数理解析研究所講究録
第 1907 巻 2014 年 85-89

消去イデアルの応用 IV*

高橋 正

TADASHI TAKAHASHI†

甲南大学 知能情報学部

DEPARTMENT OF INTELLIGENCE AND INFORMATICS, KONAN UNIVERSITY

Abstract

2 次元複素射影空間において特異平面 4 次曲線のパラメータをもつ定義方程式の制限を求めるために、その定義方程式から構成される多項式イデアルを求め、その多項式イデアルに対して変数を消去した消去イデアルを求める。このイデアルは、その定義方程式で定まる特異点をもつ平面 4 次曲線のパラメータの制限であり、その消去イデアルの表現と現れる特異点の個数と種類を明らかにする。

1 はじめに

まず、消去イデアルと拡張定理に関する基礎的事項を確認する ([1])。

$f_1, f_2, \cdots, f_s$ を変数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の複素数係数の多項式とし、連立代数方程式 $f_1=0, f_2=0, \cdots, f_s=0$ に付随するイデアルを I とする。1 変数多項式に関しては、基底は 1 つであり、ある多項式 $h(x_j)$ が存在して、

$$I \cap C[x_j] = \{a(x_j)h(x_j) \mid a(x_j) \in C[x_j)]\} = \langle h(x_j)\rangle$$

となる。したがって、$h(x_j)$ の解全体が $I \cap C[x_j]$ の解全体に一致する。つまり、$h(x_j)$ の解全体は、連立代数方程式 $f_1=0, f_2=0, \cdots, f_s=0$ の解の x_j 成分全体である。これを一般の場合で考えれば、

x_n を消去した消去イデアルは $I \cap C[x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}]$,

x_n, x_{n-1} を消去した消去イデアルは $I \cap C[x_1, x_2, \cdots, x_{n-2}]$,

$$\vdots$$

$x_n, \cdots, x_3$ を消去した消去イデアルは $I \cap C[x_1, x_2]$,

$x_n, \cdots, x_2$ を消去した消去イデアルは $I \cap C[x_1]$,

となり、下から解いていけば連立代数方程式 $f_1=0, f_2=0, \cdots, f_s=0$ の解がすべて得られる。このことは、以下の拡張定理によって保証されている。

定理 1 (拡張定理)
I を多項式イデアル、$V(I)$ が有限集合であるとし、変数全体の集合を X 、消去したい変数全体の集合を $Y \subset X$ とする。α が $V(I)$ の元であれば、α から変数 Y に対応する成分をとった β は $V(I \cap C[X \setminus Y])$ の元となる。

逆に、β を $V(I \cap C[X \setminus Y])$ の元とすれば、必ず、$V(I)$ の元 α が存在して、α から変数 Y に対応する成分をとったものが β となる。

*本研究の一部は平成 25 年度私立大学等経常費補助金特別補助「大学間連携等による共同研究」の支援で行われている。

†takahasi@konan-u.ac.jp

この定理の逆に以降は、解の個数が有限個の場合にのみ一般に成り立つ。特に、

$$I \cap C[x_1] = \langle g_1(x_1) \rangle,$$

$$I \cap C[x_1, x_2] = \langle g_1(x_1), g_2(x_1, x_2) \rangle,$$

$$\vdots$$

$$I \cap C[x_1, \cdots, x_{n-1}] = \langle g_1(x_1), \cdots, g_{n-1}(x_1, \cdots, x_{n-1}) \rangle,$$

$$I = \langle g_1(x_1), \cdots, g_n(x_1, \cdots, x_n) \rangle$$

となる場合が三角形式である。

$I \cap C[x_1, \cdots, x_i]$ の生成元を求めることは、グレブナー基底の計算により得ることができる。I のグレブナー基底を G とすると、$G \cap C[x_1, \cdots, x_i]$ が消去イデアル $I \cap C[x_1, \cdots, x_i]$ の生成元（グレブナー基底にもなっている）になることが知られている。

