数理解析研究所講究録
第 1909 巻 2014 年 84-93

動的幾何学ソフトにおける非ユークリッド幾何学の取り扱い方について

龍谷大学・理工学部　大西　俊弘
Toshihiro Onishi
Faculty of Science and Technology
Ryukoku University

1. はじめに

非ユークリッド幾何学を高校生に教える試みは，山崎らによって 1970 年代から行われているが，あまり一般的とはなっていない．普及しない理由として，次の 3 つが考えられる．

①高校生にとって，理論が難解である．

②発展的な内容であるため，取り組む時間の確保が難しい．

③非ユークリッド幾何学の各種のモデルを直接見ることが難しいため，イメージを掴みにくい．

しかし，時代が移り，教育政策の変化や ICT 機器の普及により，上記の課題を克服することが可能となってきた．まず，理数系教育の充実をはかる目的で，2002 年から「スーパーサイエンスハイスクール（SSH）」制度が始まり，2013 年度現在，全国で 201 校の高等学校・中等教育学校が文部科学省によって指定されている．それらの学校には，理数好きの生徒が集まる傾向があり，学校設定科目「SSH 数学」や「課題学習」などの時間が設定されているので、①と②は障壁とはなりにくい．

PC 等の ICT 機器の高機能化・低価格化が進み，数学教育においても，使いやすいフリーソフトが多数開発されている．それらを利用すると，課題③の壁も乗り越えることができそうである．

しかし，非ユークリッド幾何学用のソフトは数も少なく，あったとしても内部がブラックブックス化されていて，その仕組みが分からないのが普通である．そこで，本研究では，ユークリッド幾何学を学ぶために作られた既存の動的幾何ソフトを用いて非ユークリッド幾何学の各種モデルを構築すること第１の目的とする．第１の目的を達することができれば，どのような教材に取り組むのかが次の課題となる．具体的な教材を提案することが，本研究の第２の目的である．

2. 非ユークリッド幾何学用ソフトウェア

非ユークリッド幾何学（non-Euclidean geometry）のうち，双曲幾何学を扱う教育用のフリーソフトウェアとしては，図１に示した「NonEuclid」などが開発されている．また、球面幾何学を扱う教育用のフリーソフトウェアとしては，図２に示した「Easel」などが開発されている．

