

# 数値積分を取り入れた積分法の教材開発 —表計算ソフトを用いて—

東京理科大学・科学教育研究科 渡部 敬寛

Takahiro Watanabe

Graduate School of Mathematics and Science Education

Tokyo University of Science

東京理科大学・理学部・科学教育研究科 清水 克彦

Katsuhiko Shimizu

College of Science, Graduate School of Mathematics and Science

Education

Tokyo University of Science

## 1 はじめに

### 1.1 学校数学と数値計算

現在の高校数学では、代数分野であれ、幾何分野であれ、そして微積分の分野でも、記号による計算や証明が中心となっており、その操作を習得することが数学の学習であると捉えている高校生（大学生）は少なくないと思われる。微積分の分野についての高校生の感想を耳にすることがあるが、同様の考えをもつ生徒は特に多く、面白いことにそれを肯定的に捉える生徒、つまり、「ゆえに得意である」という生徒と、それを否定的に捉える生徒、つまり、「ゆえに意味がわからない」という生徒がいる。筆者らは、肯定ならびに否定のどちらの生徒の存在もあまり好ましくないように感じている。

そのような記号の操作に焦点化した数学の学習では、その式の表すところや、そこで起こっている数学的な現象が、生徒に意識化されることがほとんどないからである。広田良吾氏(1993)は岩波講座応用数学の月報 No.2 において、「夢の時代」と題したエッセイのなかで、「数式の意味」にはなんの関心もなく、試験の時まで数式を丸暗記し、試験中には素早く計算し、試験が終わればすべてを忘れ去ってしまう。これの繰り返しである。こういう勉強では何の役にも立たない質の悪いコンピュータみたいな人間をつくるだけだ。人間にはコンピュータにはない素晴らしい能力がある。それは「意味」や「概念」を理解できること、局所的・戦術的ではなく、大局的・戦略的に物事を判断できる能力である。」とこのような学習を批判している。

筆者らは、微積分の分野において「意味」や「概念」を理解するチャンネルとして、数値計算によって数値を見ることが重要な手段になると考えた。実際の傾きの変化の様子、極限の考えから実際の面積が求まっていくことを実際の数値で見ることによって、生徒が「意味」や「概念」を理解することができるのではないだろうか。そのような方向線上にあるプロジェクトとして、“Body & Soul”を見出し、その考えに沿った開発と実践

を試みた。また、森正武氏が岩波講座応用数学の「数値計算の基礎」(1993)のはじめに述べられているように、数値計算には「内在する数学的な構造を見抜いて現象の解明あるいは製品の設計に役立つ」という側面、つまり、筆者らが生徒に望む学習につながる側面と、「手法それ自体あるいはその解析における数学的興味」の側面、つまり、手法それ自体の興味を生徒に持たせるという側面があることも、筆者らが数値計算に着目した理由である。

さらにこのような数値計算を学校数学の場に取り入れる手段として、コンピュータソフトの活用が有効であることから、表計算ソフトを用いることとした。コンピュータのこのような活用は、広田氏が「数学の教育を何とかしなくてはいろいろなプランを夢見ている。」とされたものである。

## 1.2 研究背景

昭和26年度の学習指導要領では、面積や体積の概念を基に積分を導入しているのに対し、新学習指導要領解説では、「微分の逆の演算としての不定積分を導く」[2, p.35]と記述されている。このような導入では、積分で面積が求められることについて理解することが難しく、積分記号の意味と関連して説明できないと考える。

定積分の理解について、光永は「実践前、『なぜ定積分で面積計算ができるのか』の問いに完璧に答えられる生徒はいなかった。」[4, p.425]と指摘しており、区分求積法の概念を基本とした実践授業の研究報告をしている。また塚原は「定積分がなぜ面積を表すのかという点についての理解が困難であり、イメージが育たない」[5, p.16]と指摘している。

これらの指摘から、なぜ定積分で面積が求められるのかについて、理解できない生徒がいるという現状が明らかになった。そのような生徒は積分を単なる計算問題として扱ってしまうため、指導の改善が必要であると考えた。

