数理解析研究所講究録
第 1908 巻 2014 年 78-85

場の量子論入門と統計解析

京都大学　数理解析研究所 D3　岡村 和弥[1]

1　導入

量子論の透徹した根源的理解の目的には「場の量子論」を数学的に整備するとともに，実験データの整理・解析・解釈とも整合的であるために統計学的発想を理論の出発点に取り入れることが急務である。前者については未だ格闘中であるが，後者については [20] において量子論の公理系を新たに設定することで Born 統計公式を導出することに成功し，[18, 21] で得られた結果である統計的記述（大偏差型評価）とも整合的であるため一応の解決がされたといっても過言でないであろう（解明すべき課題は未だある)。

本稿の内容は幾つかの報告集に掲載されている記事と昨年の RIMS 研究集会の報告原稿 (数理研講究録 **1834**) とも重複するものであるため，数学的記述については簡潔にとどめ，概念的意義および物理的意味をより深めることに専念する。研究会発表では議論が主題にある内容にまで到達できなかったため，改めてここで紹介したい。尚，小嶋泉氏との共著 [19] (発展的内容は [16] 参照) には本格的かつ体系的に量子論の新しい定式化についてまとめられており，本稿に関連する作用素環論の詳細事項については [1, 23, 24] を参照していただきたい。

2　量子論の代数的定式化とセクター概念

$\mathcal{X}$ が C*-代数であるとは，対合 $*:\mathcal{X}\ni A\mapsto A^*\in\mathcal{X}$ をもつ代数であり，且つ，$\|A^*A\|=\|A\|^2$ をみたすノルム $\|\cdot\|$ をもつ Banach 空間であるときを言う（本稿では言及しない限り単位元 1 を持つことを仮定する)。そして，ω は線型汎関数であって，$\omega(A^*A)\geq 0$ および $\omega(1)=1$ を満たすとき $\mathcal{X}$ 上の状態であると呼ばれる。$E_{\mathcal{X}}$ で $\mathcal{X}$ 上の状態全体を表す。状態とは，非可換代数上に一般化された期待値を与える汎関数 (期待値汎関数) である。C*-代数 $\mathcal{X}$ とその上の状態 ω の組 $(\mathcal{X},\omega)$ を C*-確率空間と呼ぶ。

物理系の指定を行う際,「対象系はどのような物理量 (の族) に規定され，またそれらは測定可能か？」という観点が大切であり，物理量によって物理系が指定されていると見做してよい[2]。この観点から物理量を数学的概念による統制を行うために用いるのが *-代数[3]の概念である。非可換性の由来は物理系の動力学に任せるとして，物理量の多項式を扱う目的からは物理量に代数演算が許されるのはとても自然で，C*-代数は連続関数算法 (continuous functional calculus) まで可能な *-代数中でも大変理想的な部類である。一方，状態は物理系が置かれている実験設定・測定状況を与える概念である。定量的には，状態はあらゆる物理量の平均値 (測定値の平均) の指定に対応している。

以上から，次の公理を要請する：

公理 1 (物理量と状態 [20, 19]). 物理系の物理量のなす代数は C^*-代数 $\mathcal{X}$ によって与えられる。そして，物理系の実験設定・測定状況は $\mathcal{X}$ 上の状態 ω を与えることに指定される。

---

[1]連絡先 kazuqi@kurims.kyoto-u.ac.jp
[2]より発展的な見方については論文準備中。
[3]対合演算 $*:A\mapsto A^*$ で閉じた代数。

C^*-代数 $\mathcal{X}$ の状態空間 $E_{\mathcal{X}}$ には次のような近傍から生成される位相が導入される：任意の $A_i \in \mathcal{X}$, $\varepsilon_i > 0$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ に対し,

$$O_\omega(\{A_i, \varepsilon_i\}_{i=1}^n) = \{\omega' \in E_{\mathcal{X}} \mid |\omega(A_i) - \omega'(A_i)| < \varepsilon_i, i = 1, 2, \cdots, n\}.$$

