最小消去多項式候補を用いた行列の 一般固有空間の構造の計算アルゴリズム

小原功任*

KATSUYOSHI OHARA

金沢大学理工研究域

FACULTY OF MATHEMATICS AND PHYSICS,

INSTITUTE OF SCIENCE AND ENGINEERING,

KANAZAWA UNIVERSITY

田島慎一†

SHINICHI TAJIMA

筑波大学数理物質系

INSTITUTE OF MATHEMATICS,

FACULTY OF PURE AND APPLIED SCIENCES,

UNIVERSITY OF TSUKUBA

1 はじめに

体 $K = \mathbb{Q}$ 上の n 次正方行列 A を考えよう. いま, 行列 A のある固有値 λ に注目する. λ の定義多項式 $f(x)$ は行列 A の特性多項式 $\chi_A(x)$ の既約因子となっている. 体 K を代数拡大して, A をジョルダン標準形で表したとすれば, 固有値 λ に対応するジョルダン細胞が,

$$J_{k_1}(\lambda) \text{ が } n_1 \text{ 個, } J_{k_2}(\lambda) \text{ が } n_2 \text{ 個, } \dots, J_{k_m}(\lambda) \text{ が } n_m \text{ 個, } (k_1 > k_2 > \dots > k_m \geq 1)$$

と現れるはずである ($J_k(\lambda)$ は固有値 λ に関する, 大きさ k のジョルダン細胞を表す). われわれが知りたい情報はジョルダン細胞の大きさ個数の列 $(k_1, n_1), \dots, (k_m, n_m)$ である. これらはジョルダン鎖のうち, 目的の固有値 λ に対応するものの全体を与えているが, 本稿ではこれを“一般固有空間の構造”と呼ぶことにする. 本研究の目的は, 行列 A の一般固有空間の構造を具体的に決定するためのアルゴリズムについて論じることである. よく知られているように, 線形代数学では, 行列の相似変形あるいは単因子の方法によってジョルダン標準形 (またはジョルダン鎖) を得ることができる. しかしながら, これらの方法によってジョルダン鎖を得るのは, 計算量的には効率がよいとは言えない. 一方, 田島 [6] は一般固有空間の構造を求める効率的な計算法を具体的に与えた. 行列の基本最小消去多項式たちに着目しよう. 一般に, 固有値 λ の定義多項式は, 最小消去多項式を割りきる. そこで, その商と定義多項式を利用して, λ に対応する一般固有ベクトルを構成することができる. この事実を利用することで, 効率的に一般固有空間の構造を求めるのが田島 [6] の方法である.

ところで, [6] の前提となる最小消去多項式を効率的に求めるには, どうすればいいのであろうか. そのひとつの方法として, まず最小消去多項式候補を見つけてから, その後に最小消去多項式を決定することが考えられる ([5]). 最小消去多項式候補を経由した最小消去多項式の計算法とは, 確率的な算法の一種であり, ランダムに与えられたベクトルが, 計算途中に現れるベクトルと直交する確率が極めて小さいことに着目した方法である. これは確率的な算法であるから, 得られた候補が真の最小消去多項式と一致するか否かは検証されなければならない. この検証過程と [6] による計算法を比較検討すると, 類似の計算が現れる

*ohara@se.kanazawa-u.ac.jp

†tajima@math.tsukuba.ac.jp

ことが分かった。したがって、一般固有空間の構造を求めることにおいて、最小消去多項式の代わりに未検証の最小消去多項式候補を用いて、その候補を検証しながら一般固有空間の構造も計算することが考えられる。このことによって重複する計算を排除することができる。本論文ではこのアイデアに基づくアルゴリズムについて述べる。

2 最小消去多項式とその候補

正方行列 A の最小多項式 $\pi_A(x)$ は、どのような列ベクトル $\mathbf{u} \in K^n$ に対しても、 $\pi_A(A)\mathbf{u} = \mathbf{0}$ を満たす。逆に、ある列ベクトル $\mathbf{u} \in K^n$ が与えられたとき、 $h(A)\mathbf{u} = \mathbf{0}$ となる次数最小のモノニック多項式 $h(x) \in K[x]$ をベクトル $\mathbf{u}$ に関する A の **最小消去多項式** と呼び、 $\pi_{A,\mathbf{u}}(x)$ で表わす。最小消去多項式は、多項式イデアル $\text{Ann}_{K[x]}(A, \mathbf{u}) = \{f(x) \in K[x] \mid f(A)\mathbf{u} = \mathbf{0}\}$ の生成元であるから、 A の最小多項式 $\pi_A(x)$ を割り切る。 $\mathbf{u}$ が第 j 基本ベクトル $\mathbf{e}_j$ であるとき、 $\pi_{A,\mathbf{e}_j}(x)$ を第 j 基本最小消去多項式と呼ぶ。すべての基本最小消去多項式の最小公倍多項式は最小多項式と一致する。基本最小消去多項式は固有ベクトル計算やスペクトル分解計算に威力を発揮する ([3], [8])。

