- (i)  $X$  上で写像  $P$  はうまく定義できる. すなわち, 任意の  $\xi \in X$  に対して,  $\phi^{-1}(\xi) \in S$  の (1) による前方軌道は少なくとも一度  $S$  に戻ってくる.
- (ii)  $P|_X$  の不動点  $\xi^*$  がただ一つ存在する. したがって, これに対応する (1) の周期軌道が存在する.
- (iii)  $P|_X$  の不動点  $\xi^*$  は以下の矩形領域に含まれる:

$$[8.0430011129, 8.0430011132] \times [0.4999999999, 0.5000000001].$$

- (iv) 不動点  $\xi^*$  は鞍点である; 一次元の安定多様体と不安定多様体をもつ.

**注意 1.** 高精度な数値計算結果を見れば  $P$  の不動点の存在は確からしいと考えられるかもしれないが, 上述の定理はもっと強いことを主張している. すなわち, 不動点が  $X$  において孤立しており, さらに, 他には存在しないことが厳密に保証される. 不動点の双曲性から従う局所的な結果ではなく, より大域的な結果である.

## 3 おわりに

(2) の形の方程式は力学や流体力学の問題であられる. 単純な形の方程式であるが, 非自明な挙動を示す. そこでは, 非有界な軌道と不安定な軌道が中心的な役割を果たすようである. そして, これらの方程式に通有的な性質の存在が予想される. 今回の解析はその一部に注目したものであった. さらなる解析によって, より包括的な理解をめざしたい.

## 謝辞

著者は科学研究費補助金 (特別研究員奨励費, 課題番号 24·5312) の助成を受けている.

## 参考文献

- [1] A. D. D. Craik, Time-dependent solutions of the Navier-Stokes equations for spatially-uniform velocity gradients, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, **124**, (1994), 127–136.
- [2] A. D. D. Craik, T. Miyaji, and H. Okamoto, to be submitted.
- [3] A. D. D. Craik and H. Okamoto, A three-dimensional autonomous system with unbounded ‘bending’ solutions, *Phys. D* **164**, (2002), 168–186.