数理解析研究所講究録
第1910巻 2014年 102-114

Second order asymptotic behaviour of location equivariant estimators for a family of truncated distributions

筑波大・数理物質　大谷内奈穂 (Nao Ohyauchi)
(Faculty of Pure and Applied Sciences, University of Tsukuba)
筑波大　赤平昌文 (Masafumi Akahira)
(University of Tsukuba)

1. はじめに

分布の台が母数に依存するような非正則分布族の典型として切断分布族が考えられるが, 台が区間となる場合に, その両端点での密度の値が同じときには, 範囲の中央 (mid-range) を基点として推定量の2次の漸近有効性が論じられた ([A91], [A96], [AO02]). しかし元々は, その両端点の密度の値が異なった場合を含めて, 一致性の収束のオーダーについて論じられ ([A75], [A95]), 統計量の2次の情報量損失も求められている ([AKO12]). また, その典型的な場合として, Akahira[A77] は切断指数分布の位置母数推定問題を取り上げて, 最尤推定量よりも荷重推定量が漸近分散を小さくするという意味で良くなるような荷重の条件を求め, これが一般の両側切断分布族へ拡張可能であることを示唆した. その後, 30年程経ってから切断指数分布を含む一般の両側切断分布族の位置母数推定問題において, 最良位置共変推定量 (Pitman 推定量) の漸近展開と漸近分散が求められ, このような場合には範囲の中央が推定量の漸近的な基点とはならないことが分かっている ([AOT07]). また, 漸近集中確率の観点から Pitman 推定量と荷重推定量の比較も行われた ([OA13]).

本稿では, 両側切断分布族における事実 ([AOT07]) と [A77] で論じられたような切断指数分布の場合との関係を通して Pitman 推定量の漸近展開の構造を明らかにするとともに, 位置共変推定の観点から Pitman 推定量, 荷重推定量の漸近分散の比較を行う. また片側切断分布族における Pitman 推定量の漸近展開の構造を明らかにするとともに, それを用いて偏り補正した最尤推定量の Pitman 推定量に対する2次の漸近損失を求め, その例も挙げる.

2. 両側切断分布族における位置共変推定

まず, $X_1, \cdots, X_n$ をたがいに独立に, いずれも位置母数 $\theta(\in \mathbf{R}^1)$ をもつ密度 $f_0(x-\theta)$ をもつ分布に従う実確率変数とするとき, $\boldsymbol{X} := (X_1, \cdots, X_n)$ に基づく θ の推定量 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(\boldsymbol{X}) = \hat{\theta}(X_1, \cdots, X_n)$ について, 任意の $c \in \mathbf{R}^1$ に対して

$$\hat{\theta}(X_1+c, \cdots, X_n+c) = \hat{\theta}(X_1, \cdots, X_n) + c$$

が成り立つとき, $\hat{\theta}$ を位置共変 (location equivariant) 推定量という. また, 位置共変推定量全体のクラスの中で, 平均2乗誤差を最小にする位置共変推定量を最良位置共変推定量といい, Pitman([P39]) は最良位置共変推定量は

$$\hat{\theta}_{PT} := \int_{-\infty}^{\infty} \theta \prod_{i=1}^{n} f_0(x_i-\theta)d\theta \Big/ \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} f_0(x_i-\theta)d\theta$$

となることを示したので，この推定量は (θ の)Pitman 推定量とも呼ばれている ([LC98], [Z71]).