2　特異点を持つ4次曲線の分類

パラメータをもつ特異点の定義方程式において、そのパラメータがある条件を満たすとき、その方程式によって定義される特異点の位相型が変化する。そのような変化が生じない（パラメータの）条件を、特異点定義方程式の（パラメータの）制限という。

パラメータをもつ特異点定義方程式の制限を導出するには、その定義方程式から構成される多項式イデアルのグレブナー基底を求め、そのグレブナー基底で構成される多項式イデアルから変数を消去した消去イデアルを求めることで制限を得ることができる。

以下に、分類過程における1つの事例を示す。

事例：

$f := x^2z^2 + xy^3 + a_1y^4 + a_2y^3z + a_3y^2z^2 + a_4yz^3 + a_5z^4$ とし、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

による座標変換（線型変換）を行うと、

$f = x'^2z'^2 + x'y'^3 + c_1x'y'^2z' + c_2x'y'z'^2 + c_3x'z'^3 + c_4y'^4 + c_5y'^3z' + c_6y'^2z'^2 + c_7y'z'^3 + c_8z'^4$

となり、$c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8$ は、$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \alpha, \beta, \gamma$ によって、以下のように表される。

$$\begin{cases} c_1 = 3\gamma \\ c_2 = 2\alpha + 3\gamma^2 \\ c_3 = 2\beta + \gamma^3 \\ c_4 = a_1 + \alpha \\ c_5 = a_2 + \beta + 4a_1\gamma + 3\alpha\gamma \\ c_6 = a_3 + \alpha^2 + 3a_2\gamma + 3\beta\gamma + 6a_1\gamma^2 + 3\alpha\gamma^2 \\ c_7 = a_4 + 2\alpha\beta + 2a_3\gamma + 3a_2\gamma^2 + 3\beta\gamma^2 + 4a_1\gamma^3 + \alpha\gamma^3 \\ c_8 = a_5 + \beta^2 + a_4\gamma + a_3\gamma^2 + a_2\gamma^3 + \beta\gamma^3 + a_1\gamma^4 \end{cases}$$

上記において c_3, c_7, c_8 を $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \alpha, \beta, \gamma$ を変数とする多項式と見て c_3, c_7, c_8 の多項式イデアル $\langle c_3, c_7, c_8 \rangle$ から変数 α, β, γ を消去した消去イデアルを I_1 とする。

このとき、I_1 の生成元は一つの多項式となり、その多項式を f_1 とおくと、

$$f_1 = 256a_1^3a_2^2a_3^2a_4^2 - 432a_2^4a_3^2a_4^2 - 1024a_1^4a_3^3a_4^2 + \cdots + 34992a_2^2a_5^4 + 62208a_1a_3a_5^4 + 11664a_5^5$$

を得る（ f_1 は、76 項の多項式である)。I_1 を満たすとは、多項式 f_1 が 0 に等しいときとする。

I_1 を満たさないとき（ $f_1 \neq 0$ のとき)、上記 $f = 0$ で定義される平面 4 次曲線は、射影空間 $(1:0:0)$ において位相型 A_2 の特異点を持ち（その点以外では特異点を持たない)、この平面 4 次曲線のタイプは $\mathrm{III_m}$ 型になる（ただし、この条件の基で、上記 $c_2 = 0$ とすることができる。そのため、以下では、$c_2 = 0$ とすることも含める)。

ここで注意すべきことは、$\{c_2, c_3, c_7, c_8\} = \{0, 0, 0, 0\}$ とできる α, β, γ の解が存在するかどうかである。それについては、$\langle c_2, c_3, c_7, c_8 \rangle$ から変数 α, β, γ を消去した消去イデアルを求める際、変数消去を段階的に行い、α, β, γ の解の存在を確認することができる。まず、

$$3\gamma^5 - 8a_1\gamma^3 - 6a_2\gamma^2 - 4a_3\gamma - 2a_4 \in V(\langle c_2, c_3, c_7, c_8 \rangle) \cap C[\gamma]$$