この位相は有限個の量を有限精度で測る状況に対応したものである。

定理 1 (GNS 表現定理). 任意の $\omega \in E_{\mathcal{X}}$ に対し，Hilbert 空間 $\mathcal{H}_\omega$, 単位ベクトル $\Omega_\omega \in \mathcal{H}_\omega$ と $\mathcal{X}$ から $\boldsymbol{B}(\mathcal{H}_\omega)$ への表現（対合を保つ準同型写像のこと）π_ω で $\omega(A) = \langle \Omega_\omega | \pi_\omega(A) \Omega_\omega \rangle$ および $\mathcal{H}_\omega = \overline{\pi_\omega(\mathcal{X})\Omega_\omega}$ を満たす 3 つ組 $\{\pi_\omega, \mathcal{H}_\omega, \Omega_\omega\}$ を $\mathcal{X}$ の ω に伴う GNS 表現と呼ぶ。GNS 表現は各状態に対してユニタリー同値を除いて一意に定まる。

$S \subset \boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ に対し,

$$S' = \{A \in \boldsymbol{B}(\mathcal{H}) \mid AB = BA, B \in S\} \tag{1}$$

を S の可換子と呼ぶ。$S'' := (S')'$ を S の再可換子と呼ぶ。$\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ の *-部分代数 $\mathcal{M}$ で $\mathcal{M}'' = \mathcal{M}$ を満たすものを（$\mathcal{H}$ 上の）von Neumann 代数と呼ぶ。$\pi_\omega(\mathcal{X})''$ は状態 ω において生成される自然な（$\mathcal{H}_\omega$ 上の）von Neumann 代数である。

定義 2 (セクター). 因子状態の準同値類をセクターと呼び，その全体 $F_{\mathcal{X}}/\approx$ を $\widehat{\mathcal{X}}$ で表す。

セクターはマクロに見て異なる構造の分類指標の一単位である。一般化された熱力学的純粋相および確率論での根源事象の統合概念であって，ミクロから創発する動的な背景を持ちながら熱力学的な安定性に支えられており，マクロの基本単位であってミクロな内部構造も持ち合わせている。

以下ではセクターの定義に用いた用語の説明を行う。

定義 3 (因子状態). $\omega \in E_{\mathcal{X}}$ は，対応する *von Neumann* 代数 $\pi_\omega(\mathcal{X})''$ の中心が自明，すなわち，$\mathfrak{Z}_\omega(\mathcal{X}) := \pi_\omega(\mathcal{X})'' \cap \pi_\omega(\mathcal{X})' = \mathbb{C}1$ のとき，因子状態であると呼ばれる。$\mathcal{X}$ 上の因子状態全体を $F_{\mathcal{X}}$ で表す。

定義 4 (正規状態・π-正規状態). (1) *von Neumann* 代数 $\mathcal{M}$ 上の状態 ω は任意の正の有界増大ネット $A_\alpha \nearrow A$ に対し，$\lim_\alpha \omega(A_\alpha) = \omega(A)$ を満たすとき正規状態という。$\mathcal{M}_{*,1}$ で $\mathcal{M}$ 上の正規状態全体を表す。
(2) $\mathcal{X}$ を C^*-代数，π を $\mathcal{X}$ の表現とする。$\omega \in E_{\mathcal{X}}$ が π-正規であるとは，$\pi(\mathcal{X})''$ 上の正規状態 ρ が存在して，$\omega(X) = \rho(\pi(X))$, $X \in \mathcal{X}$ を満たすことをいう。

定義 5 (表現・状態の間の関係). (1) $\mathcal{X}$ の *2* つの表現 π_1, π_2 はどの π_1-正規状態も π_2-正規であり，その逆も成立するとき準同値であるといい，$\pi_1 \approx \pi_2$ で表す。
(2) $\mathcal{X}$ の *2* つの表現 π_1, π_2 は，どの π_1-正規状態も π_2-正規でなく，その逆も成立するとき無縁であるといい，$\pi_1 \between \pi_2$ で表す。