次に，Akahira[A77] と同様にして，両側切断分布族の典型として切断指数分布の位置母数推定問題を考える．いま，$X_1, \cdots, X_n$ をたがいに独立に，いずれも密度 $f_0(x-\theta) = ce^{-h(x-\theta)}$ $(a+\theta < x < b+\theta)$; $f_0(x-\theta)=0$ (その他) をもつ分布に従う確率変数とする．ただし，$a<b$, $h \neq 0$ とし，$c = h/(e^{-ha} - e^{-hb})$ とする．このとき，

$$\prod_{i=1}^n f_0(x_i - \theta) = \begin{cases} c^n e^{hn(\theta - \bar{x})} & (x_{(n)} - b < \theta < x_{(1)} - a), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

になる．ただし，$x_{(1)} := \min_{1 \leq i \leq n} x_i$, $x_{(n)} := \max_{1 \leq i \leq n} x_i$ とする．ここで，$\underline{\theta} := X_{(n)} - b$, $\bar{\theta} := X_{(1)} - a$ とおくと，θ の Pitman 推定量は

$$\hat{\theta}_{PT} = \frac{\bar{\theta} e^{hn\bar{\theta}} - \underline{\theta} e^{hn\underline{\theta}}}{e^{hn\bar{\theta}} - e^{hn\underline{\theta}}} - \frac{1}{hn} \tag{2.1}$$

になるので

$$\hat{\theta}_{PT} - \theta = \frac{(\bar{\theta} - \theta) e^{hn\bar{\theta}} - (\underline{\theta} - \theta) e^{hn\underline{\theta}}}{e^{hn\bar{\theta}} - e^{hn\underline{\theta}}} - \frac{1}{hn} \tag{2.2}$$

となる．そこで，$U := n(\bar{\theta} - \theta)$, $V := n(\underline{\theta} - \theta)$ とおくと，(2.2) より

$$\begin{aligned} n(\hat{\theta}_{PT} - \theta) &= \frac{n(\bar{\theta} - \theta) e^{hn(\bar{\theta} - \theta)} - n(\underline{\theta} - \theta) e^{hn(\underline{\theta} - \theta)}}{e^{hn(\bar{\theta} - \theta)} - e^{hn(\underline{\theta} - \theta)}} - \frac{1}{h} \\ &= \frac{U e^{hU} - V e^{hV}}{e^{hU} - e^{hV}} - \frac{1}{h} \end{aligned} \tag{2.3}$$

になる．また，

$$T := n(\bar{\theta} - \underline{\theta}) = U - V, \quad S := n\left(\frac{\underline{\theta} + \bar{\theta}}{2} - \theta\right) = \frac{1}{2}(U+V) \tag{2.4}$$

とおくと

$$U = S + \frac{T}{2}, \quad V = S - \frac{T}{2}$$

になるから，(2.3) より

$$n(\hat{\theta}_{PT} - \theta) = S + \frac{T(e^{hT}+1)}{2(e^{hT}-1)} - \frac{1}{h} = S + \frac{T}{2}\coth\frac{hT}{2} - \frac{1}{h} \tag{2.5}$$

になる．ここで，(2.5) は任意の n について成り立つことに注意．さらに，[AOT07] において論じたようにもっと一般の両側切断分布を考える．いま，$X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ をたがいに独立に，いずれも (Lebesgue 測度に関する) 密度 $f_0(x-\theta)$ をもつ実確率変数とする．ただし $x \in \mathbf{R}^1$, $\theta \in \mathbf{R}^1$ とする．そして，$f_0(\cdot)$ に次の条件を仮定する．

(C1) $f_0(x) > 0 \quad (a < x < b); f_0(x) = 0 \quad (x \leq a,\ x \geq b)$ で, a, b は有限で $a < b$ とし, $f_0(\cdot)$ は区間 (a, b) 上で 2 回連続微分可能である.

(C2) $A := f_0(a+0) = \lim_{x \to a+0} f_0(x)$, $B := f_0(b-0) = \lim_{x \to b-0} f_0(x)$ で $0 < A < \infty$, $0 < B < \infty$ で $A \neq B$ である. また, $A' := f_0'(a+0)$, $B' := f_0'(b-0)$ はいずれも有限である.

このとき, T, S を (2.4) のように定義すれば, 次のことが成り立つ.