により、$\{c_2, c_3, c_7, c_8\} = \{0, 0, 0, 0\}$ とできる解の候補としての γ が存在することが分かる。次に、

$$2\beta + \gamma^3 \in V(\langle c_2, c_3, c_7, c_8 \rangle) \cap C[\beta, \gamma]$$

より、$\{c_2, c_3, c_7, c_8\} = \{0, 0, 0, 0\}$ とできる解の候補としの β, γ の存在を確認することができる。そして、最後に、

$$2\alpha + 3\gamma^2 \in V(\langle c_2, c_3, c_7, c_8 \rangle) \cap C[\alpha, \beta, \gamma]$$

より、$\{c_2, c_3, c_7, c_8\} = \{0, 0, 0, 0\}$ となる解 α, β, γ の存在を確認することができる（連立代数方程式の三角形式の手法)。したがって $f_1 \neq 0$ は、$f = 0$ で定義される平面 4 次曲線が $\mathrm{III_m}$ 型であるためのパラメータ a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 の制限である。

次の段階として、$\{c_2, c_3, c_6, c_7, c_8\} = \{0, 0, 0, 0, 0\}$ となるパラメータ a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 の制限を考える。上と同様に $\langle c_2, c_3, c_6, c_7, c_8 \rangle$ から α, β, γ を消去した消去イデアルを I_2 とすると、I_2 のグレブナー基底は、

$$\{36a_2^2a_3a_4 - 128a_1a_3^2a_4 + 60a_1a_2a_4^2 + 375a_4^3 - 324a_2^3a_5 + 1152a_1a_2a_3a_5 - 1536a_1^2a_4a_5 - 1440a_3a_4a_5 + 2592a_2a_5^2, \cdots, 16a_1^2a_2a_3a_4 - 48a_2a_3^2a_4 - 144a_1^3a_4^2 + 180a_2^2a_4^2 - 80a_1a_3a_4^2 - 144a_1^2a_2^2a_5 + 512a_1^3a_3a_5 - 108a_2^2a_3a_5 + 384a_1a_3^2a_5 - 972a_1a_2a_4a_5 - 225a_4^2a_5 + 1152a_1^2a_5^2 + 864a_3a_5^2\}$$

となる。

I_2 のグレブナー基底は 6 つの多項式である。ここでも $\{c_2, c_3, c_6, c_7, c_8\} = \{0, 0, 0, 0, 0\}$ とできる α, β, γ の解の存在を調べる。

$$15\gamma^4 - 24a_1\gamma^2 - 12a_2\gamma^2 - 4a_3 \in V(\langle c_2, c_3, c_6, c_7, c_8 \rangle) \cap C[\gamma]$$

により、$\{c_2, c_3, c_6, c_7, c_8\} = \{0, 0, 0, 0, 0\}$ となる解の候補としての γ が存在することが分かる。次に、

$$8\beta^2 - 2a_2\beta - 3a_4\gamma + 8a_5 \in V(\langle c_2, c_3, c_6, c_7, c_8 \rangle) \cap C[\beta, \gamma]$$

より、$\{c_2, c_3, c_6, c_7, c_8\} = \{0, 0, 0, 0, 0\}$ となる解の候補としの β, γ の存在を確認することができる。
そして、最後に、

$$2\alpha + 3\gamma^2 \in V(\langle c_2, c_3, c_6, c_7, c_8 \rangle) \cap C[\alpha, \beta, \gamma]$$

より、$\{c_2, c_3, c_6, c_7, c_8\} = \{0,0,0,0,0\}$ となる解 α, β, γ の存在を確認することができる。

I_2 を満たすとは、I_2 のすべての多項式が 0 に等しいとすると、I_1 を満たし、I_2 を満たさないとき、$f=0$ で定義される平面 4 次曲線は、射影空間 $(1:0:0)$ において位相型 A_2 、 $(0:0:1)$ において位相型 A_1 の特異点を持ち（この 2 点以外では特異点を持たない)、その平面 4 次曲線のタイプは $\mathrm{III_k}$ 型になる。

