数理解析研究所講究録
第 1909 巻 2014 年 233-241

大学の数学教育におけるMapleの利用例

関西学院大学・理工学部　示野　信一
Nobukazu Shimeno
School of Science and Technology
Kwansei Gakuin University

概 要

関西学院大学理工学部数理科学科では，2 年生対象の「数式処理演習 I, II」という科目において，Maple を用いた演習を行っている。演習で扱った題材の中から平面の線形変換の図示について紹介する[1]。

1　数式処理演習の概要

関西学院大学理工学部数理科学科は，2009 年度設置された，数理科学（≒ 数学と応用数学）を専門とする学科であり，1 学年の定員は 75 名である。

関西学院大学は，Maple のサイトライセンスと学生ライセンスの契約をしている。学内に複数ある演習室のパソコンには，Maple がインストールされており，授業時間や時間外に Maple を利用することができる。また，希望する学生は個人のパソコンに Maple をインストールして使うことができる。

数式処理演習は，数理科学科 2 年生対象の科目で，教員 1 名（筆者），契約助手 2 名，TA 2 名で指導している。2013 年度春学期の数式処理演習 I は 1 つの実習室の定員を超えたため 2 部屋に分けて同時進行で演習を行った。

2　平面の線形変換の図示

2.1　目的

数式処理演習では，Maple を用いて通常の授業とは違った角度から高校数学や大学数学に取り組むことを目的としている。Maple のような数学ソフトウエアは，計算能力だけでなく数学の可視化にすぐれており，その方面の題材を演習に多く取り入れている。

今年度の演習では線形代数からの話題の 1 つとして平面の線形変換の図示を取り扱った。今年度の受講者は高校で行列・一次変換を学んだ世代に属し，大学でも線形代数を学んでいるが，平面の線形変換の幾何学的なイメージが定着しているか心もとないため，Maple を用いて平面の線形変換を演習することにしたのである。

[1]RIMS 研究集会「数学ソフトウェアとその効果的教育利用に関する研究」，2013 年 8 月.

平面の線形変換の以下の側面を図示により確認させたい：

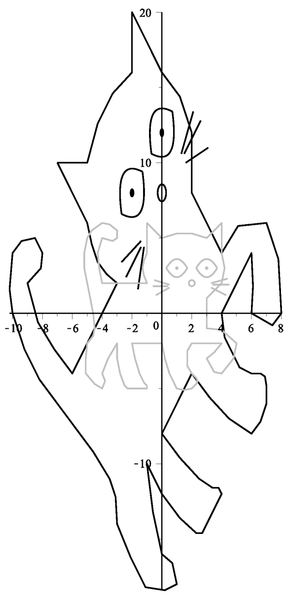
- 相似拡大，原点を通る直線に関する対称移動，原点中心の回転
- 線形変換による図形の変形と線形性の関連
- 図形の向き・面積と行列式の関連
- 固有値・固有ベクトルと不動直線

2.2 先行の実践例

平面の線形変換の幾何学的な理解については，その重要性から，数多くの教育的な実践例があるだろうが，ここでは目にとまったものを紹介する。

小沢猫

1970 年に告示された高校数学の学習指導要領で平面の一次変換（線形変換）が登場した。（そして 2009 年の改訂により行列・一次変換は高校数学から姿を消した。）小沢健一氏は，高校数学に一次変換が導入された 1970 年代に，グラフ用紙に描いた図を一次変換によりうつした図形を描くことにより一次変換を理解させる課題を考案した。猫の図案を用いたことから,「小沢猫」として知られている（文献 [1, 2]）。右の図は，右方向を向いたもとの猫とそれを行列 $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ による線形変換でうつした猫を同時に描いたものである。（小沢猫は 26 個の点を結んで絵が描ける。ただし，目やヒゲは別で，丸みを帯びさせるため若干の点を追加した。）小沢猫とは若干デザインが違うが，黒田 [3] も線形変換により猫をうつすことにより，線形変換の性質を考察させる内容である。



コンピューターの利用

パーソナルコンピューターの普及に伴い，平面の線形変換をパソコンを用いて図示する試みが多数なされてきたものと思う。BASIC などのプログラミング言語や可視化機能を持つ数学ソフトウエアを用いることができる。ここでは，小林道正氏 [5] の Mathematica によるもの，本研究集会における小林一路氏の Cabri によるもの [4] を挙げておく。