いま、行ベクトル ${}^t\mathbf{v} \in K^n$ をランダムに選び、 ${}^t\mathbf{v}h(A)\mathbf{u} = 0$ かつ $h(x) \mid \chi_A(x)$ を満たす次数最小のモノニック多項式 $h(x) \in K[x]$ **最小消去多項式候補** と呼び、 $\tilde{\pi}_{A,\mathbf{u}}(x)$ で表すことにする。最小消去多項式候補の探索とは、すなわち最小消去多項式の確率的計算アルゴリズムである。定義から分かるように、最小消去多項式を計算するには、 $\pi_{A,\mathbf{u}}(A)\mathbf{u}$ が零ベクトルに等しいことを確認する必要がある。一方、最小消去多項式候補の探索では、 ${}^t\mathbf{v}\tilde{\pi}_{A,\mathbf{u}}(A)\mathbf{u}$ の値について調べるが、これはスカラー値であるので、特に行列の次数が大きい場合には計算量の観点からは有利になる。また、 ${}^t\mathbf{v}$ が乱数ベクトルであるので、ほとんどの場合、最小消去多項式候補は最小消去多項式に一致する。本稿では、最小消去多項式候補および最小消去多項式の計算アルゴリズムについて概説する。

まず、行列 A の特性多項式の既約分解が $\chi_A(x) = f_1(x)^{m_1} \cdots f_q(x)^{m_q}$, ($m_i \in \mathbf{N}$) で与えられているとしよう。最小消去多項式は特性多項式を割りきるので、 $\pi_{A,\mathbf{u}}(x)$ は必ず、

$$\pi_{A,\mathbf{u}}(x) = f_1(x)^{\ell_1} \cdots f_q(x)^{\ell_q}, \quad (0 \leq \ell_i \leq m_i)$$

の形になる。したがって、最小消去多項式候補も同じく、

$$\tilde{\pi}_{A,\mathbf{u}}(x) = f_1(x)^{\ell'_1} \cdots f_q(x)^{\ell'_q}, \quad (0 \leq \ell'_i \leq m_i)$$

の形を仮定してよい。最小消去多項式候補の指数 $\ell'_1, \dots, \ell'_q$ を次の手順で決定しよう。

アルゴリズム 1 (最小消去多項式候補).

入力: 行列 A , 特性多項式 $\chi_A(x) = \prod_{i=1}^m f_i(x)^{m_i}$

出力: 最小消去多項式候補 $\tilde{\pi}_{A,\mathbf{u}}(x)$

1. 行ベクトル ${}^t\mathbf{v} \in K^n$ をランダムに選ぶ.
2. for $i = 1, \dots, q$, do
 $\chi_i(x) \leftarrow \chi(x) / f_i(x)^{m_i}$, ${}^t\mathbf{v}_i \leftarrow {}^t\mathbf{v}\chi_i(A)$.
3. for $i = 1, \dots, q$, do

$$\ell'_i \leftarrow \begin{cases} \min\{k \in \mathbf{N} \mid {}^t\mathbf{v}_i f_i(A)^k \mathbf{u} = \mathbf{0}\}, & ({}^t\mathbf{v}_i \mathbf{u} \neq \mathbf{0}) \\ 0. & ({}^t\mathbf{v}_i \mathbf{u} = \mathbf{0}) \end{cases}$$

$$4. \tilde{\pi}_{A,u}(x) \leftarrow \prod_i f_i(x)^{\ell'_i}.$$

ステップ2では、すべての ${}^t v_1, \dots, {}^t v_q$ を求めるには、行列多項式乗算 ${}^t w \mapsto {}^t w f_i(A)^{m_i}$ が q^2 回必要であるように思えるが、2分探索の方法を用いれば、およそ $q \log_2 q$ 回で実行可能である(行列多項式乗算の高速算法については、[5] 参照)。さらに、 ${}^t v_k$ は一度計算しておけば、どの基本ベクトル e_j に関する最小消去多項式候補 $\tilde{\pi}_{A,e_j}(x)$ の計算でも共通に利用できることにも注意する。