## 1.3 研究目的・方法

本研究では「なぜ定積分で面積が求められるのか」について理解させることを目的とし、数値積分を取り入れた教材開発を行った。数値積分を取り入れることにより積分の考えを視覚的にみること、理解を深めることができると考える。表計算ソフトExcelを活用して教材開発を行った。Excelは学校に導入されているほとんどのコンピュータにインストールされているため、新たな機材を導入したり、特別なソフトをインストールする必要がないという利点がある。

研究目的の達成に向け、先行研究としてBody & Soul Projectに着目し、文献や教材の調査からその主張や内容について考察した。さらに、VBAでマクロを組み立てて教材を開発した。開発した教材を用いた実践授業を行い、それに関するアンケート調査を行った。アンケート結果から本教材の有効性や教育的効果、教材の扱い方や改善点について検討した。

## 2 先行研究—Body & Soul Project—

ソフトウェアを用いた積分の指導に関する先行研究として、Body & Soul Project に着目した。これは計算数学 (Body) と解析数学 (Soul) の現代的な統合に基づく数学教育改善計画である。Body & Soul Project の開発教材は MATLAB で実行され、アルゴリズムなどの視覚化によって、その理解を深めることができる。以下に Body & Soul Project の開発教材を例示する。

### 2.1 Integration lab

Integration lab は、積分演算の意味を視覚的に見ることが出来る。被積分関数に対して積分区間と分割幅を定め、原始関数を近似したグラフと真値のグラフを重ね合わせて比較することができる。この教材で分割幅を小さくしていけばより正確な面積が求められることや、左端区分求積法と右端区分求積法の近似値が一定の値に近づいていくことがわかる。さらに面積の累積値をプロットすることで、積分とは原点からの面積値を「限りなく分割して積み上げた」ものであると捉えることができる。さらに微分して得られた関数を積分すると元の関数が得られるという、微積分学の基本定理の概念を視覚的に捉えることができる。この教材により積分の演算の意味や、積分と面積の関係についての理解を深化させることができると考える。

### 2.2 Pendulum lab

Pendulum lab は振り子のアニメーションとグラフで単振り子の運動方程式をシミュレートできる。糸の長さ・おもりの質量・減衰力・振り子の運動が始まる位置といった条件を変化させることができ、それによる振り子の運動の変化を観察することができる。この教材は、計算数学と解析数学の両側面を持っており、ルンゲ・クッタ法などによる計算数学の考察と、解析解による解析数学の考察を行うことができる。

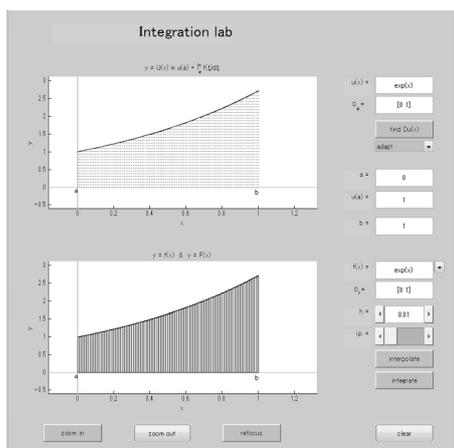


図 1: Integration lab

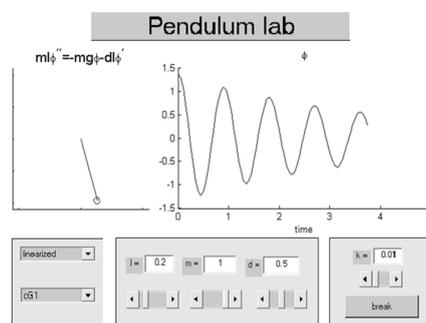


図 2: Pendulum lab

## 2.3 計算数学と解析数学の統合による効果

Body & Soul Project では、計算数学と解析数学を統合した数学教育について検討しており、計算数学と解析数学を1つの教材で結び付けている。これにより、「計算機が微積分学に科学と教育における、新たな意味と役割をもたらしている」[1, p.47] という Body & Soul Project の考えに基づき、コンピュータが数学に与えた影響を数学教育に反映できるという価値がある。