手作業による実践 ([1], [2], [3]) により §2.1 の終わりに記した平面の線形変換の性質の探究を行えるが，2 次行列を色々変えて線形変換の像を描いてみるには，手作業よりもコンピューターを用いる方が簡便であろう。（手作業をした方が，実感を得やすい面もあるかも知れないが。）小林一路氏 [4] の Cabri の使用のように，対話的な操作により線形変換を変えて像の変形を見ることも効果的だろう（§2.4 で再度触れる）。

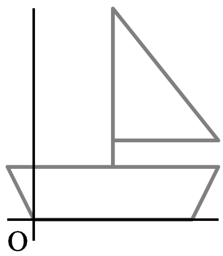
2.3 Maple による実践例

演習の実際

2013 年度の春学期の数式処理演習 I の中で Maple を用いた平面の線形変換の図示の実習を行った。Student[LinearAlgebra] パッケージの ApplyLinearTransformPlot を使うこともできるが，色の指定ができないなどの理由で plots パッケージと plottools パッケージを用いることにした。

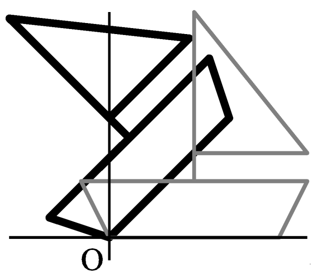
まずもとになる図形（船）を 9 点を結んで作る。

```
with(plots);
setoptions(scaling = constrained);
P := [[3,2],[-1,2],[0,0],[6,0],[7,2],[3,2],[3,8],[7,3],[3,3],[3,2]];
plot(P);
```



plottools パッケージの関数 scale（拡大・縮小），rotate（回転），transform（変換）を用いる。scale(P, a, b) とすれば，P に対して x を a 倍，y を b 倍した図形が得られる。rotate(P, θ) とすれば，P を原点中心に角 θ 回転した図形が得られる。行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ で表される線形変換 f は，f := transform((x,y)->[a*x+b*y, c*x+d*y]); により定義され，P の f による像は f(P) として得られる。たとえば，次のコマンドを実行すれば，原点を中心として $\pi/4$ 回転した船ともとの船が違う色で描かれる。（rotate を使う代わりに回転行列による線形変換を transform で与えることもできる。）

```
with(plottools):
ship1 := plot(P, color = "Red"):
ship2 := plot(P, color = "Blue"):
ship3 := rotate(ship2, Pi/4):
display({ship1, ship3});
```



scale，rotate，transform の使い方を示す例を資料として与えて実行させた後，さらに設問として次の 7 個の例題を実行させ，線形変換を表す行列，その行列式，帆の面積，変換の特徴について考えるよう指示した。（受講者は線形代数を既習である。）

(1) x を 1/2 倍，y はそのまま (scale)
(2) x はそのまま，y は -1 倍 (scale)
(3) 原点中心 90° 回転（rotate）
(4) 原点中心に 90° 回転してから，x, y を共に 2 倍（(3) の図に scale を使う）
(5) (x, y) を $(x+2y, y)$ に写す
(6) (x, y) を $(x+y, x+y)$ に写す
(7) (x, y) を $(x+y, 2x)$ に写す

実行結果は以下のとおり。

(1)

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det A = 1/2$

(2)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\det A = -1$

(3)

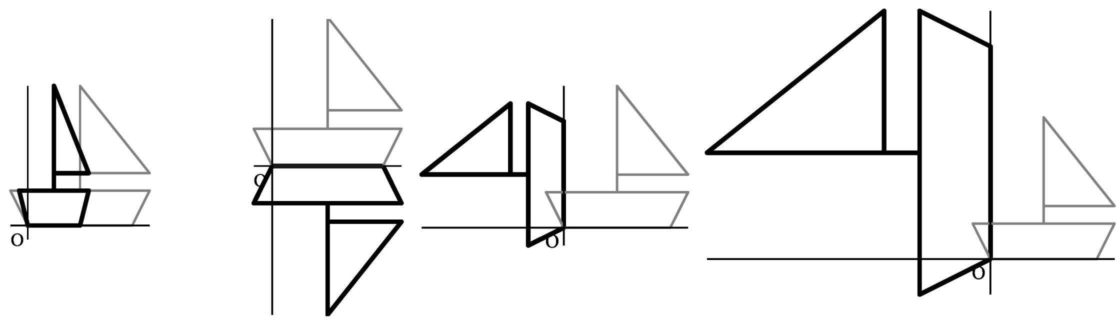
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det A = 1$