さて、アルゴリズム1で定まる最小消去多項式候補 $\tilde{\pi}_{A,u}(x)$ は次の性質を持つ。

補題1. 各既約因子の指数について、 $\ell'_i \leq \ell_i \leq m_i$ が成り立つ。また、 $u' = \tilde{\pi}_{A,u}(A)u$ について、 $\pi_{A,u}(x) = \tilde{\pi}_{A,u}(x)\pi_{A,u'}(x)$ を満たす。

上の補題から、最小消去多項式候補の指数は、最小消去多項式の指数 ℓ_i の下からの評価を与えていることが分かる。いま、 $u' = \tilde{\pi}_{A,u}(A)u$ が零ベクトルに等しいかを検証することとし、 $u' = 0$ であるとき、乱数ベクトル v はラッキーであると呼ぶことにしよう。もちろんラッキーであるときは、 $\tilde{\pi}_{A,u}(x) = \pi_{A,u}(x)$ 、すなわち最小消去多項式候補が真の最小消去多項式であることを意味する。ラッキーでなければ、 v は $u' = \tilde{\pi}_{A,u}(A)u$ と直交しているわけだが、乱数ベクトルがたまたま u' と直交する可能性は低く、ほぼ確率1で $\ell'_i = \ell_i$ となる。したがって、この評価は非常に効率的である。

もしも v がラッキーでなければ、候補と真の最小消去多項式は一致しないので、候補から最小消去多項式を構成し直す必要がある。上の補題から、候補の各指数は最小消去多項式の指数の下界を与えており、同様に特性多項式の指数は上界を与えていることから、指数の含まれる区間が分かる。また、この関係から最小消去多項式を再構成することができる。ラッキーでないときは、検証によって u' は分かっている。上の補題から $\pi_{A,u'}(x)$ が分かればよい。 $g(x) = \chi_A(x)/\tilde{\pi}_{A,u}(x) = \prod_i f_i(x)^{m_i - \ell'_i}$ とすると $g(x) \in \text{Ann}_{K[x]}(A, u')$ であるので、 $\pi_{A,u'}(x)$ は $g(x)$ を割りきる。 $\pi_{A,u'}(x)$ の各因子 $f_j(x)$ に関する指数を知るためには、アルゴリズム1のステップ2,3に類似した方法で、 $g_j(x) = g(x)/f_j(x)^{m_j - \ell'_j}$ に対して、 $u'_j = g_j(A)u'$ を求め、その後に $\min\{k \in \mathbb{N} \mid f_j(A)^k u'_j = 0\}$ を指数に定めればよい。あるいは $\max\{m_i - \ell'_i\}$ が十分大きいときには、アルゴリズム1を u' に適用して、再度、最小消去多項式候補 $\tilde{\pi}_{A,u'}(x)$ を求めてもよい。

3 一般固有空間の構造の決定法 (最小消去多項式による場合)

いま、 λ を行列 A のある固有値、 $f(x)$ を λ の定義多項式とする。前述したように、固有値 λ に対応するジョルダン細胞のサイズと個数の列

$$J_{k_1}(\lambda) \text{ が } n_1 \text{ 個, } J_{k_2}(\lambda) \text{ が } n_2 \text{ 個, } \dots, J_{k_m}(\lambda) \text{ が } n_m \text{ 個, } (k_1 > k_2 > \dots > k_m \geq 1)$$

が知りたいものである。 k_1 については、最小多項式 $\pi_A(x)$ を既約分解したときに現れる $f(x)$ の指数と一致することが容易に分かる。では、 n_1 はどのようにすれば知ることができるだろうか。そのためにジョルダン細胞と最小消去多項式の関係を考えよう。

いま、ある列ベクトル $u \in K^n$ に関して最小消去多項式が $\pi_{A,u}(x) = f(x)^\ell g(x)$ と表されたとする。このとき $p = g(A)u \in K^n$ は、

$$f(A)^\ell p = f(A)^\ell g(A)u = \pi_{A,u}(A)u = 0$$

を満たすことから、 p の最小消去多項式は $\pi_{A,p}(x) = f(x)^\ell$ である。また

$$\Psi(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \in K[x, y]$$

と置くと, $f(A) = (A - \lambda E)\Psi(A, \lambda E)$ なので, $\mathbf{v} = \Psi(A, \lambda E)^\ell \mathbf{p} \in K(\lambda)^n$ について, $f(A)^\ell \mathbf{p} = \mathbf{0}$ と $(A - \lambda E)^\ell \mathbf{v} = \mathbf{0}$ が同値であることが分かる. しかも $\pi_{A, \mathbf{p}}(x)$ の最小性より, $(A - \lambda E)^{\ell-1} \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ である. すなわち,

$$(A - \lambda E)^\ell \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \text{かつ} \quad (A - \lambda E)^k \mathbf{v} \neq \mathbf{0} \quad (0 \leq k < \ell)$$

となるので, $\mathbf{v}$ はサイズ ℓ のジョルダン細胞に属することが分かる.