正値線型汎関数に対しても *GNS* 表現を用いて同様に定義される。

本稿で与えたセクターの定義の根拠が次の定理にある。

定理 6. *2* つの因子状態は準同値であるか，無縁であるかの二者択一である。

セクターの定義から次は容易に了解される：

同一のセクターに属する $\Rightarrow$ 準同値，　異なるセクターに属する $\Rightarrow$ 無縁

3　セクター，中心分解と確率則

状態空間 $E_{\mathcal{X}}$ は先ほどの位相でコンパクト局所凸空間である。Choquet の積分論が適用可能で，各 $\omega \in E_{\mathcal{X}}$ に対し，ω を重心にもつ $(E_{\mathcal{X}}, \mathcal{B}(E_{\mathcal{X}}))$ 上の正則 Borel 確率測度が存在する。セクターが状態空間の基本単位であると前章で述べたが，その際，準同値による同値類を考えることを出発点にとっていた。本章では一転して無縁性が状態識別の基準であるという立場から状態の積分分解についてアプローチしていく[4]。

定義 7 (準中心測度＝無縁な分解を与える測度)**.** $(E_{\mathcal{X}}, \mathcal{B}(E_{\mathcal{X}}))$ 上の正則 *Borel* 確率測度 μ が準中心測度であるとは次の性質を満たすときをいう：任意の $\Delta \in \mathcal{B}(E_{\mathcal{X}})$ に対して，

$$\int_{\Delta} d\mu(\rho)\ \rho \ \delta \ \int_{E_{\mathcal{X}} \setminus \Delta} d\mu(\rho)\ \rho. \tag{2}$$

無縁な分解を与える測度を準中心測度と呼ぶ理由については次の定理が明確な解答を与える：

定理 8 (冨田分解定理 [1, Theorem 4.1.25] の系)**.** (1) ω の準中心測度 μ と中心 $\mathfrak{Z}_{\omega}(\mathcal{X})$ の *von Neumann* 部分代数 $\mathfrak{B}$ は一対一対応する。μ, $\mathfrak{B}$ にこの対応があるとき，$L^{\infty}(\mu) := L^{\infty}(E_{\mathcal{X}}, \mu)$ は次で定義される写像 $\kappa_{\mu} : L^{\infty}(\mu) \to \mathfrak{B}$ により $\mathfrak{B}$ と *-同型である：

$$\langle \Omega_{\omega} | \kappa_{\mu}(f) \pi_{\omega}(X) \Omega_{\omega} \rangle = \int d\mu(\rho)\ f(\rho)\ \rho(X). \tag{3}$$

(2) 状態 ω において，中心 $\mathfrak{Z}_{\omega}(\mathcal{X})$ に対応する準中心測度 μ_{ω} （ω の中心測度と呼ぶ）は $F_{\mathcal{X}}$ に準台をもつ。$\mathcal{X}$ が可分ならば，μ_{ω} は $F_{\mathcal{X}}$ に台をもつ。

中心の von Neumann 部分代数の包含関係で大きい代数であればあるほど，対応する準中心測度はより細かい積分分解を与える。その中でも中心測度は最大であって，各状態に対し一意に存在する。それ故に，因子状態を状態の基本単位にする。言い換えれば，中心測度は $F_{\mathcal{X}}$ に準台をもち，中心測度は状態をセクターへと分解する唯一の重心測度である。物理的には，中心測度が中心に対応した状態の積分分解を与える確率測度であることから了解されるように，中心 $\mathfrak{Z}_{\omega}(\mathcal{X})$ はあらゆる物理量 ($\pi_{\omega}(\mathcal{X})''$ の元) と可換な物理量の極大系であって，これを用いることによりこの状態 (およびその GNS 表現) を用いて指定できる限りの実験 (測定) 状況で共通のパラメータで状態を分解できるということを意味している。準中心分解とはこの観点から中心測度より“粗い”分解であり，ある程度セクターを“束”にしてまとめて扱う場合に対応している。

公理 2 (セクターと確率空間 [20, 19])**.** $\mathcal{X}$ を系の物理量代数とする。状態空間のマクロな基本単位はセクターによって与えられ，系の状態が $\omega \in E_{\mathcal{X}}$ であるときに $\Delta \in \mathcal{B}(E_{\mathcal{X}})$ に属するセクターが出現する確率は $\mu_{\omega}(\Delta)$ で与えられる。