(4)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

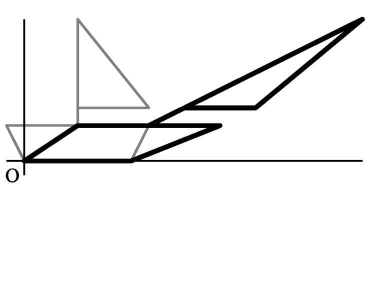
$\det A = 4$



(5) $(x, y) \mapsto (x+2y, y)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

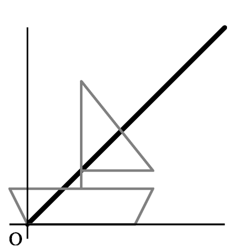
$\det A = 1$



(6) $(x, y) \mapsto (x+y, x+y)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

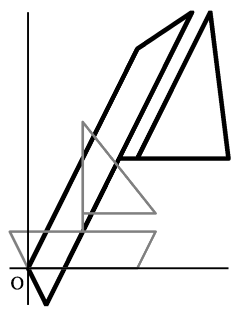
$\det A = 0$



(7) $(x, y) \mapsto (x+y, 2x)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det A = -2$



ある程度誘導しながら考察させることにより，以下のようなことを観察，あるいは線形代数の知識と合せて認識することを狙いとしている。

1. 行列式の値がゼロでないとき（つまり (6) を除いて），平面全体は平面全体に写り，直線は直線に，線分は線分に写り，線分の内分比は変わらず，船が変形した形になる。（たとえば，マストはいずれの図でも船の中点に立っている。）

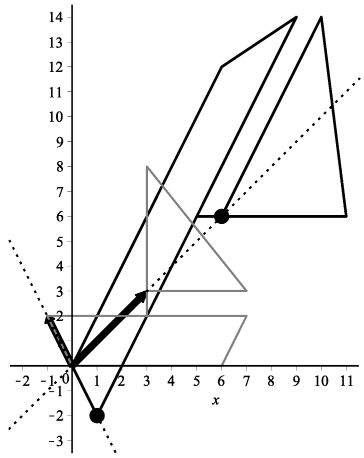
2. 線形変換は，A の行列式が正のとき向きを保ち，行列式が負のとき向きを逆にする。（行列式が正の (1), (3), (4), (5) では元の図と同じくマストの右側に帆がある。

3. $A \neq O$ かつ $\det A = 0$ のときは，平面全体は原点を通る直線に写る。(6) では，船はつぶれて線分になっている。

4. 線形変換により，図形の面積は元の図形の面積の $|\det A|$ 倍される。

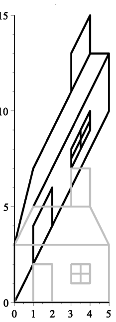
5. (7) について，原点を始点とし，写す前の船を形作る点を終点とするベクトルのうち，$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ が行列 A の固有ベクトルになっている。

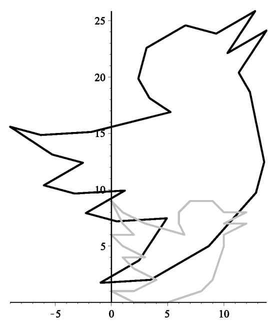
   これについては，船を形作る点とそれを線形変換でうつした点を結ぶ直線が原点を通るものを読み取らせた。少しわかりにくいが，右の図のように2本の固有ベクトル（固有値 -1 と 2 に対応）が図から読み取れる。