すべての基本最小消去多項式が分かっていると, $\pi_{A, \mathbf{e}_j}(x) = f(x)^{\ell_j} g_j(x)$ と表すこととする. また, $f(x)$ に関する指数の最大値を $\ell = \max(\ell_1, \dots, \ell_n)$ とする.

われわれがまず知りたいのはサイズ $k_1 = \ell$ のジョルダン細胞の個数 n_1 である. そこで, 第 j 基本最小消去多項式の $f(x)$ に関する指数がちょうど k となる, 添字 j の集合 $J_k = \{j \mid \ell_j = k\}$ を考える. $\mathbf{p}_j = g_j(A)\mathbf{e}_j$ および $\mathbf{v}_j = \Psi(A, \lambda E)^{\ell_j} \mathbf{p}_j$, と置こう. ベクトル $\mathbf{p}_j$ ($j \in J_\ell$) の最小消去多項式はすべて $f(x)^\ell$ である. また, $\Psi(x, y)$ の定義から

$$(A - \lambda E)^{\ell-1} \mathbf{v}_j = \Psi(A, \lambda E) f(A)^{\ell-1} \mathbf{p}_j$$

が成り立つことが分かる. したがって, $\Psi(A, \lambda E)$ を左からかけるという線形写像によって,

$$\Psi(A, \lambda E) : \text{span}\{f(A)^{\ell-1} \mathbf{p}_j \mid j \in J_\ell\} \rightarrow \text{span}\{(A - \lambda E)^{\ell-1} \mathbf{v}_j \mid j \in J_\ell\}$$

は全射である. ここで $\text{span } S$ で, 集合 S の生成する K -ベクトル空間を表す. $\text{span}\{f(A)^{\ell-1} \mathbf{p}_j \mid j \in J_\ell\}$ の次元 r_ℓ は容易に計算できて,

$$r_\ell = \dim_K \text{span}\{f(A)^{\ell-1} \mathbf{p}_j \mid j \in J_\ell\} = \text{rank}([f(A)^{\ell-1} \mathbf{p}_j]_{j \in J_\ell}) = \text{rank}(f(A)^{\ell-1} [\mathbf{p}_j]_{j \in J_\ell}).$$

ここで, $[\mathbf{p}_j]_{j \in J_\ell}$ は列ベクトル $\mathbf{p}_j$ たちを並べた行列を表す. $f(x)$ の共役な根を区別しないことに注意すれば,

$$r_\ell = (\text{サイズ } \ell \text{ のジョルダン細胞の個数}) \times \deg f(x)$$

であることが分かる.

次に, サイズ $\ell-1$ のジョルダン細胞の個数について調べたい. $|J_\ell| \times n$ 行列 $[f(A)^{\ell-1} \mathbf{p}_j]_{j \in J_\ell}$ のランク r_ℓ が, $r_\ell < |J_\ell|$ であるときには, 一次結合 $\mathbf{p} = \sum_{j \in J_\ell} a_j \mathbf{p}_j$ がかつ最小消去多項式が $f(x)^{\ell'}$ ($\ell' < \ell$) なるベクトルが存在する. したがって, サイズの小さいジョルダン細胞の個数を求めるときには, このようなベクトルも考慮しなくてはならない. このことに注意して調べていこう.

$r_\ell = \text{rank}([f(A)^{\ell-1} \mathbf{p}_j]_{j \in J_\ell})$ であつたので, ベクトルの集合 $\{f(A)^{\ell-1} \mathbf{p}_j \mid j \in J_\ell\}$ には $|J_\ell| - r_\ell$ 個の一次従属関係式がある. つまり, ある定数 $c_{kj} \in K$ によって

$$\sum_{j \in J_\ell} c_{kj} f(A)^{\ell-1} \mathbf{p}_j = \mathbf{0}, \quad 0 \leq k < |J_\ell| - r_\ell$$

と表せ, しかも c_{kj} は行列 $[f(A)^{\ell-1} \mathbf{p}_j]_{j \in J_\ell}$ の掃き出しによって, ランク計算と同時に得られる. このとき, ベクトル $\mathbf{w}_k = \sum_{j \in J_\ell} c_{kj} \mathbf{p}_j$ の最小消去多項式は $f(x)^{\ell-1}$ である. まとめると, 集合 $U = \{\mathbf{p}_j \mid j \in J_{\ell-1}\} \cup \{\mathbf{w}_k \mid 0 \leq k < |J_\ell| - r_\ell\}$ に属するベクトルはすべて最小消去多項式 $f(x)^{\ell-1}$ をもつ.