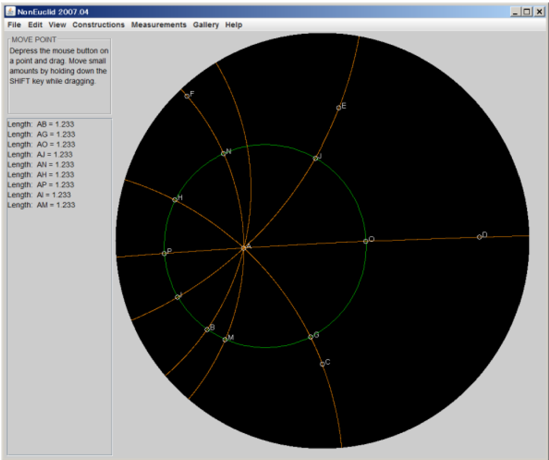

図１　NonEuclid

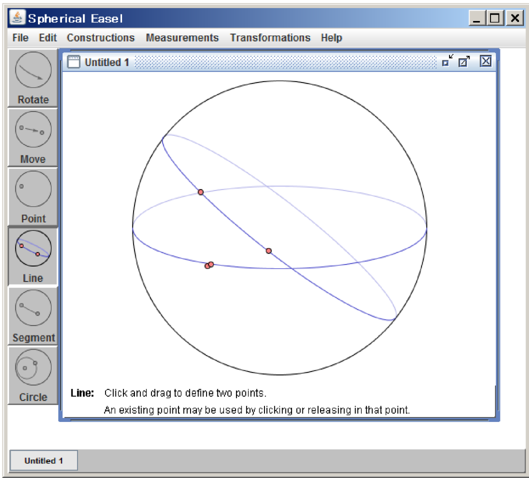

図２　Easel

「NonEuclid」や「Easel」などの専用ソフトウェアは高機能ではあるが，次のような課題がある．

①ソフト毎に操作性が異なる。

②ユークリッド幾何学が扱えない。

③内部がブラックボックス化されており、その仕組みが分からない。

3. 動的幾何学ソフトウェア

3.1 動的幾何学ソフトとは

動的幾何学ソフトウェア（Dynamic Geometry Software）とは，次のような機能を持つソフトウェア群の総称である．

①幾何学図形（平面図形 or 立体図形）を作図できる。（作図機能）

②作図した図形の数学的な性質を維持したまま変形できる。（変形機能）

③図形中の辺の長さや角度の大きさなどを計測できる。（計測機能）

最初に開発された「The Geometric Supposer」以来，既に 30 年近い歴史があり，現在では様々なソフトが開発されている．

日本では，1990 年代から主として中学校で「cabri」や「Geometric Constructor」が比較的よく使われてきたが，欧米に較べると利用は低調である．世界的には，「GeoGebra」が高機能で使いやすいとの評価を得ており，近年普及が目覚ましい．

3.2 動的幾何学ソフトと非ユークリッド幾何学

動的幾何学ソフトウェアでは，ユークリッド幾何学のみを扱うのが普通であるが，図３に示した「Cinderella」だけは，球面幾何や双曲幾何などの「非ユークリッド幾何学」を扱う機能も内蔵されている．「Cinderella」では，表２に示した課題のうち，①と②は解決されるが，③は解決されていない．

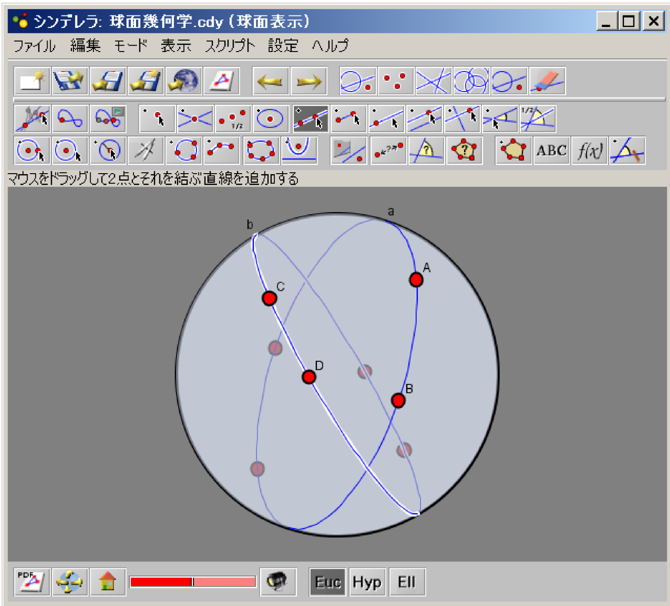

図３　Cinderella による球面幾何学

「The Geometer's Sketchpad」や「GeoGebra」などの動的幾何ソフトウェアにおいても，「非ユークリッド幾何学」を扱えるようにする取り組みはいくつかあり，それらは各ソフトのマクロ機能を利用して開発されている．しかしながら，その開発手法・動作原理が文書の形で公開されてはいないため，当該マクロはブラックボックスに近い状態となっている．

本研究では，ユークリッド幾何学しか扱えない動的幾何学ソフトにおいて，マクロ機能を利用して，「非ユークリッド幾何学」を扱えるようにするための，手法・動作原理についてまとめ，「GeoGebra」上でその機能を実装する．

4. ポアンカレ円盤モデルの実装

4.1 ポアンカレの円盤モデルとは

非ユークリッド幾何学の世界を，我々の目に見える形で表したものが「モデル」である．双曲幾何学の公理系を満たすモデルは，１つではなく，様々に構築することができる．ポアンカレの円盤モデル（Poincaré disk model）は，双曲幾何学のモデルの１つで，距離の定義を工夫することで，原点を中心とする単位円盤内に空間を限定したモデルである．このモデルにおける「直線」は，図４に示したように，その円盤の境界線（円）と直交する円弧（または直径）となる．

