

# 動的幾何学ソフトウェアを用いた授業実践例

東海大学・理学部数学科 前田 陽一

Yoichi Maeda

Department of Mathematics, Tokai University

maeda@tokai-u.jp

**Abstract.** この論文では, 動的幾何学ソフトウェア (dynamic geometry software) を用いた, 大学での数学の授業例を紹介し, 動的幾何学ソフトの可能性を検証する. 動的幾何学ソフトを用いて作図することは, 時として幾何学的事実を証明することよりもはるかに深い理解を促すことがある. 作図には, 一般に複数の方法があり, さらにこれ以上簡単な作図法がないと思われる, 美しく簡潔な作図法も存在する. 証明というある意味で間接的静的な理解に比べ, 作図すること, さらにそれを動的に動かすことによって直接的視覚的な理解が得られる動的幾何学ソフトは, 幾何学への新しいアプローチを与えてくれる. 本稿では, 特に反転コマンドを中心に, その有効性を検証する.

## 1 ポンスレ-シュタイナーの作図定理より

ポンスレ-シュタイナーの作図定理というものが存在する [1]. それによれば, ユークリッド幾何の作図において, コンパスの使用回数をできるだけ少なくすることを考えた場合, 多くても 1 回の使用だけで作図が可能である (定規の使用回数には制限を設けない). 授業で次のような問題を取り上げた:

次の作図をするために, コンパスは最低何回必要か?

**作図問題 1** 直線  $L$  上に点  $P$  がある.  $P$  を通り,  $L$  に垂直な線を作図せよ.

**作図問題 2** 直線  $L$  上にない点  $P$  をとる.  $P$  を通り,  $L$  に垂直な線を作図せよ.

上記の問題に対して, 次のような解法を用意していた (図 1).

**作図問題 1 の解**

- (1) 点  $P$  を通り, 直線  $L$  と交わる円  $C$  を描く.
- (2) 点  $P$  ではない, もう一つの交点を  $P_1$  とする.
- (3) 円  $C$  の中心  $O$  と点  $P_1$  を通る直線  $L_1$  をひく.
- (4) 直線  $L_1$  と円  $C$  とのもう一つの交点を  $P_2$  とする.
- (5) 点  $P_2$  と点  $P$  を結ぶ直線が, 求める垂線である.

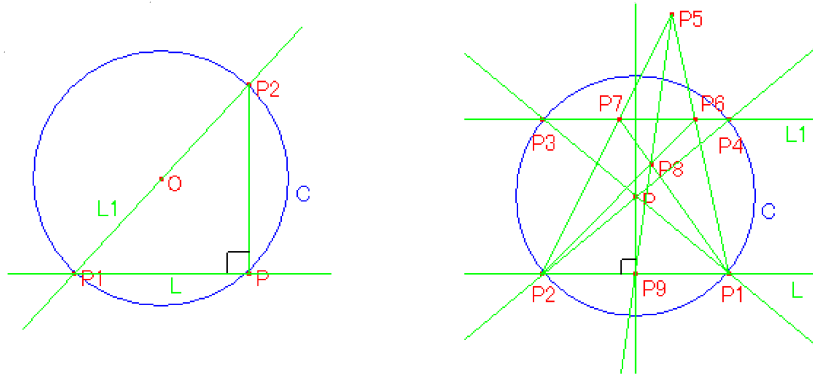


図 1: 作図問題 1 の解 (左) と作図問題 2 の解 (その 1)(右)

#### 作図問題 2 の解 (その 1)

- (1) 点  $P$  を中心とし、直線  $L$  と交わる円  $C$  を描く。
- (2) 直線  $L$  と円  $C$  との交点を  $P_1, P_2$  とする。
- (3) 直線  $PP_1$  と円  $C$  とのもう一つの交点を  $P_3$  とする。
- (4) 直線  $PP_2$  と円  $C$  とのもう一つの交点を  $P_4$  とする。
- (5) 点  $P_3$  と点  $P_4$  を通る直線を  $L_1$  とする。
- (6) 二直線  $L, L_1$  上にない点  $P_5$  を任意にとる。
- (7) 直線  $P_1P_5$  と直線  $L_1$  との交点を  $P_6$  とする。
- (8) 直線  $P_2P_5$  と直線  $L_1$  との交点を  $P_7$  とする。
- (9) 直線  $P_1P_7$  と直線  $P_2P_6$  との交点を  $P_8$  とする。
- (10) 直線  $P_5P_8$  と直線  $L$  との交点を  $P_9$  とする。
- (11) 点  $P_9$  と点  $P$  を結ぶ直線が、求める垂線である。