よって $\mathbf{u} \in U$ について, $\mathbf{v} = \Psi(A, \lambda E)^{\ell-1} \mathbf{u}$ と置くと, 前述したように, $f(A)^{\ell-1} \mathbf{u} = \mathbf{0}$ と $(A - \lambda E)^{\ell-1} \mathbf{v} = \mathbf{0}$ と同値である. このとき

$$(A - \lambda E)^{\ell-2} \mathbf{v} = \Psi(A, \lambda E) f(A)^{\ell-2} \mathbf{u}$$

が成り立つ。以下、サイズ $\ell-1$ のときも同じ議論ができて、全射

$$\Psi(A, \lambda E) : \text{span}\{f(A)^{\ell-2}\mathbf{u} \mid \mathbf{u} \in U\} \rightarrow \text{span}\{(A - \lambda E)^{\ell-2}\mathbf{v} \mid (A - \lambda E)^{\ell-1}\mathbf{v} = \mathbf{0}\}$$

が得られる。 $r_{\ell-1} = \text{rank}(f(A)^{\ell-2} \cdot [\mathbf{u}]_{\mathbf{u} \in U})$ としよう。

$(A - \lambda E)^{\ell-1}\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ならば $(A - \lambda E)^{\ell}\mathbf{v} = \mathbf{0}$ であることに注意すると、

$$r_{\ell-1} - r_{\ell} = (\text{サイズ } \ell-1 \text{ のジョルダン細胞の個数}) \times \deg f(x)$$

である。

よって次のアルゴリズムが得られる。

アルゴリズム 2 (ある固有値に関する一般固有空間の構造)。

入力: 行列 A , 特性多項式 $\chi_A(x)$, 固有値 λ の定義多項式 $f(x)$

出力: 固有値 λ のジョルダン鎖 S_f

1. $\{\pi_{A, e_1}(x), \dots, \pi_{A, e_n}(x)\} \leftarrow$ 最小消去多項式
2. for $j = 1, \dots, n$, do
 $\ell_j \leftarrow (\pi_{A, e_j}(x) \text{ の } f(x) \text{ に関する指数}), g_j(x) \leftarrow \pi_{A, e_j}(x)/f(x)^{\ell_j}, \mathbf{p}_j \leftarrow g_j(A)\mathbf{e}_j$
3. $\ell \leftarrow \max\{\ell_1, \dots, \ell_n\}$,
for $k = 0, 1, \dots, \ell$, do
 $J_k \leftarrow \{j \mid \ell_j = k\}$
4. $W_{\ell+1} \leftarrow \emptyset, r_{\ell+1} \leftarrow 0$,
for $k = \ell, \ell-1, \dots, 1$, do
 $U \leftarrow \{\mathbf{p}_j \mid j \in J_k\} \cup W_{k+1}$,
 $P \leftarrow (\mathbf{u})_{\mathbf{u} \in U}$: 行列,
 $r_k \leftarrow \text{rank}(f(A)^{k-1}P)$,
 $W_k \leftarrow \{\mathbf{w} \mid \mathbf{w} = \sum_{\mathbf{u} \in U} c_{\mathbf{u}}\mathbf{u} \neq \mathbf{0}, f(A)^{k-1}\mathbf{w} = \mathbf{0}\}$,
 $n_k \leftarrow (r_k - r_{k+1})/\deg f(x)$.
5. $S_f \leftarrow \{(k, n_k) \mid n_k \neq 0\}$.

なお、ステップ 4 では、ベクトルに $f(A)^i$ をかける計算が何度も行われているように見えるが、 W_k の元が $\mathbf{p}_j$ たちの一次結合であることに注意すると、各 $\mathbf{p}_j$ に対し、 $f(A)\mathbf{p}_j, \dots, f(A)^{\ell_j-1}\mathbf{p}_j$ を一度だけ計算して記憶しておくことで、計算量を抑えることができる。

例 1.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 3 & -25 & -10 & -11 & -2 \end{pmatrix}$$

ここで $f = x^2 + x + 5$ とすると、特性多項式・最小多項式は

$$\chi_A(x) = f^3, \quad \pi_A(x) = f^2$$

また、基本ベクトルに対する最小消去多項式は

$$\pi_{A,e_1}(x) = f^2, \quad \pi_{A,e_2}(x) = f, \quad \pi_{A,e_3}(x) = \pi_{A,e_4}(x) = \pi_{A,e_5}(x) = \pi_{A,e_6}(x) = f^2$$