[4]講演では「直交性」の概念を出発点として状態の積分分解について考えた。そちらのアプローチについてのまとめは他の講演原稿に譲る。

この公理を認めることで先の議論を測度論的確率論の現実的な状況 (測定過程等) へと応用可能になる。次章では実際に (準) 中心測度を活用していく。

状態の準中心分解を扱ったので, (漸くではあるが) ここで可換 C*-代数を例として扱おう。$\mathcal{X}$ が可換 C*-代数であるとき, 次の有名な定理が知られている：

定理 9 (Gel'fand-Naimark 定理). $\mathcal{X}$ はある局所コンパクト *Hausdorff* 空間 S 上の無限遠で 0 になる複素数値連続関数のなす C^*-代数 $C_0(S)$ と C^*-代数として同型である。

この定理における局所コンパクト Hausdorff 空間 S は $\mathcal{X}$ 上の指標全体 $Spec(\mathcal{X})$ と位相空間として同型である：

$$Spec(\mathcal{X}) = \{\chi \in E_{\mathcal{X}} \mid \chi(AB) = \chi(A)\chi(B),\ A, B \in \mathcal{X}\}. \tag{4}$$

加えて, コンパクト凸空間である $E_{\mathcal{X}}$ の端点集合 (純粋状態の集合) を $\mathcal{E}(E_{\mathcal{X}})$ で表すとき,

$$Spec(\mathcal{X}) = \mathcal{E}(E_{\mathcal{X}}) = F_{\mathcal{X}} \tag{5}$$

が成立する。すなわち, 可換な場合には純粋状態と因子状態は一致する。Gel'fand-Naimark 定理に基づいて, 次の定理を援用すれば, 可換 C*-代数は全て $Spec(\mathcal{X})$ 上の正則 Borel 確率測度に他ならない：

定理 10 (Riesz-Markov-Kakutani 定理). 局所コンパクト *Hausdorff* 空間 S 上の無限遠で 0 になる複素数値連続関数のなす C^*-代数 $C_0(S)$ 上の正値線型汎関数と S 上の正値正則 *Borel* 測度は一対一対応する。

以上から, 可換 C*-代数での C*-確率空間 $(\mathcal{X}, \omega)$ の考察は測度論的な確率空間 $(Spec(\mathcal{X}), \mathcal{B}(Spec(\mathcal{X})), \mu)$ (μ は ω に対応する正則 Borel 確率測度) において連続関数環 $C(Spec(\mathcal{X}))$ を用いている状況に対応していることが了解される。とはいえ, 上の Riesz-Markov-Kakutani 定理も実は冨田分解定理の特別な場合であって, 冨田分解定理 (の系) で中心測度を考察する場合が Riesz-Markov-Kakutani 定理であることが次の定理から了解される：

定理 11 ([23, Chapter III, Theorem 1.2]). S を局所コンパクト *Hausdorff* 空間とし, μ を S 上の正値正則 *Borel* 測度とする (この測度による積分で定義される正値線型汎関数も μ で表す)。
(i) $C_0(S)$ の μ に対する *GNS* 表現 $(\pi_\mu, \mathcal{H}_\mu, \Omega_\mu)$ は *Hilbert* 空間 $L^2(S, \mu)$, $L^2(S, \mu)$ の掛け算作用素 M_f, $f \in C_0(S)$, S 上の定数関数 1 に実現する：

$$\mathcal{H}_\mu = L^2(S, \mu), \quad \pi_\mu(\cdot) = M_\cdot, \quad \Omega_\mu = 1\ ;$$