作図問題 2 の解 (その 1) では、後半に 2 点の midpoint を求める作図を用いている。作図問題 1 の解は、最短手数で作図であると思われる。一方、作図問題 2 の解 (その 1) は、最短手数の作図ではなかった。最短手数と思われる作図法を、ある学生が発見した。その作図法は、次のとおりである (図 2)。

#### 作図問題 2 の解 (その 2)

- (1) 直線  $L$  上に中心を持ち、点  $P$  を通らない円  $C$  を描く。
- (2) 直線  $L$  と円  $C$  との交点を  $P_1, P_2$  とする。
- (3) 直線  $PP_1$  と円  $C$  とのもう 1 つの交点を  $P_3$  とする。
- (4) 直線  $PP_2$  と円  $C$  とのもう 1 つの交点を  $P_4$  とする。
- (5) 直線  $P_1P_4$  と直線  $P_2P_3$  の交点を  $P_5$  とする。
- (6) 点  $P$  と点  $P_5$  を結ぶ直線が、求める垂線である。

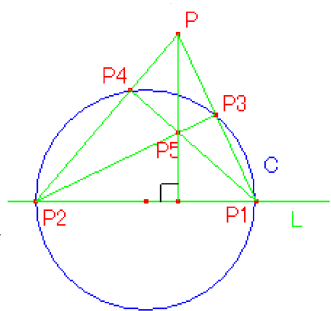


図 2: 作図問題 2 の解 (その 2)

この例でみるように、作図問題には、複数の作図法が存在する。このことは、独自の作図法を考えるための良い教材となりうる。さらに、作図には、これ以上最短手数にはならない、シンプルで美しい作図法がしばしば存在する。最短手数かどうかの証明はできなくても、直観的に最短手数であろうことがわかる。そのような作図は、何らかの数学の命題を含んでいることが多い。上記の作図問題 2 の解 (その 2) では、三角形の 3 垂線が一点 (垂心) で交わるという事実をうまく利用している。このようなベストな作図法を見つけることも、幾何学を学ぶ楽しみとなっている。

## 2 反転を用いた非ユークリッド幾何へのアプローチ例

筆者は、東海大学理学部数学科の計算機数学演習 B という授業で、動的幾何学ソフトを用いた授業を行っている。使用しているソフトウェアは Cabri geometry II plus という商用ソフトである。geogebra というフリーソフトウェアでも基本的に同じことが可能である。この講義では、反転を用いて、非ユークリッド幾何学を学習する。高校までの幾何の授業では、反転は習わない。定規とコンパスで作図するのが困難でもある。しかし、動的幾何学ソフトウェアには反転コマンドがあるので、非常に便利である。ユークリッド幾何学に慣れ親しんでいる学生にとって、非ユークリッド幾何学はかなり常識とかけ離れた幾何に見える。そのギャップを埋めるための 1 つの方策として、次の問題を考えさせる。

**問題 1** 平面上に任意に 4 点  $A, B, C, D$  をとり、そのうちの 3 点を通る円を 4 つ作る。各点の周りに 6 つの角ができ、合計 24 個の角が存在する。角度が同じ角を同じ角とみなすとき、角は全部で何種類になるか? (図 3(左))

答えは、意外と少なく 3 つである。この証明は、反転を用いて簡単に示せる。一点例えば点

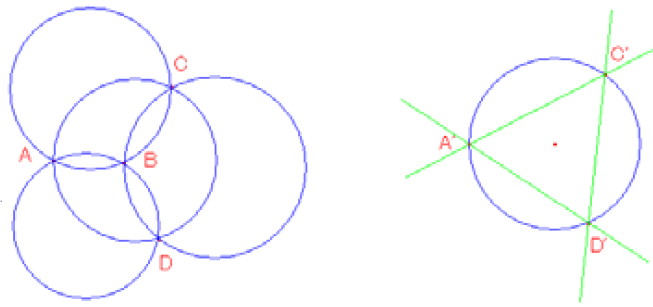


図 3: 4つの円(左)とその反転(右)

B を中心とする任意の半径の円に関する反転をとると, 図 3(右) のようになり, 接弦定理から角は 3 種類とわかる. ただし, 反転が等角写像で, 円円対応であることを予め学習しておく必要がある.