計算数学と解析数学の統合による効果として、計算数学を取り入れることにより、区間を分割して離散的・近似的に考える能力が養われると考える。さらに計算数学の考えを用いて、解析数学の考えを視覚的に表現できる。私たちが心の中にある考えを表情・態度・行動などを通して体で表現するように、解析数学 (Soul) にある概念を計算数学 (Body) を用いて具現化することができる。

## 3 数値積分を取り入れた教材開発

本研究は上記の検討を基に、現行の指導要領で扱われている解析的な積分と数値積分を統合した、教材開発を行った。積分を微分の逆演算として捉えると、なぜ面積が求められるのかがわかりにくい、数値積分を取り入れて視覚的にみることで、積分で面積が求められる理由がわかる。積分は極限の考えを用いるが、これを視覚的に提示し、直感的に理解することで、極限について深く学習していない数 II の段階でも指導が可能であると考える。

VBA でマクロを組み立て、「なぜ定積分で面積が求められるのか」についての理解を促すことを目的とした、Excel を用いた教材を開発した。本稿では、この教材を Excel 教材と呼ぶ。Excel 教材は積分区間と分割数を自由に定めることができる。これは生徒が手を動かして、主体的に演習に取り組ませることをねらいとしている。

### 3.1 Excel 教材の仕組み

マクロを実行すると被積分関数の確認メッセージが表示され、積分区間の始点・終点と分割数を入力する Input Box が表示される。円周率  $\pi$  や平方根、ネイピア数  $e$  を入力できるように工夫した。セルに色を付けることで、注目すべき値を強調した。誤差は緑色、近似値は赤色などというように、色を変えることによってその値が持つ意味を区別して考察できるようにした。被積分関数として、多項式関数や三角関数、指数関数や対数関数などを扱うことができる。さらに数値積分の公式として、左端区分求積法・中点公式・右端区分求積法、台形公式、シンプソンの  $\frac{1}{3}$  公式を扱うことができる。必要項目を入力すれば、以下のものが表示される。

- 区間幅
- 各分点ごとの  $x$  座標の値
- 各分点における関数の値
- 積分の近似値
- 誤差
- 被積分関数とその近似のグラフ

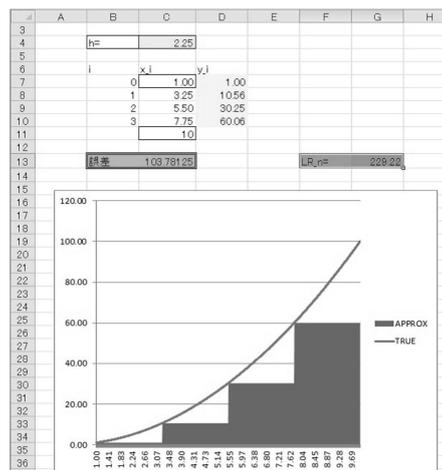


図 3: マクロ実行後の画面

## 3.2 Excel教材の数値積分的要素とその効果

### 3.2.1 数値計算の基本的な考え方の定着

積分区間を分割して、各分点における関数の値を基に近似値を求めることが、数値積分の基本的な考え方である。Excel教材はこの考え方に基づいて、近似計算を行う。

これにより区間を分割して分点を定め、離散的に考えることにより、近似計算を行うという数値計算の基本的な考え方が身に付く。これは差分法などといった数値解析をはじめとする、高等数学の円滑な接続を図ることができると思う。

### 3.2.2 近似公式とグラフ表現による視覚的理解

Excel教材は、左端区分求積法・中点公式・右端区分求積法、台形公式、シンプソンの $\frac{1}{3}$ 公式の計算を行うことができる。さらに補間したグラフと被積分関数のグラフを重ねて表示することで、近似値が真値にどのくらい近づいているかを表すことができる。

Excel教材は、近似公式の計算で求めた近似値や誤差などが、セルの背景色で区別して表示され、注目すべき値を強調することができる。色を変えることによってその値がもつ意味を区別することができる。各小区間での計算結果も表示され、小区間で導かれた値を数値積分の公式に基づいて、どのように計算しているかを考えることができる。さらに補間したグラフと被積分関数のグラフを重ねて表示することにより、積分区間や分割数を変えることで、値やグラフの変化を生徒に考察させることができる。これは積分演算の意味の視覚的理解につながると考える。