(ii) *von Neumann* 代数 $\pi_\mu(C_0(S))''$ は $L^2(S, \mu)$ 上で極大可換である, すなわち,

$$\pi_\mu(C_0(S))'' = \pi_\mu(C_0(S))'; \tag{6}$$

(iii) $\pi_\mu(C_0(S))''$ は 次で定義される作用素 $\pi(f)$, $f \in L^2(S, \mu)$ からなる。

$$(\pi(f)\xi)(s) = f(s)\xi(s), \quad \xi \in L^2(S, \mu), s \in S. \tag{7}$$

一般のC*-確率空間$(\mathcal{X},\omega)$から測度論的確率空間への移行についてはあまり議論されることはなかったが[5]，量子論を考える過程で本稿はセクター概念を量子確率論の中核に据えることで自然にその移行について議論できた（著者の博士論文も同様のスタイルで執筆した）。この方向性は量子確率論の新しい展望を切り開くうえで重要であると考えている。

4 代数的場の量子論の基本事項

代数的場の量子論とは端的に言って，

「時空自由度に依存した量子系を扱う理論体系」への代数的アプローチ

である。場の量子論の数学的基盤が未だ出来上がっていないため，この手法（の一般に提示されるような一辺倒なあり方）だけでは限界があるのだが，von Neumannが量子論の数学的基礎の追究という動機を持って作用素環の研究を始めたことから歴史的には自然な研究手法であって（von Neumann以後の歴史的な経緯は私には荷が重いため省く），私個人としても有望だと考えている。それ故に代数的場の量子論のほんの入り口を紹介しようと思う。

局所ネット$\{\mathcal{A}(\mathcal{O})|\mathcal{O}\in\mathcal{K}\}$とは，Minkowski空間$M_4$の二重錐の集合$\mathcal{K}=\{\mathcal{O}=(a+V_+)\cap(b-V_+)\mid a,b\in M_4\}$　$(V_+=\{x\in M_4\mid x^2=x_0^2-\sum_{j=1}^3 x_i^2>0, x_0>0\}$は$M_4$の前方光錐）からC*-代数への写像（正しくは圏論における函手）$\mathcal{O}\mapsto\mathcal{A}(\mathcal{O})$であって，以下の3条件を満たすものである：

1) $\mathcal{O}_1\subset\mathcal{O}_2$ならば，$\mathcal{A}(\mathcal{O}_1)\subset\mathcal{A}(\mathcal{O}_2)$；

2) $\mathcal{K}$の元$\mathcal{O}_1$と$\mathcal{O}_2$が空間的であるとき，$\mathcal{A}(\mathcal{O}_1)$の任意の元と$\mathcal{A}(\mathcal{O}_2)$の任意の元は互いに可換である。ここで，2つの時空領域$\mathcal{O}_1$と$\mathcal{O}_2$が空間的であるとは，一方の領域$\mathcal{O}_1$の因果的補集合$\mathcal{O}_1'=\{x\in M_4\mid(x-y)^2<0, y\in\mathcal{O}_1\}$に対し$\mathcal{O}_1'\supset\mathcal{O}_2$を満たすときをいう；

$\mathcal{A}:=\overline{\cup_{\mathcal{O}\in\mathcal{K}}\mathcal{A}(\mathcal{O})}$は全ての局所ネットから生成される最小のC*-代数である。また，$Aut(\mathcal{A})$で$\mathcal{A}$上の*-自己同型写像全体を表す。

3) Poincaré群$\mathcal{P}_+^\uparrow$の作用(*-準同型)$\alpha_g:\mathcal{P}_+^\uparrow\to Aut(\mathcal{A})$, $g\in\mathcal{P}_+^\uparrow$, に対して共変である，すなわち，$\alpha_g(\mathcal{A}(\mathcal{O}))=\mathcal{A}(g\mathcal{O})$が任意の$\mathcal{O}\in\mathcal{K}$と$g\in\mathcal{P}_+^\uparrow$に対して成り立つ。

この抽象的な定義の物理的動機は有界な時空領域において測定可能な物理量の全体を指定することで物理系を特徴づけることを第一に，因果的制約および相対論的制約を加味したものである。言い換えるならば，定義からして明示的なのだが，局所ネットは時空自由度に依存しているため，考察対象の物理系と接する（外部）系と対比が可能となるようなマクロなスケールで自然な条件を課している。場の量子論とはミクロとマクロの対比から系の動力学を探り記述する物理体系であると言える。