[2] は, 双曲幾何の入門書として優れた本である. この中で, “Dr. Whatif’s Euclidean geometry” という幾何が紹介されている. 特別な点 D を予め用意しておき, 2 点 A, B を通る直線を円 ABD とする幾何学である (図 3(左)). 三角形 ABC は, 3 つの円弧で構成される図形となる. この幾何学では, 三角形の内角の和は  $180^\circ$  である. このことは問題 1 の 3 種類の角の和が  $180^\circ$  であることから直ちにわかる. この幾何学は, 本質的にユークリッド幾何学であるが, 非ユークリッド幾何学を学ぶ準備となる. 曲がっている曲線も, 測地線として見慣れる, という利点がある.

反転を使うと, 非ユークリッド幾何学の作図は容易にできる (図 4). 双曲幾何は, 反転で, 球面幾何は, 反転と点対称を用いて測地線が作図できる.

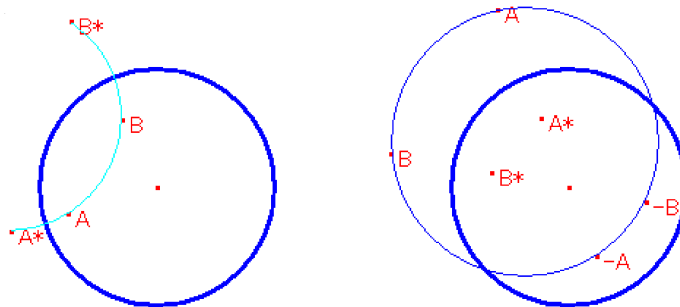


図 4: 双曲幾何の測地線(左)と球面幾何の測地線(右)

### 3 共通接線とその応用

この講義で反転と共に、重要なキーワードが「相似の中心」である。相似の中心を利用して、共通接線を引くテクニックを習得する。その前に、円に接線を引くことを復習しておく。方法としては、いくつか考えられるが、中点を使う方法(図5(左))と、反転を使う方法(図5(右))を教えている。その後、2つの円に共通接線を引くことを考えさせるが、この

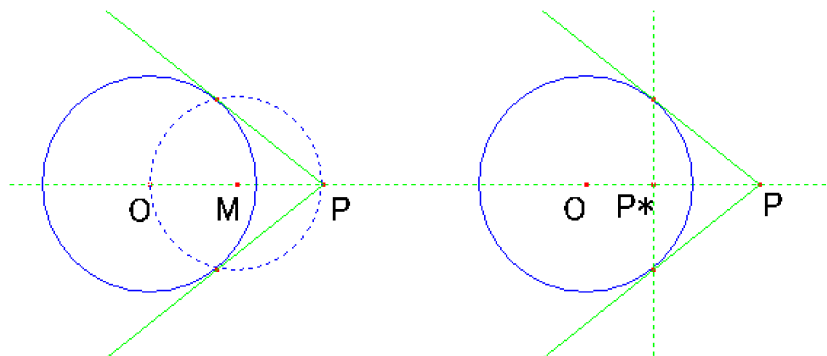


図 5: 円に接線を引く方法：中点法(左)と反転法(右)

時、円には角(かど)がないので相似の中心を見つけることが難しい。そこで、「満月を半月にして考えよ」と指導している。学生の中には、相似の中心が2つ存在することに気が付く者もいる。共通接線を引く作図法は、次のとおりである(図6)。