最小消去多項式はわかったので、アルゴリズム 2 に基づいて計算してみると、 $r_2 = 2$, $r_1 = 4$, $\deg(x^2 + x + 5) = 2$ となる。よって、サイズ 2 のジョルダン細胞は $r_2/2 = 1$ 個、サイズ 1 のジョルダン細胞は $(r_1 - r_2)/2 = 1$ 個、あることがわかる。

4 一般固有空間の構造の決定法 (最小消去多項式候補による場合)

ここでは、基本最小消去多項式を用いるかわりに、基本最小消去多項式候補を利用することを考える。前述したように最小消去多項式候補から最小消去多項式を構成するためには、 $\pi_{A,u}(A)u = 0$ であるかの検証が不可欠となる。そこで、その検証にあたる手続きを一般固有空間の構造の決定とあわせて行うことで計算量の削減を試みる。

前節と同じように着目した固有値 λ の定義多項式を $f(x)$ とする。まず、アルゴリズム 1 により、すべての基本ベクトル e_j に対して、最小消去多項式候補 $\tilde{\pi}_{A,e_j}(x) = f(x)^{\ell_j} g'_j(x)$ を求める。 $f(x)$ に関する指数が k と一致する基本ベクトルの添字の集合を $J'_k = \{j \mid \ell_j = k\}$ と置く。最小消去多項式候補の指数は、最小消去多項式の指数の下界を与えているので、 $J'_k \subset J_k \cup J_{k+1} \cup \dots \cup J_m$ の関係にある。前節のアルゴリズム 2 を見ると、正しい J_k と p_j を与えないと計算できない。 p_j が分からないので、それぞれの添字 j に対して、ベクトル列 $\{p_j^{(i)}\}_{i=0,1,2,\dots}$ を

$$p_j^{(0)} = g'_j(A)e_j, \quad p_j^{(i+1)} = f(A)p_j^{(i)}$$

で定めよう。このとき $\{J'_k\}$, $\{p_j^{(i)}\}_i$ から $\{J_k\}$, $\{p_j\}$ を構成することが問題になる。なお、 $p_j^{(\ell_j)} = 0$ と $\tilde{\pi}_{A,e_j}(x) = \pi_{A,e_j}(x)$ は同値であるので、 $p_j^{(\ell_j)} = 0$ を調べるのが最小消去多項式候補の検証に対応する。

まず、 $k=0$ のときについて考える。 $j \in J'_0$ に対し、 $p_j^{(0)} = 0$ ならば、最小消去多項式候補は最小消去多項式に一致するので、 $j \in J_0$ であることが分かる。よって、 $p_j = p_j^{(0)}$ とする。しかしながら、 $p_j^{(0)} \neq 0$ であった場合は、 $f(x)$ 以外の因子の推定が誤っていることもあり得るので、 $j \notin J_0$ とは言えない。そこで、 $p_j^{(0)} \neq 0$ のときには次のように考える。特性多項式 $\chi_A(x) = f(x)^m G(x)$ に着目して、 $c_j(x) = G(x)/g_j(x)$ としよう。 $p_j = c_j(A)p_j^{(0)}$ とする。 $c_j(A)p_j^{(0)} = G(A)e_j$ は $f(A)$ 以外の全ての因子について左からかけたものであるから、もし、 $p_j = 0$ ならば、 $g_j(x)$ の推定が誤っていたことになり、 $j \in J_0$ である。 $c_j(A)p_j^{(0)} \neq 0$ のときは、 $f(x)$ の指数の推定が誤っているので、 $f(A)^s p_j$ ($s = 1, 2, \dots$) を順に求め、 $f(A)^s p_j = 0$ となる最小の s を探索する。このとき $j \in J_s$ である。

同様に $k > 0$ の場合を考える。 $j \in J'_k$ に対し、ベクトル列 $\{p_j^{(i)}\}_{i=0,1,2,\dots}$ を $i \leq k$ の範囲で求める。 $p_j^{(k)} = 0$ のときは、 $\tilde{\pi}_{A,e_j}(x) = \pi_{A,e_j}(x)$ であるので、 $j \in J_k$, $p_j = p_j^{(0)}$ としてよい。 $p_j^{(k)} \neq 0$ のときは、 $f(x)$ に関する指数の推定が正しいかを最初に調べる。 $k=0$ のときと同様に、特性多項式から $c_j(x)$ を定め、 $p_j = c_j(A)p_j^{(0)}$, $u_j = c_j(A)p_j^{(k-1)}$ とする。 $f(A)u_j = 0$ ならば、 $f(x)$ の指数の推定は正しく $j \in J_k$ である。 $f(A)u_j \neq 0$ ならば、 $f(A)^s(f(A)u_j) = 0$ となる最小の s を求めれば、 $j \in J_{k+s}$ となることが分かる。

以上より真の J_k と p_j が探索できたので、アルゴリズム 2 のステップ 4,5 を適用することで、一般固有空間の構造を求めることができる。これをアルゴリズムとして表わすと、次のようになる。

アルゴリズム 3 (ある固有値に関する一般固有空間の構造).