### 3.3 Excel教材の教育的効果

#### 3.3.1 区分求積法の直感的理解

分割数を変化させることで、グラフや誤差の変化を比較することにより、「分割数を増やせばより正確な値を求めることができる」ということを、生徒に気づかせることができる。そこから限りなく分割数を増やせば、直線や曲線で囲まれた面積を正確に求めることができると推論できる。このようにExcel教材を用いれば、直感的に区分求積法を理解させることができる。これは特に極限について深く学習していない段階にある、数IIにおける積分の指導に有効であると考えられる。

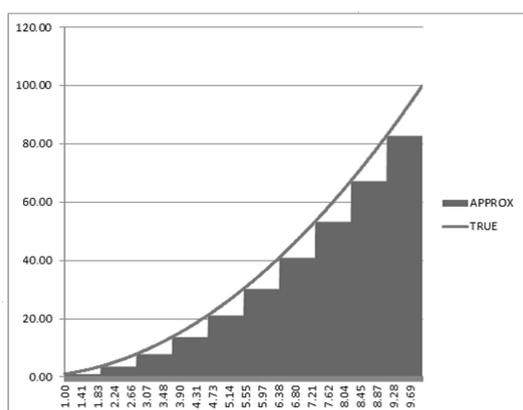


図 4: 分割数 10

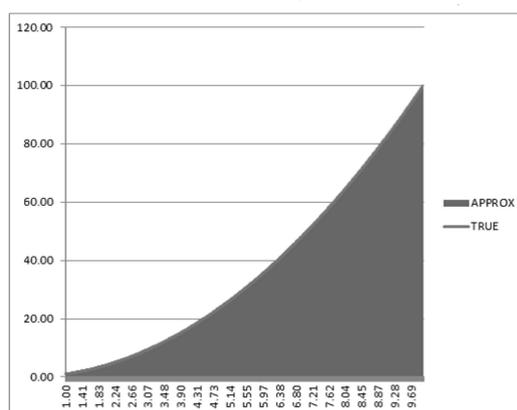


図 5: 分割数 1000

#### 3.3.2 主体的に取り組める演習の展開

Excel教材は、積分区間や分割数を生徒が自由に決めることができる。生徒が積分区間や分割数を入力して手を動かしながら取り組むため、教師の一方的な授業展開を避け、生徒が主体的に取り組める演習を展開することができる。

#### 3.3.3 タブレット端末の活用によるグループ学習と言語活動の充実

タブレット端末にExcelがインストールされていれば、同等の操作が行える。タブレット端末を1人1台ずつ配布すれば、コンピューター室に移動することなく、普通教室でExcel教材を活用した授業が行える。5~6人に1台ずつ配布し、グループごとに意見をまとめて発表させれば、グループ学習と言語活動の充実につながる。

## 4 Excel教材を活用した実践授業

### 4.1 授業概要

実践授業の概要は表1のとおりである。1人1台ずつコンピュータを使用した。また第1回の対象生徒は微積分で扱う関数を、三角関数・指数関数・対数関数などにまで拡張しており、区分求積法は既習である。第2回の対象生徒は積分を微分の逆演算として学習しており、区分求積法は未習である。Excel教材を通して、なぜ定積分で面積が求められるのかを、生徒自身が手を動かして主体的に取り組む演習を通して、視覚的・直感的に理解することを目標とした。

表 1: 実践授業概要

	第1回	第2回
実施日	平成24年 12月4日	平成25年 3月13日
実施場所	コンピュータールーム	
対象	高等学校3年生	高等学校2年生
人数	13名	36名
授業者	渡部 敬寛	
授業名	数学III	数学II
単元名	微積分	