代数的量子論の記述形式に則れば，系の状態を指定する必要がある。代数的場の量子論において基準となる状態があり，その代表格が「真空状態」である。ω_0が真空状態であるとは，ω_0は$\mathcal{A}$上の状態であって以下の2条件を満たすことを言う：

[5]可換の場合で満足している議論があまりに多いため。特殊な状況・特定の場合でのアナロジーは理解の手助けにはなっても考察対象そのものの理解の目的には更に一歩踏み出す必要がある。現在もより進んだ解析を展開中である。

A) ω_0 は $\mathcal{P}_+^\uparrow$-不変状態である，すなわち，任意の $A \in \mathcal{A}$ および $g \in \mathcal{P}_+^\uparrow$ に対して

$$\omega_0(\alpha_g(A)) = \omega_0(A); \tag{8}$$

この条件から ω_0 に対する GNS 表現 $(\pi_0, \mathcal{H}_0, \Omega_0)$ において α_g はユニタリー実現する：任意の $A \in \mathcal{A}$ および $g \in \mathcal{P}_+^\uparrow$ に対して

$$\pi_0(\alpha_g(A)) = U_g \pi_0(A) U_g^*. \tag{9}$$

加えて，このユニタリー表現は $U_g\Omega = \Omega$ を満たす。この U_g を用いることで続く条件が記述できる：

B) Poincaré 群 $\mathcal{P}_+^\uparrow$ の並進部分群 $\mathbb{R}^4$ に関する U_g の生成子 $P = (P_\mu)_{\mu=0,1,2,3}$ のスペクトルは閉前方光錐 $\overline{V_+} = \{x \in M_4 \mid x^2 = x_0^2 - \sum_{j=1}^3 x_i^2 \geq 0, x_0 \geq 0\}$ に含まれる；

A) は時空に関する一様性，**B)** は最低エネルギーの存在と粒子的振舞いをする励起の存在に関する条件である。物理的状況・実験設定の記述には本来“全時空”にわたる物理量代数 $\mathcal{A}$ 上の状態を指定することなど到底不可能であるが，一種の理想化・極限として想定することは可能であり，そのような位置づけの下に採用される状態である。この状態を基準として，与えられた局所ネット $\{\mathcal{A}(\mathcal{O}) | \mathcal{O} \in \mathcal{K}\}$ において物理的な励起を記述する状態を考察するのが DHR(Doplicher-Haag-Roberts) 理論であり，次段落以降ではこれについて紹介していこう。

本稿では今後，真空状態 ω_0 に対する GNS 表現は可分な Hilbert 空間 $\mathcal{H}_0$ 上の忠実 ($\ker(\pi_0) = \{0\}$) な既約表現であることを仮定する。加えて，以下の 2 つ条件を課す：

1 (Haag 双対性). 非有界な時空領域 $\tilde{\mathcal{O}}$ に対して $\mathcal{A}(\tilde{\mathcal{O}}) = \overline{\cup_{\mathcal{O} \subset \tilde{\mathcal{O}}, \mathcal{O} \in \mathcal{K}} \mathcal{A}(\mathcal{O})}$ と定義する。任意の $\mathcal{O} \in \mathcal{K}$ に対して，$\pi_0(\mathcal{A}(\mathcal{O}))'' = \pi_0(\mathcal{A}(\mathcal{O}'))'$ が成り立つとき，局所ネット $\{\mathcal{A}(\mathcal{O}) | \mathcal{O} \in \mathcal{K}\}$ は Haag 双対性を満たすという。

2 (性質 B). $\mathcal{O}_1$ が $\mathcal{O}_2$ の内部に含まれる時空領域とするとき，任意の射影作用素 $E \in \mathcal{A}(\mathcal{O}_1)$ に対し，$W^*W = E$, $WW^* = 1$ を満たす $W \in \mathcal{A}(\mathcal{O}_2)$ が存在する。

これら 2 条件の意義についての説明は省略する。

DHR 理論 [3, 4, 5, 6, 7] とは

$$\text{局在励起＝時空的に局在した励起} \tag{10}$$

を基本単位に据える理論である。時空的に局在している状況とは言い換えれば因果的な領域では励起がなく真空と区別がつかない状況である。この状況の数学的な記述は以下のようになる：