定理 1 ([AOT07]). 条件 (C1), (C2) の下で, Pitman 推定量の漸近展開は, $n \to \infty$ のとき

$$
\begin{aligned}
n(\hat{\theta}_{PT} - \theta) &= S + \frac{T\{e^{(A-B)T} + 1\}}{2\{e^{(A-B)T} - 1\}} - \frac{1}{A-B} + o_p(1) \\
&= S + \frac{T}{2} \coth \frac{A-B}{2} T - \frac{1}{A-B} + o_p(1) \qquad (2.6)
\end{aligned}
$$

であり, その漸近分散は

$$
V_\theta(n(\hat{\theta}_{PT} - \theta)) = \frac{1}{(A-B)^2} - \frac{AB}{A-B} \int_0^\infty \frac{t^2}{e^{At} - e^{Bt}} dt \qquad (2.7)
$$

である.

前出の切断指数分布の場合には, $A = ce^{-ha}$, $B = ce^{-hb}$ であるから $A - B = c(e^{-ha} - e^{-hb}) = h$ となり, (2.6) の右辺の $o_p(1)$ を無視すれば, (2.5) に一致することが分かる. 一般に条件 (C1), (C2) の下で, $\hat{\theta}_{PT}$ の漸近展開 (2.6) から (2.4) を用いて変形すると

$$
\begin{aligned}
\hat{\theta}_{PT} &= \frac{\underline{\theta} + \bar{\theta}}{2} + \frac{1}{2}(\bar{\theta} - \underline{\theta}) \frac{e^{(A-B)n(\bar{\theta} - \underline{\theta})} + 1}{e^{(A-B)n(\bar{\theta} - \underline{\theta})} - 1} - \frac{1}{n(A-B)} + o_p\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{\bar{\theta} e^{(A-B)n\bar{\theta}} - \underline{\theta} e^{(A-B)n\underline{\theta}}}{e^{(A-B)n\bar{\theta}} - e^{(A-B)n\underline{\theta}}} - \frac{1}{n(A-B)} + o_p\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (2.8)
\end{aligned}
$$

となるから, 先の切断指数分布族の場合に $A - B = h$ より (2.8) において $o_p(1/n)$ を無視したものは (2.1) と同じになる. 従って, 条件 (C1), (C2) の下では Pitman 推定量の漸近展開 (2.6) の定数のオーダーの項は切断指数分布の場合の Pitman 推定量と同じ形であることが分かる. しかし, (2.8) からも分かるように Pitman 推定量は $\underline{\theta}$ と $\bar{\theta}$ の非線形になっているので漸近分散の計算は面倒になる. そこで, $\underline{\theta}$ と $\bar{\theta}$ の線形結合からなる θ の位置共変推定量を考えて, その漸近分散と Pitman 推定量のそれとの差を計算してみよう.

3. 両側切断分布族における Pitman 推定量と荷重推定量の漸近分散の比較

条件 (C1), (C2) の下でさらに $A > B$ と仮定して, θ の尤度関数を $\hat{\theta} := (\underline{\theta} + \bar{\theta})/2$ の周りで Taylor 展開すると

$$
L(\theta; \boldsymbol{X}) = \prod_{i=1}^n f_0(X_i - \theta) = \exp\left\{\sum_{i=1}^n \log f_0(X_i - \theta)\right\}
$$

$$= \left\{ \prod_{i=1}^{n} f_0(X_i - \hat{\theta}) \right\} \exp \left[\left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \theta} \log f_0(X_i - \hat{\theta}) \right\} n(\theta - \hat{\theta}) + o_p(1) \right] \quad (3.1)$$

となり, ここで $n \to \infty$ のとき $\hat{\theta}$ は θ に確率収束する, すなわち $\hat{\theta} \overset{P_\theta}{\to} \theta$ $(n \to \infty)$ となるので