### 4.2 指導経過

指導目標の実現に向け、表2の指導経過を組んだ。

表 2: 指導経過

i. 授業の目標と流れの確認
授業の目標と流れを提示し、これから扱う内容を把握させることで、全体の見通しを立たせた。
ii. およその面積を求める手法として、区分求積法に焦点を当てる
$\int_a^b x dx$ などといったように、直線で囲まれた図形は、 $\frac{1}{2}(a+b)(b-a)$ というように、台形や三角形と捉えることにより、面積を計算することができる。 しかし $\int_a^b x^2 dx$ など、曲線で囲まれた図形には、この考えを適用することができない。そこでおよその面積を求めることを考え、区分求積法につなげた。長方形を当てはめておよその面積を求めることに焦点をあて、本題に入った。
iii. 分割数と誤差の考察
長方形を当てはめておよその面積を求める際に、曲線と長方形の間にできる不足分や過剰分を小さくして、正確な値に近づくにはどうすればよいか考えさせた。当てはめる長方形の数は生徒が自由に決め、ワークシートに誤差と近似値を記入させた。そこから気づいたことをまとめさせ、生徒を指名し発表させた。Excel教材を活用した演習を通して、分割数を多くすればするほど正確な面積の値に近づくことを、生徒自身が自ら気づくよう促した。

## iv. 積分記号の説明

積分記号の意味を通して定積分を和の極限として捉えさせた。例として  $\int_1^{10} x^2 dx$  を取り上げた。  $dx$  とは differentia (差・差分) の頭文字 d をとったもので微小区間幅を表している。つまり、長方形1つ分の横幅を表している。長方形の縦の長さは関数の値であるのでこの場合は  $x^2$  となる。これより、  $x^2 dx$  は長方形1つ分の面積を表していることになる。また、  $\int$  は summatio (和) の頭文字 s を縦長に伸ばしたものである。よって、  $\int_1^{10} x^2 dx$  の式の意味は、「長方形1つ分の面積を積分区間1から10まで足し合わせる」という意味である。このように積分記号の意味を説明することにより、積分と面積の関係について理解させた。

### 4.3 アンケート項目と結果

#### 4.3.1 設問項目

多肢選択形式の項目は1(そう思わない)から4(そう思う)の4段階からなる。定積分への関心・態度や知識・理解などを中心に、以下のような項目を設けた。

- A. なぜ定積分で面積が求められるのかわかる。
- B.  $\int$  や  $dx$  といった、積分記号の意味がわかる。
- C. 当てはめる長方形の数を増やせば、より正確な面積値が求められることが理解できる。(事後のみ)

特に設問 A は、実践授業の目標であり Excel 教材の目的でもある。Excel 教材の評価の中心となる設問である。

#### 4.3.2 クロス集計の結果

アンケートのデータに対しては、各設問ごとにクロス集計を行った。表3は第2回実践授業の設問 A のクロス集計表である。これより肯定的な回答である3,4を選ぶ生徒は事前では25%にとどまっていたが、事後ではおよそ90%にまで増加したことがわかる。第1回・第2回実践授業共に、上記の項目をはじめとしたほとんどの設問項目に対して肯定的な回答をする生徒が増加し、変化がみられた。

#### 4.3.3 検定結果

授業前後に有意差があるか調べるため、統計処理も行った。帰無仮説  $H_0$  を「Excel教材を用いた授業の前後で、有意差はない」とし、対立仮説  $H_1$  を「Excel教材を用いた授業の前後で、有意差はある」として、第1回実践授業のデータに対してはウィルコク

スンの符号付順位検定を行い、第2回実践授業のデータに対しては対応のある $t$ 検定を行った。表4は第1回実践授業の設問Aの検定結果である。この結果から有意水準1%で有意差があることがわかった。

第1回・第2回実践授業共に、設問A,Bに関しては有意水準1%で有意差がみられた。設問Cについても2回の実践授業共に、肯定的な回答である3,4を選んだ生徒は90%以上であった。その他のほとんどの項目についても有意差がある結果となり、変化がみられた。

表 3: クロス集計表

		事前	事後	合計
1	度数	11	1	12
	割合	30.6%	2.8%	16.7%
2	度数	16	3	19
	割合	44.4%	8.3%	26.4%
3	度数	7	18	25
	割合	19.4%	50.0%	34.7%
4	度数	2	14	16
	割合	5.6%	38.9%	22.2%

表 4: ウィルコクソンの符号付順位検定の結果

	N	平均ランク	順位和
事後 - 事前			
負の順位	0	.00	.00
正の順位	12	6.50	78.00
同順位	1		
合計	13		

	事後 - 事前
Z	-3.115
漸近有意確率 (両側)	.002

#### 4.4 区分求積法が既習の生徒と未習の生徒の違い

対象生徒を変えて、同等の内容で実践授業を2回行った。第1回実践授業の対象生徒は高等学校3年生であり、区分求積法は既習であった。第2回実践授業の対象生徒は高等学校2年生であり、区分求積法は未習であった。既習生徒と未習生徒のExcel教材に関する効果の違いについて焦点を当てる。