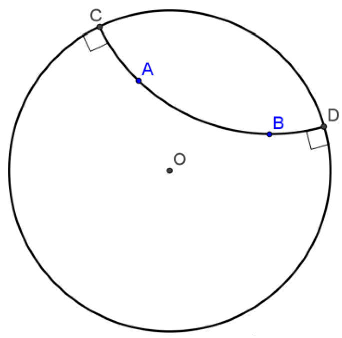

図４　ポアンカレ円盤モデルでの直線

4.2 「直線」の作図方法

動的幾何学ソフトを用いて，ポアンカレの円盤モデルにおける「直線」をどのように描けばよいかについて考察する．

ポアンカレ円盤内の２点Ａ，Ｂを指定したとき，図４のような「直線ＡＢ」を描くためには，図５のような補助円 H を描き，その一部分である円弧 CD を描けばよい．

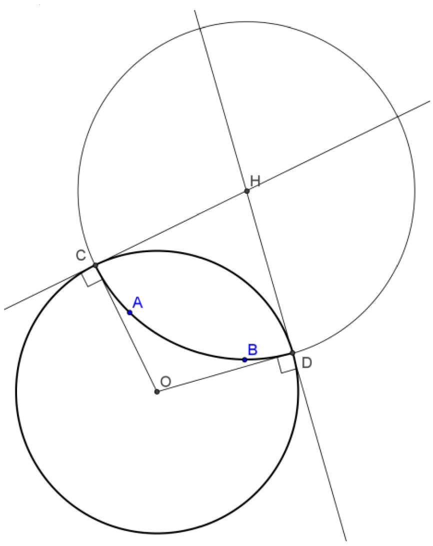

図５　補助円

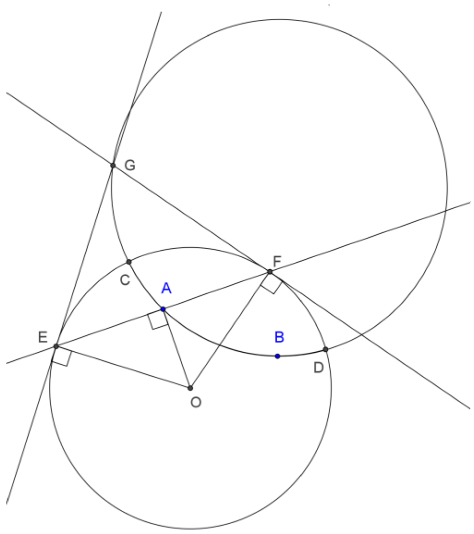

図６　補助円の決定方法

図６において，点Ｇは点Ａを円０に関して反転した点であり，点Ｇも補助円上にあることが知られている．よって，補助円とポアンカレ円盤上の「直線」の作図は次の手順で行えばよい．

①点Ａと円の中心０を結ぶ線分 A0．　②点Ａにおいて線分 A0 を垂直な直線 l．

③直線 l と円０の交点をＥ，Ｆ．　④点Ｅにおいて線分 E0 を垂直な直線 m．

⑤点Ｆにおいて線分 F0 を垂直な直線 n．⑥直線 m と直線 n の交点をＧ．

⑦3 点 A,B,G を通る円（補助円）．　⑧円０と補助円の交点をＣ，Ｄ．

⑨3 点 A,C，Ｄを通る円弧

この作図は，**GeoGebra** が標準で持つ作図機能を組み合わせて実現できるので，その作図手順をマクロ登録することによって，「(ポアンカレ円盤上の）２点を通る直線の作図」という新しい機能を **GeoGebra** に追加することができる．

4.3 「線分」の作図方法

基本的な考え方は，「直線」の場合と⑦までは同じで，⑧以降は次のようになる．

⑧線分 AB の（ユークリッド的な）中点Ｍ　⑨線分 0M と補助円の交点をＮ

⑩3 点 A,N,B を通る円弧

4.4 「角度」の計測方法

ポアンカレ円盤上の線分ＡＢと線分ＢＣのなす角は，図７に示したように，点Ｂにおける（ユークリッド的な）円弧 AB の接線と，点Ｂにおける（ユークリッド的な）円弧 BC の接線とのなす角で定義される．