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \theta} \log f_0(X_i - \hat{\theta}) \overset{P_\theta}{\to} E_\theta \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \log f_0(X - \theta) \right] = -E_0 \left[\frac{f_0'(X)}{f_0(X)} \right] = A - B > 0 \quad (3.2)$$

になる. このとき (3.1), (3.2) より

$$\sup_{\underline{\theta} < \theta < \bar{\theta}} L(\theta; \boldsymbol{X}) = \prod_{i=1}^{n} f_0(X_i, \hat{\theta}) e^{(A-B)(\bar{\theta} - \hat{\theta})} + o_p(1)$$

となるから $\bar{\theta}$ は漸近的に θ の MLE$\hat{\theta}_{ML}$ になる, すなわち $\hat{\theta}_{ML} = \bar{\theta}$ になる. また $U := n(\hat{\theta}_{ML} - \theta) = n(\bar{\theta} - \theta)$ の漸近密度は

$$f_U(u) = Ae^{-Au} + o(1) \quad (u > 0)$$

になるので, その漸近平均, 漸近分散はそれぞれ

$$E_\theta(U) = \frac{1}{A} + o(1), \quad V_\theta(U) = \frac{1}{A^2} + o(1)$$

になる. そこで, $\bar{\theta}$ を偏り補正して

$$\hat{\theta}^*_{ML} = \hat{\theta}_{ML} - \frac{1}{nA} = \bar{\theta} - \frac{1}{nA}$$

とすれば

$$E_\theta[n(\hat{\theta}^*_{ML} - \theta)] = o(1), \quad V_\theta(n(\hat{\theta}^*_{ML} - \theta)) = \frac{1}{A^2} + o(1) \quad (3.3)$$

になる. また, $\hat{\theta}^*_{ML}$ は θ の位置共変推定量であることは明らか. 一方, $V := n(\underline{\theta} - \theta)$ とおくと, V の漸近密度は

$$f_V(v) = Be^{Bv} + o(1) \quad (v < 0)$$

となる. このとき

$$E_\theta(V) = -\frac{1}{B} + o(1), \quad V_\theta(V) = \frac{1}{B^2} + o(1)$$

となるから, $\underline{\theta}$ を偏り補正して, それと $\hat{\theta}^*_{ML}$ の荷重推定量を

$$\hat{\theta}^a_W := a\hat{\theta}^*_{ML} + (1 - a) \left(\underline{\theta} + \frac{1}{nB} \right)$$

$$= a\left(\bar{\theta} - \frac{1}{nA}\right) + (1-a)\left(\underline{\theta} + \frac{1}{nB}\right) \quad (0 < a < 1) \tag{3.4}$$

と定義すれば, これは θ の位置共変推定量になるとともに

$$E_\theta\left[n(\hat{\theta}_W^a - \theta)\right] = o(1),$$

$$\begin{aligned} V_\theta\left(n(\hat{\theta}_W^a - \theta)\right) &= E_\theta\left[\left\{n(\hat{\theta}_W^a - \theta)\right\}^2\right] + o(1) \\ &= a^2 V_\theta(U) + (1-a)^2 V_\theta(V) + o(1) \\ &= \frac{a^2}{A^2} + \frac{(1-a)^2}{B^2} + o(1) \\ &= \left(\frac{1}{A^2} + \frac{1}{B^2}\right) a^2 - \frac{2}{B^2} a + \frac{1}{B^2} + o(1) \end{aligned}$$

になる. よって, $a = A^2/(A^2+B^2)$ のとき $V_\theta(n(\hat{\theta}_W^a - \theta))$ をオーダー $o(1)$ まで最小にすることが分かり

$$\hat{\theta}_W^* = \frac{A^2}{A^2+B^2}\left(\bar{\theta} - \frac{1}{nA}\right) + \frac{B^2}{A^2+B^2}\left(\underline{\theta} + \frac{1}{nB}\right)$$