##### 4.4.1 多肢選択形式の設問

多肢選択形式の結果の相違について着目する。両者の結果は表5のとおりである。この結果から、既習生徒・未習生徒に関わらずExcel教材は積分の指導に期待できることがわかった。

表 5: 既習生徒と未習生徒のアンケート結果

設問	既習生徒	未習生徒
A	有意差あり (1%)	有意差あり (1%)
B	有意差あり (1%)	有意差あり (1%)
C	92% が 4 を選択	94.3% が 3, 4 を選択

#### 4.4.2 既習生徒と未習生徒の比較検討

アンケートの中に、気づいたことや疑問に思ったことなどを自由に記述させる項目を設けた。既習生徒・未習生徒共に、積分の演算の意味や積分記号についての肯定的な記述が多かった。既習生徒においては誤差に関する質問が多く、厳密な証明を求める生徒もいた。さらに積分がどうやって生活に活かされているかという疑問も出た。未習生徒は  $\int$  の呼称に興味を持つ生徒がいた。「文系なので数学にあまり関心はなかったが、説明がわかりやすくよくわかった。」という声があった。

以上より区分求積法を既習した生徒と未習である生徒に関わらず、Excel 教材は積分の指導に期待できることが明らかになった。誤差に関しては既習生徒・未習生徒に関わらず疑問を持つ生徒が多かったため、混乱を招かないように慎重に扱う必要があると考える。

### 4.5 アンケート結果の考察

#### 4.5.1 授業目標と Excel 教材の有効性

実践授業の目標であり Excel 教材の目的でもある、なぜ定積分で面積が計算できるかを理解することは、クロス集計や検定結果などから達成できたと考えられる。「授業ではグラフを描くといっても限られているので、パソコンでこんなにあつという間にグラフが出来ちゃうと、すごいと思った。」という生徒の声があるように、短時間で多くのグラフを表示できるという点も、Excel 教材の長所であるといえる。

今回の実践授業では、Excel 教材を用いて生徒が主体的に授業に取り組み、なぜ定積分で面積が求められるのかを理解したことにより、積分に対する理解を深化させることができたと考える。アンケート結果とその考察から総合的に判断して、Excel 教材は積分の指導に期待できると考える。

#### 4.5.2 相関分析

表 6 は第 1 回実践授業で行ったアンケートの相関行列である。設問 A の事前と設問 B の事前や、設問 A の事後と設問 B の事後には強い相関はみられなかったが、設問 A の事後と設問 C の事後や、設問 B の事後と設問 C の事後には比較的強い相関がみられた。第 2 回実践授業も同様の結果が得られた。このことから区分求積法において、分割数を増やせばより正確な面積が求められるということを理解することは、定積分で面積が計算できることや、積分記号の意味について理解することと強い関連があることがわかった。これは、分割数を増やせばより正確な面積が求められるということを理解することは区分求積法の直感的理解につながり、それが定積分で面積が求められる理由や、積分記号の意味についての理解につながるためであると考えられる。

表 6: 第 1 回実践授業の相関行列

Spearman の 順位相関係数	設問 A 事前	設問 A 事後	設問 B 事前	設問 B 事後	設問 C 事後
設問 A 事前	1.000	0.337	0.421	0.062	0.425
設問 A 事後	0.337	1.000	0.154	0.391	0.736
設問 B 事前	0.421	0.154	1.000	0.221	0.371
設問 B 事後	0.062	0.391	0.221	1.000	0.628
設問 C 事後	0.425	0.736	0.371	0.628	1.000

## 4.6 Excel 教材とその扱いに関する課題

### 4.6.1 左端区分求積法と右端区分求積法の扱い

限られた授業時間で左端区分求積法と右端区分求積法の両方を考察させることは難しいが、区分求積法を理解するには、左端区分求積法と右端区分求積法の両者を 1 人で考察させた方がよいという声があった。シートの切り替えなどで、左端区分求積法と右端区分求積法が、同一のファイルで取り組めるような工夫が必要である。