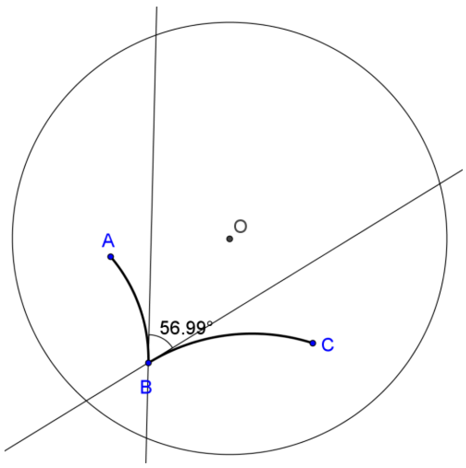

図７　角度の測定方法

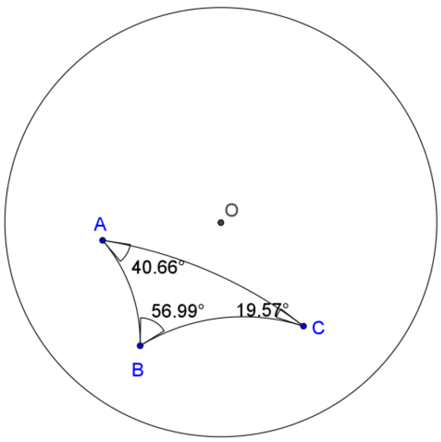

図８　ポアンカレ円盤上の三角形

4.5 「三角形」の作図方法

3 点 A, B, C を指定して，三角形 ABC を描くには，線分 AB, BC, CA を描けばよい．図８のように，ポアンカレ円盤上の三角形では，内角の和は 180° よりも小さくなることに注意する．四角形以上の多角形についても，作図方法は同じである．

4.6 「距離」の計測方法

図９に示した，ポアンカレ円盤上の２点Ａ，Ｂ間の距離（双曲的線分ＡＢの長さ）は，次のように定義される．

$$d(A,B)=\left|\log\left(\frac{\overline{AD}\cdot\overline{BC}}{\overline{AC}\cdot\overline{BD}}\right)\right|$$

ここで，$\overline{AD},\overline{BC},\overline{AC},\overline{BD}$ は，ユークリッド的な距離（線分の長さ）である．

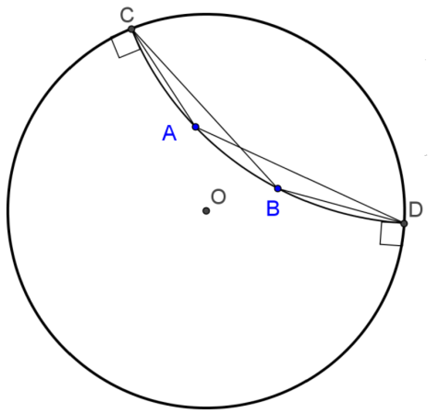

図９　２点間の距離

4.7 GeoGebra への実装上の課題

ここまでに示した各手順で，GeoGebra 上で作図を行い，その結果をマクロとして登録することで，実装は完了している．このマクロ機能は，Geogebra が元から持っている作図メニューと同等に使用でき，ポアンカレ円盤上の基本的な作図は全て行うことができる．しかし，操作性が悪い部分等があり，次のような課題が残っている．

①操作を行う度に，単位円とその中心を指定する必要がある．

②角度の計測において，点の位置関係によっては，余角や補角が表示されることがある．

上記の課題を解決するとともに，「ポアンカレの半平面モデル」などの他のモデルについても，作図機能の実装を行いたい．

5. 教材の提案

5.1 数学的な素養のある学生向け

前節で述べたマクロの実装には，様々な幾何学的な知識が必要である．数学的な素養がある生徒・学生にとっては，マクロの実装こそが最も勉強になるものであり，ポアンカレ円盤モデルをより深く理解することにつながるであろう．