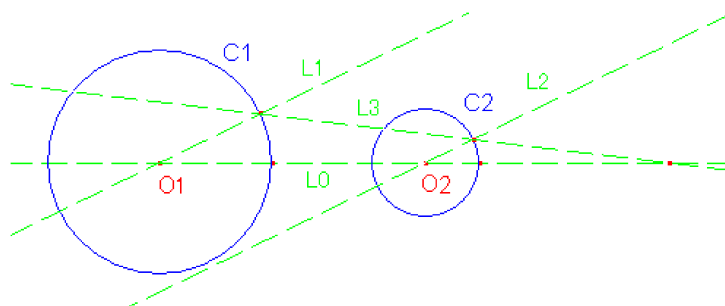


図 6: 相似の中心を求める方法

**2つの円の共通接線の作図法** 2つの円  $C_1$  と  $C_2$  の中心を  $O_1$ ,  $O_2$  とする。

- (1) 2点  $O_1$ ,  $O_2$  を通る直線  $L_0$  をひく。
- (2) 点  $O_1$  を通る任意の直線を  $L_1$  とする。
- (3) 点  $O_2$  を通り、直線  $L_1$  と平行な直線  $L_2$  をひく。
- (4) 直線  $L_1$  と円  $C_1$  の交点と、直線  $L_2$  と円  $C_2$  の交点を結ぶ直線を  $L_3$  とする。
- (5) 直線  $L_3$  と直線  $L_0$  との交点が相似の中心である。

共通接線の応用として、3つの円に対する3つの相似の中心が共線であることを作図、証明する(図7)。3次元空間の問題として、3つの円を3つの塔を上空から見た図に見立てると、相似の中心3点は2つの塔が重なって見える地点に対応している。共線上から見ると、3つの塔の先端が一直線上に見える(図7の点D)。では、3つの塔が同じ高さ(仰角)に見える

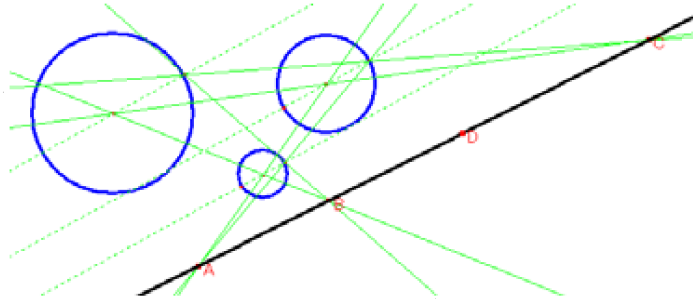


図7: 3つの塔の先端が一直線上に見える地点

地点はどこであろうか? 実は、多くても2点であり、しかも共線上にはない。一般に2つの円の相似の中心は2点存在するが、この2点を直径とする円を作図するとこれら3つの円は交点を持つことがある。この交点が、同じ高さに見える地点となる(図8)。

この後の展開として、方べきを用いて根軸や根心へ発展させることもできる。

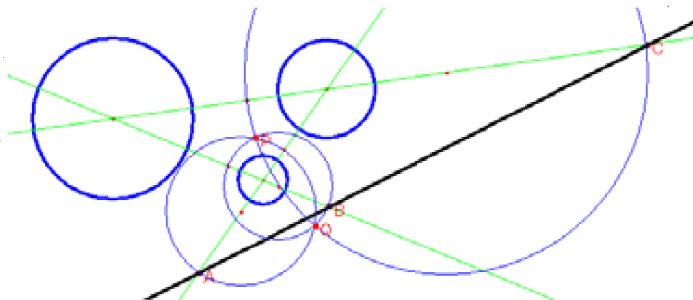


図8: 3つの塔の先端が同じ高さに見える地点

#### 4 方べきとその応用

方べきは、ユークリッド幾何において非常に重要な概念である。この講義では、方べきをうまく利用した作図法を考えさせることを試みている。その準備として、相加相乗平均が図形的に理解できることを学習する(図9(左))。  $a = AD$ ,  $b = BD$  としたとき、円の半径は  $\frac{a+b}{2}$ , また方べきから  $CD = \sqrt{ab}$  である。  $CD$  は半径より小さいことから、相加相乗平

均  $(\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab})$  が導かれる. この作図を応用して, 次の作図が可能となる (図 9(右)).

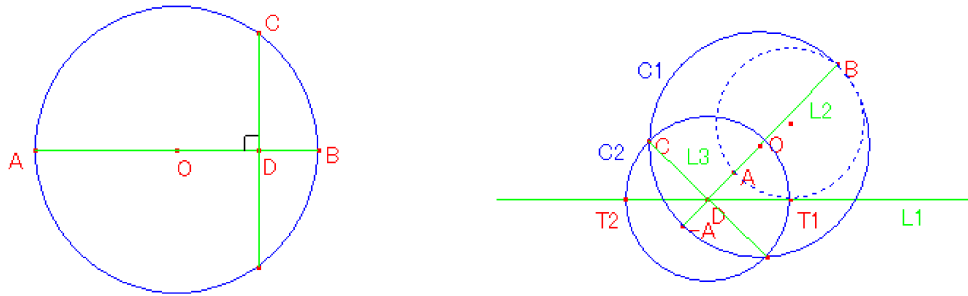


図 9: 目で視る相加相乗平均 (左) と 2 点を通り直線に接する円 (右)