入力: 正方行列 A , 特性多項式 $\chi_A(x)$, 固有値 λ の定義多項式 $f(x) = f_s(x)$

出力: 固有値 λ のジョルダン鎖 S_f

1. $\{\tilde{\pi}_{A,e_1}(x), \dots, \tilde{\pi}_{A,e_n}(x)\} \leftarrow$ 最小消去多項式候補
2. **for** $j = 1, \dots, n$, **do**
 $\ell'_j \leftarrow$ ($\tilde{\pi}_{A,e_j}(x)$ の $f(x)$ に関する指数), $g'_j(x) \leftarrow \tilde{\pi}_{A,e_j}(x) / f(x)^{\ell'_j}$
3. $\ell \leftarrow \max\{\ell'_1, \dots, \ell'_n\}$,
for $k = 0, 1, \dots, \ell$, **do**
 $J_k \leftarrow \{j \mid \ell'_j = k\}$
4. **for** $j = 1, \dots, n$, **do**
 $\mathbf{p}_j^{(0)} \leftarrow g'_j(A)\mathbf{e}_j$
for $i = 1, \dots, \ell'_j$, **do**
 $\mathbf{p}_j^{(i)} \leftarrow f(A)\mathbf{p}_j^{(i-1)}$
5. **if** $\mathbf{p}_j^{(\ell'_j)} \neq \mathbf{0}$, **then**
 分解 $\{J_k\}$, ベクトル列 $\{\mathbf{p}_j^{(i)}\}_i$ および指数 ℓ'_j を再計算.
6. $W_{\ell+1} \leftarrow \emptyset$, $r_{\ell+1} \leftarrow 0$,
for $k = \ell, \ell-1, \dots, 1$, **do**
 $U \leftarrow \{\mathbf{p}_j^{(0)} \mid j \in J_k\} \cup W_{k+1}$,
 $P \leftarrow (\mathbf{u})_{\mathbf{u} \in U}$: 行列,
 $r_k \leftarrow \text{rank}(f(A)^{k-1}P)$,
 $W_k \leftarrow \{\mathbf{w} \mid \mathbf{w} = \sum_{\mathbf{u} \in U} c_{\mathbf{u}}\mathbf{u} \neq \mathbf{0}, f(A)^{k-1}\mathbf{w} = \mathbf{0}\}$,
 $n_k \leftarrow (r_k - r_{k+1}) / \deg f(x)$.
7. $S_f \leftarrow \{(k, n_k) \mid n_k \neq 0\}$.

ここで, アルゴリズム 1 のステップ 5 における再計算は, 既に述べた方針に基づいて, 次のルーチンで求めることができる.

アルゴリズム 4 (分解・ベクトル列・指数の再計算).

入力: ラッキーでない $\mathbf{p}_j^{(\ell'_j)} \neq \mathbf{0}$, および $\tilde{\pi}_{A,e_j}(x) = f(x)^{\ell'_j}g'_j(x)$, $\chi_A(x) = f(x)^{m_j}g_j(x)$.

出力: 分解 $\{J_k\}$, ベクトル列 $\{\mathbf{p}_j^{(i)}\}_i$, 指数 ℓ'_j

1. $\mathbf{p}_j^{(0)} \leftarrow g_j(A)\mathbf{e}_j$
for $i = 1, 2, \dots, \ell'_j$, **do**
 $\mathbf{p}_j^{(i)} \leftarrow f(A)\mathbf{p}_j^{(i-1)}$
2. **if** $\mathbf{p}_j^{(\ell'_j)} \neq \mathbf{0}$, **then**
 $m \leftarrow \min\{k \mid f(A)^k \mathbf{q}_j = \mathbf{0}\}$, $J_m \leftarrow J_m \cup \{j\}$, $J_{\ell'_j} \leftarrow J_{\ell'_j} \setminus \{j\}$,
for $i = \ell'_j + 1, \dots, m$, **do**
 $\mathbf{p}_j^{(i)} \leftarrow f(A)\mathbf{p}_j^{(i-1)}$
 $\ell'_j \leftarrow m$