5.2 一般的な学生向け

開発したマクロを用いると，ポアンカレ円盤上で作図を行い，ユークリッド幾何学と同様の定理が成り立つか探究する活動が可能となる．

例えば,GeoGebra などの動的幾何学ソフトウェアを用いて,三角形の５心を作図し,その性質を調べる授業はよく行われている．その活動を行った後に，ポアンカレ円盤上の「三角形」を作図し，ユークリッド幾何学における三角形の５心に相当するものが存在するか調べる活動を提案したい．

①重心（３中線の交点）

中学校や高等学校では，図 10 のように，ユークリッド幾何学における三角形の重心を扱っている．具体的には，3 中線が 1 点で交わることや，CG:GF=2:1 となることを学んでいる．今回開発したマクロを用いると，図 11 のように，同じ作図をポアンカレ円盤モデル上で行うことができ，3 中線が 1 点で交わるか，長さの比はどうなるか，といったことを調べることができる．動的幾何学ソフトウェアの変形機能や計測機能を用いて，変形しても幾何学的な性質が維持されるのか確認することも出来る．

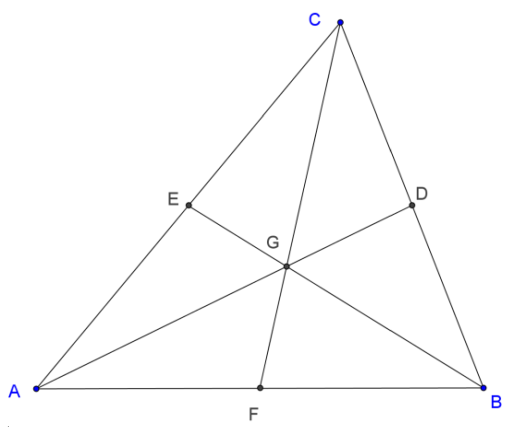

図 10　ユークリッド幾何学における重心

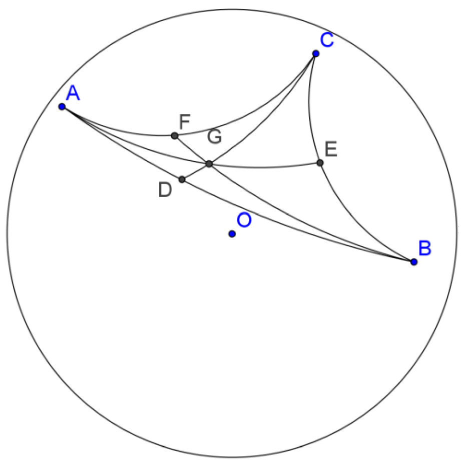

図 11　ポアンカレ円盤上の重心

②内心（内角の二等分線の交点）

図 12 に示すように，三角形の３つの内角の二等分線も１点で交わり，ユークリッド幾何学の「内心」に相当するものが存在する．また，「内接円」に相当するものも存在する．

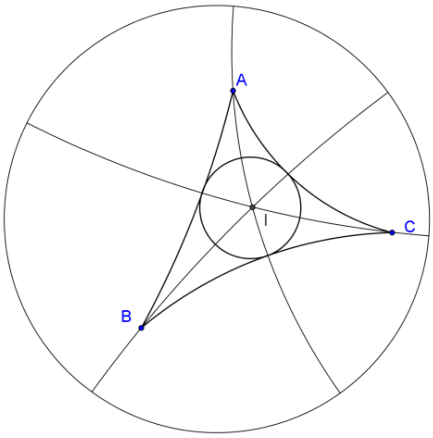

図 12　３つの内角の２等分線の交点

③外心（3 辺の垂直二等分線の交点）

図 13・図 14 に示すように，三角形の３辺の「垂直二等分線」が１点で交わる場合と交わらない場合がある．これは，ポアンカレ円盤上での２つ「直線」が必ず交点を持つとは限らないことに由来し，ユークリッド幾何学との違いが現れてくる．