### 4.6.2 誤差の扱い

誤差について疑問を持つ生徒が多く、分割数を増やしていけば誤差は単調に減少するのか、証明を求める生徒もいた。数値積分を取り入れた教材を扱う際は、計算機は無限の操作が行えないことに留意し、生徒に混乱を招かないようにする必要がある。

分割数を増やしていけばそれに伴って誤差が小さくなり、左端区分求積法と右端区分求積法の近似値が一定の値に近づくことから、無限に分割数を増やしていけば厳密な値を求めることができるということを、直感的に考えさせることが重要である。

### 4.6.3 分割数の入力

実践授業の演習で、分割数に対して「0」やアルファベット「a」などを入力していた生徒がいた。このような誤った入力に対しては、例外処理を施すかラジオボタンなどを利用して対応する。また誤った入力に対しては敢えて例外処理を行わず、なぜエラーになってしまったのかや、どのようにすればエラーを防ぐことができるかなどを生徒に考えさせる演習の展開も考えられる。

さらに、分割数に最初から大きな値を入力した生徒がいた。しかし Excel 教材を活用した演習は、分割数を増やせば徐々に正確な値が求められる様子を観察させることを狙いとしているため、最初は 10 などといった小さな値から入力するよう促す必要があった。



図 6: 分割数のラジオボタン

## 5 まとめと今後の課題

Body & Soul Project の計算数学と解析数学の統合により、数学教育の改善を図るという視点に立ち、現行の指導要領で扱われている解析的な積分と数値積分を統合した教材を開発することができた。実践授業を通して、Excel 教材は「なぜ定積分で面積が求められるのか」について理解させる指導に、効果が期待できることが明らかになった。さらに、Excel 教材やその扱い方に関する改善点・課題が明らかになった。それらを基に、Excel 教材を改善してより良い教材にしていくことが今後の課題である。

さらに、Excel 教材をどの学習段階で用いるかについても検討する必要がある。第 1 回実践授業は 12 月に、第 2 回実践授業は 3 月に行ったため、それぞれの学年で扱う微分・積分の内容をすべて学習した後の実施であった。このことから本稿で報告した実践授業の結果より、微分・積分をすべて学習した後であれば、Excel 教材は効果が期待できることがわかった。今後は積分の学習前や途中でも、効果があるか調査していくことが課題である。特に積分の導入に関しては、本研究で開発した教材は区分求積法を基にしており、学習指導要領は微分の逆演算を基にしている。生徒が後続する内容に混乱がないよう、慎重に検討していく必要がある。

情報技術の著しい発展は教育分野に影響を与え、ICT 教育の推進などという形で反映されている。今後は数学教育の分野にも、計算数学と解析数学の統合という形で反映されることが期待される。本研究は、現行の指導要領で扱われている解析的な積分と数値積分の統合として、その役に立つと思われる。

## 参考文献

- [1] J:Hoffman 他, 「Dreams of Calculus: Perspectives on Mathematics Education」, Springer, 2004.
- [2] 文部科学省, 「高等学校学習指導要領解説数学編理数編」, 実教出版, 2009.
- [3] 池田文男・半田真, 「面積概念の一貫的なカリキュラム: 区分求積の指導案」, 第 38 回日本数学教育論文発表会論文集, pp.433-438, 2005.
- [4] 光永文彦, 「積分法と求積法を接続する指導の一考—「面積を測量する」区分求積法を用いて—」, 第 40 回日本数学教育論文発表会論文集, pp.421-426, 2007.
- [5] 塚原久美子, 「微分積分法の指導における数学史の活用とその有効性について」, 日本数学教育学会誌数学教育 81 巻 5 号, pp.13-24, 1999.
- [6] 国立教育政策研究所, 「中学校高等学校学習指導要領数学科編 (試案) 改訂版」, <http://www.nier.go.jp/guideline/s26jhm/chap5.htm>, (2013 年 9 月 11 日確認).
- [7] Finite Element Center, 「Body & Soul:Applied Mathematics Education Reform Project」, <http://www.bodysoulmath.org/>, (2013 年 9 月 15 日確認).