**2 点を通り, 1 本の直線に接する円の作図法** 2 つの点を  $A, B$ , 直線を  $L_1$  とする.

- (1) 2 点  $A, B$  を通る直線  $L_2$  をひく.
- (2) 2 直線  $L_1, L_2$  の交点を  $D$  とする.
- (3) 点  $D$  に関して, 点  $A$  の対称点を  $-A$  とする.
- (4) 2 点  $-A, B$  の中点  $O$  を中心とし, 点  $B$  を通る円  $C_1$  を描く.
- (5) 直線  $L_2$  に垂直で, 点  $D$  を通る直線  $L_3$  を引く.
- (6) 円  $C_1$  と直線  $L_3$  との交点の一つを  $C$  とする.
- (7) 点  $D$  を中心とし, 点  $C$  を通る円  $C_2$  を描く.
- (8) 円  $C_2$  と直線  $L_1$  との交点  $T_1, T_2$  が求める円の接点である.

## 5 試験問題例

以上の学習内容を踏まえた, 試験問題例として次のようなものがある:

**試験問題例** 次の図形を作図するアルゴリズムを述べよ.

- (1) 3 点  $A, B, C$  を通る円
- (2) 2 点  $A, B$  を通り, 直線  $L_1$  に接する円
- (3) 1 点  $A$  を通り, 2 直線  $L_1, L_2$  に接する円
- (4) 3 直線  $L_1, L_2, L_3$  に接する円

(1) は外接円, (2) は前節の作図問題である. (3) は, 角の 2 等分線に関する  $A$  の対称点をとることによって, (2) に帰着させることができる. また, 相似の中心の考え方を利用した作図法もある (これについても, 学生の手紙から教えてもらった). (4) は, 内接円, 傍接円で

ある. 2直線  $L_1, L_2$  が直交する場合には, これら 4つの円の半径には,  $r_0 + r_1 + r_2 = r_3$  というきれいな関係が成立する. この事実も, 相似の中心と共通垂線を考えることによって, 容易に理解できる (図 10).

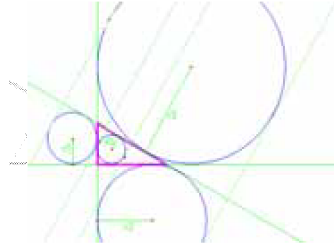


図 10: 直角三角形の内接円と傍接円の半径の関係  $r_0 + r_1 + r_2 = r_3$

## 6 結論

本稿の内容, および授業経験を通して結論を述べるとすると, 主に次の3つに集約される.

1. 動的幾何学ソフトは, 作図を通して様々なことへの理解, また新たな発見が得られるという意味において, 教育, 研究に非常に有用なツールである. 特に, 反転コマンドは球面幾何, 双曲幾何を学習するには, 必要不可欠なものである.
2. 学生は「幾何が苦手」というが, 「証明が苦手」なのであって, 決して幾何が嫌いなわけではない. 中学校, 高等学校で習った内容を動的幾何学ソフトでリメディアルし, さらに高度な数学を学ぶことができる. まず, 作図をすることから始めるとよい. 作図をすることは, 実験的要素があり, 証明をしなくても, 数学の命題を発見し, それが正しいことを直感的に把握することができるからである. その後, 幾何学的な証明を考えさせる. できれば代数的な証明にもチャレンジさせ, 代数的証明の有効性を理解させる.
3. 作図法には, 複数の解がある. 最初から, 最短手順の作図はできないが, 何度も作図を繰り返すことによって, 自然と簡単な作図が身についてくる. 往々にして, 作図には, 最短手順の作図法があり, その作図法には数学的に重要な真理が含まれている. この意味で, 最短手順の作図法を探すことに, 数学的意味があり, 動的幾何学ソフトは, 非常に有用である.



## 参考文献

- [1] Eves, Howard Whitley (1995), College Geometry Jones & Bartlett Learning, pp.180-186.
- [2] Marta Sved (1997), Journey into Geometries The Mathematical Association of America, pp.47-58.