ここで、I_2 のグレブナー基底を、$f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7$ とすると、$f_1 \in \langle f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7 \rangle$ である。

さらに、$\{c_2, c_3, c_5, c_6, c_7, c_8\} = \{0,0,0,0,0,0\}$ となるパラメータ a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 の制限を考える。上と同様に $\langle c_2, c_3, c_5, c_6, c_7, c_8 \rangle$ から α, β, γ を消去した消去イデアルを I_3 とすると、I_3 のグレブナー基底は、

$\{16a_3^2-45a_2a_4+144a_1a_5,\ 3a_2^2-8a_1a_3+30a_5,\ 2a_2a_3a_4-15a_1a_4^2+8a_1a_3a_5+162a_5^2,\ 2a_1a_2a_4-25a_4^2-32a_1^2a_5+72a_3a_5,\ 4a_1a_2a_3-24a_1^2a_4-10a_3a_4+81a_2a_5,\ 6a_1^2a_4^2-10a_3a_4^2-16a_1^2a_3a_5+81a_2a_4a_5-324a_1a_5^2,\ 16a_1^2a_3a_4-75a_2a_4^2-96a_1^2a_2a_5+216a_2a_3a_5-60a_1a_4a_5\}$

となる。

I_3 のグレブナー基底は 7 つの多項式である。ここでも $\{c_2, c_3, c_5, c_6, c_7, c_8\} = \{0,0,0,0,0,0\}$ となる α, β, γ の解の存在を調べる。

$$5\gamma^3 - 4a_1\gamma - a_2 \in V(\langle c_2, c_3, c_5, c_6, c_7, c_8 \rangle) \cap C[\gamma]$$

により、$\{c_2, c_3, c_5, c_6, c_7, c_8\} = \{0,0,0,0,0,0\}$ となる解の候補としての γ が存在することが分かる。次に、

$$4\beta^2 + a_4\gamma + 4a_5 \in V(\langle c_2, c_3, c_5, c_6, c_7, c_8 \rangle) \cap C[\beta, \gamma]$$

より、$\{c_2, c_3, c_5, c_6, c_7, c_8\} = \{0,0,0,0,0,0\}$ となる解の候補としの β, γ の存在を確認することができる。そして、最後に、

$$2\alpha + 3\gamma^2 \in V(\langle c_2, c_3, c_5, c_6, c_7, c_8 \rangle) \cap C[\alpha, \beta, \gamma]$$

より、$\{c_2, c_3, c_5, c_6, c_7, c_8\} = \{0,0,0,0,0,0\}$ となる解 α, β, γ の存在を確認することができる。

I_3 を満たすとは、I_3 のすべての多項式が 0 に等しいとすると、I_2 を満たし、I_3 を満たさないとき、$f=0$ で定義される平面 4 次曲線は、射影空間 $(1:0:0)$ において位相型 A_2 、 $(0:0:1)$ において位相型 A_2 の特異点を持ち（この 2 点以外では特異点を持たない)、その平面 4 次曲線のタイプは $\mathrm{III_j}$ 型になる。

ここで、I_3 のグレブナー基底を、$f_8, f_9, f_{10}, f_{11}, f_{12}, f_{13}, f_{14}$ とすると、$f_i \in \langle f_8, f_9, f_{10}, f_{11}, f_{12}, f_{13}, f_{14} \rangle$ $(1 \leqq i \leqq 7)$ である。

この事例の最後に $\{c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8\} = \{0,0,0,0,0,0,0\}$ となるパラメータ a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 の制限を考える。上と同様に、$\langle c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8 \rangle$ から α, β, γ を消去した消去イデアルを I_4 とすると、I_4 のグレブナー基底は、