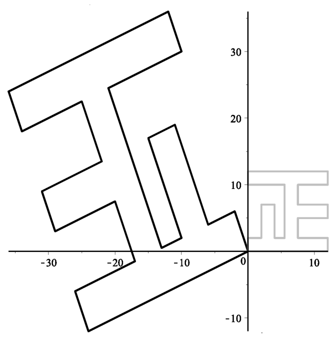


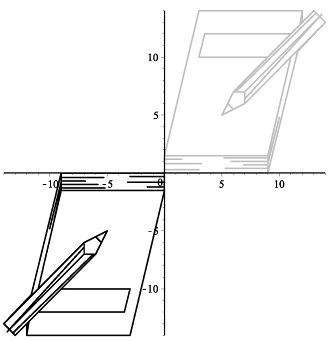
受講者による実例

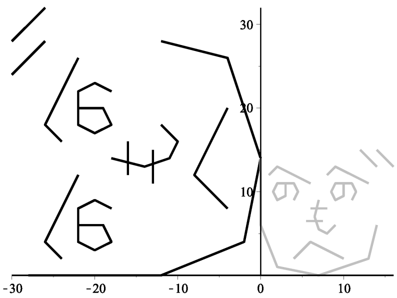
数回の演習のまとめのレポートの中で，自分で図を作成して，線形変換でうつす例を Maple で実行して数学的に考察する問題を出題した。演習で扱った船の他に小沢猫を例として見せて，好きな図形を作るよう指示した。以下に受講者が作った例を挙げる。

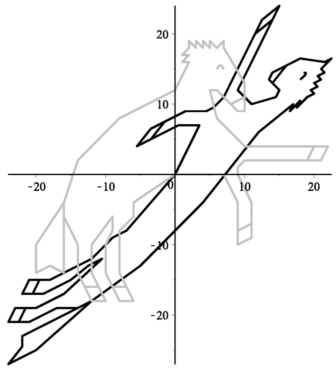










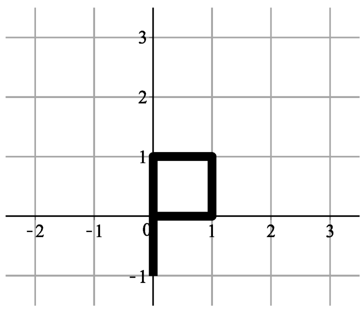


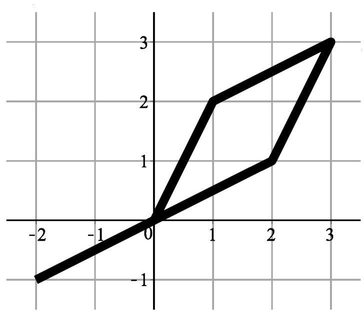
凝った図を作るのに時間をかけることが数学の理解につながる訳ではないが，受講者たちは概ね楽しんで取り組んでいたようだ。

定期試験

演習科目だが，講義資料持ち込み可で定期試験を行っている。定期試験の中で平面の線形変換に関する以下の問題を出題した。

下の右図は，ある 2 次行列 A による平面の線形変換により左図の折れ線（旗の形）を写したものである。（たとえば，左の図の棒の下端 $(0, -1)$ は右の図では $(-2, -1)$ に写っている。）以下の設問に答えよ。





(1) 変換の前後（左右の図）で旗の向きはどうなっているか。また，それから A について何がわかるか。

(2) 変換の前後（左と右の図）の旗（四角形の部分）の面積をそれぞれ求めよ。また，それから A について何がわかるか。

(3) A の固有ベクトルの 1 つを図から読み取って書け。

(4) 行列 A を図から読み取って書け。

4 つの設問いずれも 50% の正答率という試験結果だった。演習で問うた同様の問題の解説を与えた資料を持ち込んで試験を受けているにもかかわらず正答率が低い。

原因の考察を試みる。

まず試験の場で資料を参照して考えようという意欲が低いのではないかと思う。というのは，定期試験の成績評価に占める割合は30%，試験問題の大部分はMapleの基本操作を問うもので，上の線形変換の問題が成績評価に占める割合は非常に低いからである。

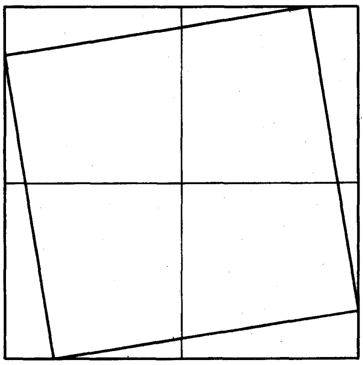
また線形代数をこのような設問を考えられる形では理解していない受講者が多数おり，Mapleの演習は線形変換の理解を深める機会として不十分だったようだ。(若干名ながら複数の受講者は(4)に3次行列を答えていた。)