DHR 選択基準 局在励起を表す物理的な $\mathcal{A}$ の表現 (の族) は局在している領域 $\mathcal{O} \in \mathcal{K}$ の因果的補集合 $\mathcal{O}'$ においては真空表現 π_0 とユニタリー同値である：

$$\pi|_{\mathcal{A}(\mathcal{O}')} \cong \pi_0|_{\mathcal{A}(\mathcal{O}')}. \tag{11}$$

DHR 選択基準は，性質 B の仮定の下，表現のレベルである表現 π における π-正規状態を同時に扱う場合に対応しているので，この選択基準は物理的にも数学的にも妥当であるといえる。DHR 選択基準を満たす表現に対し次の命題が成立する。

命題 12. $\mathcal{O}$ に局在化した *DHR* 選択基準を満たす表現 π に対し，次を満たす $\mathcal{A}$ の *-自己準同型 ρ が存在する：
(1) $\pi = \pi_0 \circ \rho$,
(2) $\rho(A) = A,\ A \in \mathcal{A}(\mathcal{O}')$。

この命題の証明は 1 (Haag 双対性). を本質的に用いている。この命題を通して得られる *-自己準同型の全体

$$\mathrm{DR}(\mathcal{A}) := \{\rho \in \mathrm{End}(\mathcal{A}) \mid \exists \mathcal{O} \in \mathcal{K} \text{ s.t. } \rho(A) = A, A \in \mathcal{A}(\mathcal{O}')\} \tag{12}$$

が局所ネット $\{\mathcal{A}(\mathcal{O})|\mathcal{O} \in \mathcal{K}\}$ で記述される系の局在励起を表す。DR($\mathcal{A}$) は真空からの“ずれ”として局在励起を集めてきたものであって，DR($\mathcal{A}$) の元には演算が入る。その演算の意味は DR($\mathcal{A}$) を“C*-圏”として扱うことで理解できる。実は Doplicher-Roberts の有名な結果 [6] から，DR($\mathcal{A}$) はあるコンパクト群 G のユニタリー表現のなす圏 Rep(G) と圏として同値である。この結果は局在励起を識別するラベルはあるコンパクト群 G の表現 γ によって供給されることを物理的に意味している。このラベルは通常「量子数」と呼ばれ，内部対称性（時空以外に関する対称性）を表すコンパクト群 G の既約表現がその最小単位になる。また，この結果は内部対称性の起源を明らかにするものであり，実験データをセクター理論的に解析するなかで DHR 選択基準を満たす表現を集めることで内部対称性を抽出できる。

ここでは議論しなかったが，実は Haag 双対性を満たす局所ネットでは“対称性の破れ”は起こらない。Haag 双対性の代わりに本質的双対性 (essential duality) を満たす局所ネットを考察することで“対称性の破れ”が起きる場合を扱うことができる。それ故，上の DHR 理論はあくまで“対称性の破れ”が起こらない系での局在励起とそれに関わる内部対称性の理論であり物理的には非常に限られた状況での量子場の記述に他ならない点を注意しておく。“対称性の破れ”が起きる場合への DHR 理論の拡張は [13, 14] を参照していただきたい。

5 セクター理論からの統計的推測

セクター理論における統計的推測の基本は「状態の (準) 中心測度の活用」に尽きている。というのも，(準) 中心測度に対しては古典的な統計的手法が適用可能だからである。この文脈で著者は大偏差原理 [2, 8, 9] に関する研究を行った。大偏差原理は大標本理論との関係から大量データが与えられた状況で，データ数 (サンプル数) が無限大になる極限における収束先と収束レートの見積もりを主題にしている。データから得られる経験測度の“真”の確率測度への確率的収束を示す「Sanov の定理」が大偏差原理の基本定理の 1 つである。この定理の収束レートを決める関数 (レート関数と呼ばれる) として確率測度上の関数である相対エントロピーが現れる。そして，量子論の文脈においてもこの定理をセクター理論に考察することができる。その「Sanov の定理の量子版」は中心測度を用いることで証明され，量子相対エントロピーがレート関数であると判明する。その過程で重要となる日合・大矢・塚田の定理 [11] を引用して本稿を終える：