は漸近分散

$$V_\theta\left(n(\hat{\theta}_W^* - \theta)\right) = \frac{1}{A^2+B^2} + o(1) \tag{3.5}$$

をもつ ([AOT07]). また, $\hat{\theta}_W^*$ が (3.4) の形の (θ の) 位置共変推定量全体のクラスの中で漸近分散を最小にするという意味で漸近的に良いことが分かるので, それを漸近最良荷重推定量という. その他に自然な荷重推定量として [AOT07] では

$$\tilde{\theta} := \frac{A\bar{\theta} + B\underline{\theta}}{A+B}$$

を挙げていて, これも θ の位置共変推定量でかつ

$$E_\theta\left[n(\tilde{\theta} - \theta)\right] = o(1), \quad V_\theta\left(n(\tilde{\theta} - \theta)\right) = \frac{2}{(A+B)^2} + o(1) \tag{3.6}$$

になる. 一方, $\hat{\theta}_{PT}$ の漸近分散 (2.7) の右辺の第 2 項にある積分を

$$I(A,B) := \int_0^\infty \frac{t^2}{e^{At} - e^{Bt}} dt \tag{3.7}$$

とおくと

$$V_\theta\left(n(\hat{\theta}_{PT} - \theta)\right) = \frac{1}{(A-B)^2} - \frac{AB}{A-B} I(A,B) + o(1)$$

になる．このとき, Koike[K03] を少し変形して計算すると

$$I(A,B)=\frac{2}{(A-B)^3}\zeta\left(3,\frac{A}{A-B}\right)\quad(A>B)\tag{3.8}$$

になる．ここで, ζ は一般のツェータ関数の積分表示

$$\zeta(z,a):=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(a+n)^z}=\frac{1}{\Gamma(z)}\int_0^{\infty}\frac{t^{z-1}e^{-at}}{1-e^{-t}}dt$$

とする ([MUH98] の III の p.19 参照)．ただし, a は定数で, $\mathrm{Re}z>1$ とする．また, 一般のツェータ関数の定義から, 自然数 k について

$$\zeta(z,k)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(k+n)^z}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}-\sum_{n=1}^{k-1}\frac{1}{n^z}=\zeta(z)-\sum_{n=1}^{k-1}\frac{1}{n^z}\tag{3.9}$$

になる．ここで, $\sum_{n=1}^{0}1/n^z=0$ とし, $\zeta(z):=\sum_{n=1}^{\infty}1/n^z$ $(\mathrm{Re}z>1)$ は Riemann のツェータ関数とする．特に, (3.8) において $k:=A/(A-B)$ が整数となるとき (3.8), (3.9) より

$$I(A,B)=\frac{2}{(A-B)^3}\zeta(3,k)=\frac{2}{(A-B)^3}\left\{\zeta(3)-\sum_{n=1}^{k-1}\frac{1}{n^3}\right\}\tag{3.10}$$

になる．例えば $A=2$, $B=1$ とすると $k=2$ になり, そのときのツェータ関数の値は

$$\zeta(3)=\pi^3/25.79436\cdots\fallingdotseq 1.20205$$

となり ([MUH98] の II の p.39 参照), (3.10) より $I(2,1)\fallingdotseq 0.4041$ となる．

さて, Pitman 推定量 $\hat{\theta}_{PT}$ は θ の位置共変推定量全体のクラスの中で, 平均 2 乗誤差を最小にすることは分かっているが, 補正 MLE $\hat{\theta}^*_{ML}$, 荷重推定量 $\hat{\theta}^*_W$, $\tilde{\theta}$ の漸近分散 (3.3), (3.5), (3.6) との差について考えてみよう．まず

$$V_\theta\left(n(\tilde{\theta}-\theta)\right)-V_\theta\left(n(\hat{\theta}^*_W-\theta)\right)=\frac{(A-B)^2}{(A+B)^2(A^2+B^2)}+o(1)$$