$\{a_4^2-4a_3a_5,\ 4a_3a_4+27a_2a_5,\ a_2a_4-2a_1a_5,\ 8a_3^2+27a_1a_5,\ 2a_2a_3-a_1a_4,\ 8a_1a_3-27a_5,\ a_2^2+a_5,\ 2a_1a_2+a_4,\ a_1^2+a_3\}$

となる。

I_4 のグレブナー基底は 9 つの多項式である。$\{c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8\} = \{0,0,0,0,0,0,0\}$ となる α, β, γ の解の存在を調べる。

$$3\gamma^2 - 2a_1 \in V(\langle c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8 \rangle) \cap C[\gamma]$$

より、$\{c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8\} = \{0,0,0,0,0,0,0\}$ とできる解の候補としての γ が存在することが分かる。次に、

$$2\beta^2 + a_5 \in V(\langle c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8 \rangle) \cap C[\beta, \gamma]$$

より、$\{c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8\} = \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}$ となる解の候補としての β, γ の存在を確認することができる。そして、最後に、

$$2\alpha + 3\gamma^2 \in V(\langle c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8\rangle) \cap C[\alpha, \beta, \gamma]$$

より、$\{c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8\} = \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}$ となる解 α, β, γ の存在を確認することができる。

I_4 を満たすとは、I_4 のすべての多項式が 0 に等しいとすると、I_3 を満たし、I_4 を満たさないとき、$f = 0$ で定義される平面 4 次曲線は、射影空間 $(1:0:0)$ において位相型 A_2 、 $(0:0:1)$ において位相型 A_3 の特異点を持ち（この 2 点以外では特異点を持たない）、その平面 4 次曲線のタイプは $\mathrm{III_b}$ 型になる。

ここで、I_4 のグレブナー基底を、$f_{15}, f_{16}, f_{17}, f_{18}, f_{19}, f_{20}, f_{21}, f_{22}, f_{23}$ とすると、$f_i \in \langle f_{15}, f_{16}, f_{17}, f_{18}, f_{19}, f_{20}, f_{21}, f_{22}, f_{23}\rangle$ $(1 \leqq i \leqq 14)$ である。

このプロセスをすべての事例において繰り返すことで、分類を行うことができる。

3 結果と現状

上記事例において、連立代数方程式における三角形式を用いて解 α, β, γ の存在を確認した。解 α, β, γ の存在にパラメータの制限が関与する場合がある。この手法は、特異点を持たない平面 4 次曲線（非特異 4 次曲線）のパラメータの制限を求める際にも用いた（ [2] ）。しかし、上記事例においては、

$$2\alpha + 3\gamma^2,\ 2\beta + \gamma^3 \in \langle c_2, c_3, c_7, c_8\rangle$$

であり、初期の段階で γ の解が存在すれば、α, β の解は自動的に存在することになる。したがって、解の存在判定に必要なことは、このような場合は、連立代数方程式における共通解 γ の存在判定のみであった。この手法（ γ の解の存在のみを確認し、α, β の解の存在は、三角形式を用いるのではなく初期のイデアルの基底で確認する手法）の方が容易いことが分かった。グレブナー基底は等価でありかつ解きやすい多項式として求められるものであり、グレブナー基底の本質からみれば上記事例での解の存在確認は冗長な確認であった。

現在、非特異平面 4 次曲線のパラメータの制限を含め、これまで分類を行ったすべてのプロセスを、この手法で再度検証している。それらの検証を行い平面 4 次曲線のパラメータの制限をグレブナー基底の表現で統一的に表現することを目指している。

参 考 文 献

[1] 野呂正行・横山和弘, グレブナー基底の計算　基礎篇　計算代数入門. 東京大学出版会, 2003.

[2] T. Takahashi, A Note on the Application of Elimination Ideal II. Mathematical Sciences International Research Journal, Vol. 1, No. 1, pp. 21-48, 2012.