定理 13. μ, ν それぞれを状態 φ, ψ を重心にもつ確率測度とする。$\mu, \nu \ll m$ となる準中心測度 m が存在するならば,

$$S(\varphi\|\psi) = D(\mu\|\nu). \tag{13}$$

ただし，$S(\varphi\|\psi)$ は量子相対エントロピー [*22*, *25*] で，$D(\mu\|\nu)$ は相対エントロピー：

$$D(\mu\|\nu) = \begin{cases} \displaystyle\int d\mu(\rho) \log \frac{d\mu}{d\nu}(\rho), & (\mu \ll \nu), \\ +\infty, & (\text{otherwise}). \end{cases} \tag{14}$$

参考文献

[1] O. Bratteli and D.W. Robinson, *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics* (vol. 1), Springer-Verlag (1979).

[2] I. Csiszár, Bull. Brazilian Math. Soc. **37**, (2006) 453-459.

[3] S. Doplicher, R. Haag and J.E. Roberts, I & II, Comm. Math. Phys. **13**, 1-23 (1969); **15**, 173-200 (1969).

[4] S. Doplicher, R. Haag and J.E. Roberts, I & II, **23**, 199-230 (1971) & **35**, 49-85 (1974).

[5] S. Doplicher and J.E. Roberts, Ann. Math. **130**, 75-119 (1989).

[6] S. Doplicher and J.E. Roberts, Invent. Math. **98**, 157-218 (1989).

[7] S. Doplicher and J.E. Roberts, Comm. Math. Phys. **131**, 51-107 (1990).

[8] A. Dembo and O. Zeitouni, *Large deviations techniques and applications* (2nd ed.), (Springer, 2002).

[9] R.S. Ellis, *Entropy, Large Deviations, and Statistical Mechanics*, (Springer, 1985).

[10] R. Harada and I. Ojima, Open Sys. Inf. Dyn. **16**, 55-74 (2009).

[11] F. Hiai, M. Ohya and M. Tsukada, Pacific J. Math. **107**, 117-140 (1983).

[12] I. Ojima, Order Parameters in QFT and Large Deviation, RIMS Kokyuroku **1066** 121-132 (1998), (in Japanese).

[13] I. Ojima, Open Sys. Inf. Dyn. **10**, 235-279 (2003).

[14] I. Ojima, Publ. RIMS **40**, 731-756 (2004).

[15] I. Ojima,"Micro-Macro Duality in Quantum Physics", pp.143-161 in Proc. Intern. Conf. on Stochastic Analysis, Classical and Quantum (World Scientific, 2005), arXiv:math-ph/0502038.

[16] 小嶋 泉,『量子場とミクロ・マクロ双対性』，丸善出版，(2013).

[17] I. Ojima and K. Okamura, Open Syst. Inf. Dyn. **19**, 1250021 (2012).

[18] I. Ojima and K. Okamura, Open Syst. Inf. Dyn. **19**, 1250022 (2012).

[19] 小嶋 泉，岡村 和弥,『無限量子系の物理と数理』，サイエンス社，(2013).

[20] I. Ojima, K. Okamura and H. Saigo, Derivation of Born Rule from Algebraic and Statistical Axioms, (2013), arXiv:1304.6618, to appear in Open Sys. Inf. Dyn.

[21] K. Okamura, Quant. Inf. Process. **12**, 2551-2575, (2013).

[22] M. Ohya and D. Petz, *Qunatum Entropy and Its Use*, (Springer, Berlin, 1993).

[23] M. Takesaki, *Theory of Operator Algebras I*, (Springer, 1979).

[24] M. Takesaki, *Theory of Operator Algebras II*, (Springer, 2002).

[25] 大矢 雅則，梅垣 寿春,『確率論的エントロピー』,『量子論的エントロピー』，共立出版，(1983, 1984).