３辺の「垂直二等分線」が１点で交わる場合には，ユークリッド幾何学の「外心」に相当するものが存在し，実際に外接円を描くことができる．

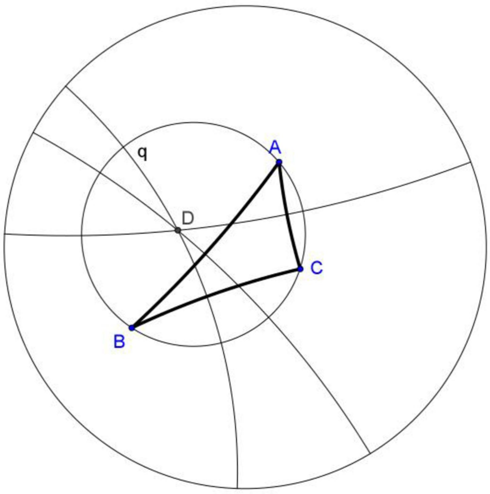

図 13　垂直二等分線が交わる場合

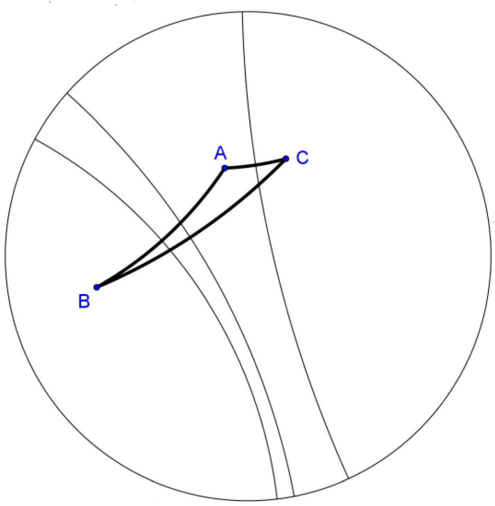

図 14　垂直二等分線が交わらない場合

④垂心（3 垂線の交点）

図 15・図 16 に示すように，三角形の 3 頂点から対辺におろした「垂線」が 1 点で交わる場合と交わらない場合がある. 交わる場合には，ユークリッド幾何学の「垂心」に相当するものが存在することになる.

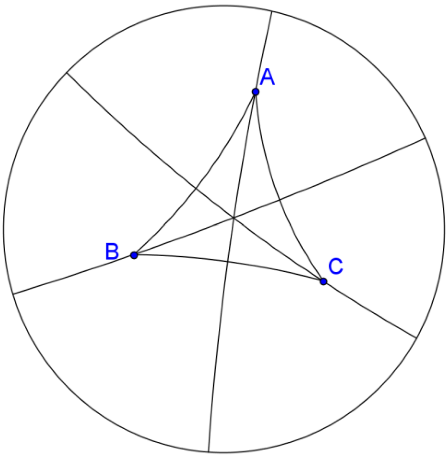

図 15　3 垂線が交わる場合

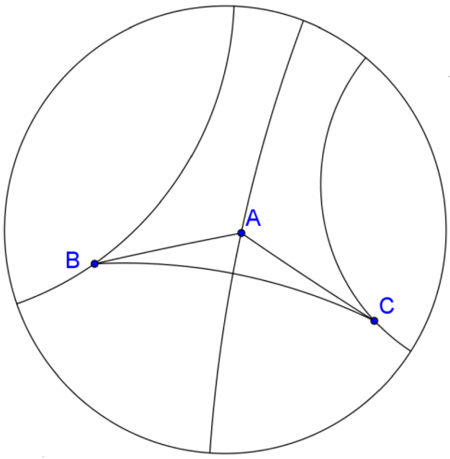

図 16　3 垂線が交わらない場合

⑤傍心（2 つの外角の二等分線の交点）

図 18・図 19 に示すように，三角形の 2 つの外角の二等分線と内角の二等分線が 1 点で交わる場合と交わらない場合がある. 交わる場合には，ユークリッド幾何学の「傍心」に相当するものが存在し，傍接円も描くことができる.