アルゴリズム 3,4 では、ひとつの固有値に対する一般固有空間の構造を知るのを目的としているので、基本最小消去多項式候補の各因子 $f_s(x)$ に対する指数の関係については考慮されていない。一方、すべての固有値に対する一般固有空間の構造、すなわちジョルダン鎖を知る場合には、固有値ごとに指数を再計算するだけでは、計算の順序によっては既に正しいことが確認されている指数についても再計算してしまうことがあり、無駄が発生してしまう。そこで、分解 $\{J_k\}$ とベクトル列を再計算するだけでなく、同時に基本最小消去多項式候補たちも再計算していくことが考えられる。因子 $f_1(x), f_2(x), \dots$ の順に一般固有空間の構造を計算していく場合には、各時点で調べている因子 $f_s(x)$ より若い番号の因子については、指数が正しいことが確認されていることを仮定してもよい。そのようにしてアルゴリズム 4 を書き換えたのが次のルーチンである。

アルゴリズム 5 (分解・ベクトル列・最小消去多項式候補の再計算)。

入力: 固有値 λ の定義多項式 $f_s(x)$, ラッキーでない $\mathbf{p}_j^{(\ell'_j)} \neq \mathbf{0}$,

および $\tilde{\pi}_{A, e_j}(x) = \prod_i f_i(x)^{\ell'_{ij}}, \chi_A(x) = \prod_i f_i(x)^{m_i}$.

出力: 分解 $\{J_k\}$, ベクトル列 $\{\mathbf{p}_j^{(i)}\}_i$, 候補 $\tilde{\pi}_{A, e_j}(x)$

1. $g_{sj}(x) = \prod_{i < s} f_i(x)^{\ell'_{ij}} \prod_{s < i} f_i(x)^{m_i}$
2. $\mathbf{p}_j^{(0)} \leftarrow g_{sj}(A)e_j$
for $i = 1, 2, \dots, \ell'_{sj}$, do
 $\mathbf{p}_j^{(i)} \leftarrow f_s(A)\mathbf{p}_j^{(i-1)}$
3. if $\mathbf{p}_j^{(\ell'_{sj})} \neq \mathbf{0}$, then
 $m \leftarrow \min\{k \mid f_s(A)^k \mathbf{q}_j = \mathbf{0}\}$, $J_m \leftarrow J_m \cup \{j\}$, $J_{\ell'_{sj}} \leftarrow J_{\ell'_{sj}} \setminus \{j\}$,
for $i = \ell'_{sj} + 1, \dots, m$, do
 $\mathbf{p}_j^{(i)} \leftarrow f_s(A)\mathbf{p}_j^{(i-1)}$
 $\tilde{\pi}_{A, e_j}(x) \leftarrow f_s(x)^m \prod_{i \neq s} f_i(x)^{\ell'_{ij}}$

参 考 文 献

- [1] K. Ohara and S. Tajima: Spectral Decomposition and Eigenvectors of Matrices by Residue Calculus, Proceedings of the Joint Conference of ASCM 2009 and MACIS 2009, COE Lecture Note **22**(2009), Kyushu University, 137–140.
- [2] 小原功任, 田島慎一: 最小消去多項式候補を用いた行列の一般固有空間の構造の計算法について, COE Lecture Note **49**(2013), Kyushu University, 113–118.
- [3] 小原功任, 田島慎一: 最小消去多項式を用いた行列スペクトル分解計算の並列化, 京都大学数理解析研究所講究録 **1815**(2012), 21–28.
- [4] 小原功任, 田島慎一: 最小消去多項式を用いた行列スペクトル分解の並列算法, 日本数学会 2011 年度秋季総合分科会, 函数論分科会講演アブストラクト.
- [5] 小原功任, 田島慎一: 行列の最小消去多項式とその候補の計算法, 日本数学会 2013 年度年会, 代数学分科会講演アブストラクト.
- [6] 田島慎一: 一般固有ベクトル空間の構造を求める計算法について京都大学数理解析研究所講究録 **1843**(2013), 146–154.

- [7] 田島慎一, 奈良洗平, 小原功任: 行列の最小多項式計算について, 京都大学数理解析研究所講究録 **1814**(2012), 1-8.
- [8] 照井章, 田島慎一: 行列の最小消去多項式候補を利用した固有ベクトル計算, 京都大学数理解析研究所講究録 **1815**(2012), 13-20.
- [9] 照井章, 田島慎一: 行列の最小消去多項式候補を利用した固有ベクトル計算 (II), COE Lecture Note **49**(2013), Kyushu University, 119-127.
- [10] 照井章, 田島慎一: 行列の最小消去多項式候補を利用した固有ベクトル計算 (III), 京都大学数理解析研究所講究録投稿中.