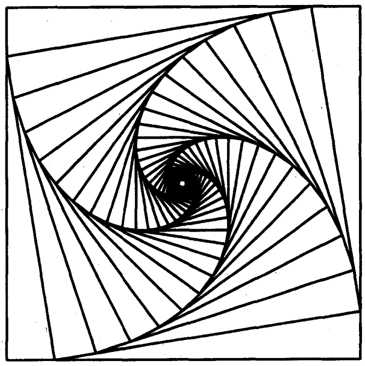
数式処理演習の進め方そのものに欠点がある。毎回の演習において受講者はMapleの実行をやりっぱなしになっており，解説を読んだり関連する数学を復習する機会になっていないという傾向は，線形変換以外のテーマの場合にも見られた。定期試験には，資料を持ち込んでよいので受講者が試験前に資料を読むなどの復習はあまり行っていないと思われる。

変換の繰り返し

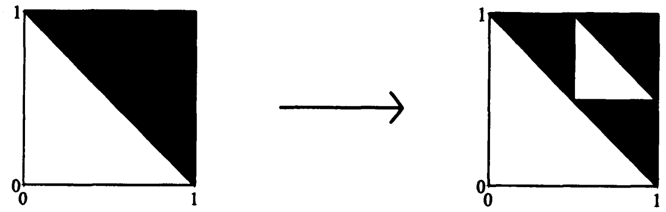
平面の線形変換やより一般にアファイン変換の合成を繰り返すことにより様々な興味深い図形を描くことができる。そのいくつかは，数式処理演習の中で扱っている。

レポート課題のおまけ（余力がある受講者向け）として，中心の周りの回転と相似縮小の合成により正方形を自身に内接する正方形にうつす（下の左図）変換を求め，その変換を繰り返してできる正方形の列を図示する問題を出題した。(答えは右図のようになる。)

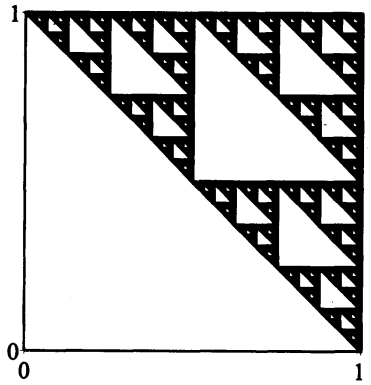




また，2013年度平面の線形変換を扱った数式処理演習Iに続く数式処理演習IIの中で，アファイン変換の合成により得られるフラクタル図形を描く演習を行った。たとえば，下の左右の図を右の図にうつす変換を3つのアファイン変換（相似縮小と平行移動の合成）として作って，それを合成することにより，シェルピンスキーのギャスケットを描くことができる。



次の左の図が写像を5回合成して最初の三角形をうつした図，右がプログラムである。




```
with(plots):  with(plottools):
setoptions(scaling=constrained);
t0 := polygon([[0,1],[1,1],[1,0]]):
s := x -> scale(x, 0.5, 0.5):
f := x ->(translate(s(x),0.5,0),
          translate(s(x),0,0.5),
          translate(s(x),0.5,0.5)):
g := y -> map(f, y):
display((g@@5)([t0]));
```

2.4　対話的な操作による像の変形

数式処理演習ではMapleを用いているが，線形変換を与える行列の成分を変えて線形変換による図形の変形の様子を見るには，スライダーの操作により成分を変えるとそれに連動して図形が変形する方がわかりやすい。MapleやMathematicaもそのような機能を持っている。講演では，無料で使える動的幾何学ソフトウエア Geogebra を使って実演して見せた（線形変換するもとの図は北斎の浮世絵を使った）。プロジェクターを用いて講義の中で扱うには，特にこちらの方法がすぐれているだろう。

まとめ

学習指導要領の改訂により高校で行列を扱わなくなったので，大学で平面の線形変換の幾何学的側面を扱う意義は今後益々高まるものと思う。

線形変換の話題に限らず，Mapleを用いた演習と通常の大学の講義との連携，演習の進め方の検討，教材開発などが今後の課題である。

参考文献

[1] 何森仁，近藤年示，小沢健一，時永 晃，『生き生き数学—すぐに役立つ高校の授業集』，三省堂，1987.

[2] 小沢健一，『関数をイチから理解する』，ペレ出版，2010.

[3] 黒田俊郎,『行列のえ・ほ・ん』, 三省堂, 1986.

[4] 小林一路,『2 次元の一次変換における動的ソフトの利用』, RIMS 研究集会「数学ソフトウェアとその効果的教育利用に関する研究」, 2013 年 8 月.

[5] 小林道正,『Mathematica による線形代数』, 朝倉書店, 1996.