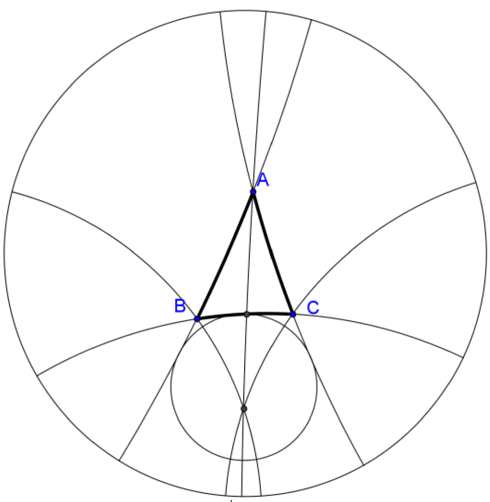

図 17　外角の二等分線が交わる場合

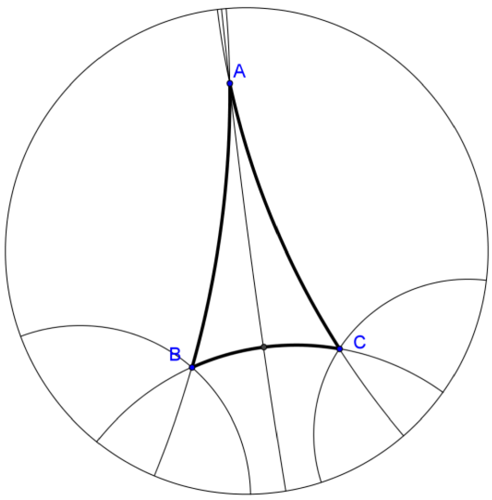

図 18　外角の二等分線が交わらない場合

6. まとめと今後の課題

6.1 マクロの実装について

本研究では，「ポアンカレの円盤モデル」上の図形を動的幾何学ソフトウェアで扱う方法を示し，マクロ機能を用いて実装を行った．マクロの実装は完了しているが，やや操作性が悪い部分があり，まだまだ改良の余地がある．

また，「ポアンカレの円盤モデル」以外のモデルについては，本稿執筆時点ではまだ実装が進んでおらず，開発のペースを上げる必要がある．他のモデルの実装が完了した段階で，その原理・手法を文書にまとめ，開発したマクロと共に，WEB 上で公開する予定である．原理を広く公開することで，GeoGebra 以外の動的幾何学ソフトウェアにおいても，同様のマクロを実装することができるようになる．

6.2 教材開発について

マクロの実装には非ユークリッド幾何学に対する理解が必要であるので，マクロの実装自体が，数学が得意な大学初年級の学生に適した教材であると再認識した．

前頁で示したように，ポアンカレ円盤上の幾何学では，ユークリッド幾何学と類似の性質が常に成り立つものと，部分的に成り立たないものがある．どのような場合に成り立たないのか，調べてその法則性を見つける課題を課すことができる．

生徒にとっては，ユークリッド平面とポアンカレの円盤モデルは，全く異なるものに感じられるであろうが，どちらにおいてもほぼ同じ性質が成り立つことは驚きであろう．このような探究活動を通して，数学に対する幅広い見方を養うことができ，ユークリッド幾何学の各定理の再確認に繋がる．

普通の中学生や高校生の場合には，マクロを活用して探究活動を行うことになる．先に示した三角形の５心だけでなく，中線連結定理・チェバの定理・メネラウスの定理など様々な幾何学定理が，「ポアンカレの円盤モデル」や非ユークリッド幾何学の他のモデルでも成り立つかどうか調べ，成り立つ場合の条件を考察することもできる．

参考文献

[1] J. リヒター・ゲバート U.H. コルテンカンプ,「シンデレラ ～幾何学のためのグラフィックス～」,シュプリンガー・フェアラーク東京，2003

[2] 中岡稔，「双曲幾何学入門—線形代数の応用」,サイエンス社，1993.

[3] 大西俊弘,「動的幾何学ソフトにおける非ユークリッド幾何学の取り扱い方について」,平成 25 年度第 5 回日本科学教育学会研究会論文,2013