となるから, $\hat{\theta}^*_W$ は $\tilde{\theta}$ より漸近的に良いことが分かる ([AOT07])．また

$$V_\theta\left(n(\hat{\theta}^*_{ML}-\theta)\right)-V_\theta\left(n(\hat{\theta}^*_W-\theta)\right)=\frac{B^2}{A^2(A^2+B^2)}+o(1)$$

となるから, $\hat{\theta}^*_W$ は $\hat{\theta}^*_{ML}$ より漸近的に良い．そこで, $\tilde{\theta}$ と $\hat{\theta}^*_{ML}$ を比較すると

$$\begin{aligned}&V_\theta\left(n(\tilde{\theta}-\theta)\right)-V_\theta\left(n(\hat{\theta}^*_{ML}-\theta)\right)\\&=\frac{2}{(A+B)^2}-\frac{1}{A^2}+o(1)=\frac{\{A+(\sqrt{2}-1)B\}\{A-(\sqrt{2}+1)B\}}{A^2(A+B)^2}+o(1)\end{aligned}$$

より

$$V_\theta\Big(n(\tilde{\theta}-\theta)\Big) < V_\theta\Big(n(\hat{\theta}^*_{ML}-\theta)\Big) \iff 1 < \frac{A}{B} < 1+\sqrt{2},$$
$$V_\theta\Big(n(\tilde{\theta}-\theta)\Big) > V_\theta\Big(n(\hat{\theta}^*_{ML}-\theta)\Big) \iff \frac{A}{B} > 1+\sqrt{2}$$

となる. ここで, 位置共変推定量 $\hat{\theta}$ について, その漸近分散を

$$v(\hat{\theta}) := V_\theta\Big(n(\hat{\theta}-\theta)\Big)$$

と表わすと, $1 < A/B < 1+\sqrt{2}$ の場合には, $n \to \infty$ のときオーダー $o(1)$ まで

$$v(\hat{\theta}_{PT}) < v(\hat{\theta}^*_W) < v(\tilde{\theta}) < v(\hat{\theta}^*_{ML})$$

が成り立つ. 一方, $A/B > 1+\sqrt{2}$ の場合には, $n \to \infty$ のときオーダー $o(1)$ まで

$$v(\hat{\theta}_{PT}) < v(\hat{\theta}^*_W) < v(\hat{\theta}^*_{ML}) < v(\tilde{\theta})$$

となって, $v(\tilde{\theta})$ と $v(\hat{\theta}^*_{ML})$ の大小が入れ替わる. ここで, 具体的に $v(\hat{\theta}_{PT})$ の値を求めようとすると, $I(A,B)$ の計算において $k = A/(A-B)$ を整数にすると

$$\frac{A}{B} = \frac{k}{k-1} = 1 + \frac{1}{k-1} \leq 2 \quad (k \geq 2)$$

となるので, $A/B > 2$ となる場合に (3.10) のような方法は適用できないが数値計算で求められる. 例えば, $A/B = 2$ の場合には次の表 1 のような結果になり, $A/B = 4$ の場合には表 2 のようになる.

表 1 $A/B = 2$ の場合の位置共変推定量 $\hat{\theta}$ の漸近分散 $v(\hat{\theta})$

$v(\hat{\theta}) \setminus (A,\ B)$	(1/2, 1/4)	(1, 1/2)	(2, 1)	(4, 2)
$v(\hat{\theta}_{PT})$	3.0684	0.7671	0.1918	0.0479
$v(\hat{\theta}^*_W)$	3.2	0.8	0.2	0.05
$v(\tilde{\theta})$	3.5556	0.8889	0.2222	0.0555
$v(\hat{\theta}^*_{ML})$	4	1	0.25	0.0625

表 2 $A/B = 4$ の場合の位置共変推定量 $\hat{\theta}$ の漸近分散 $v(\hat{\theta})$

$v(\hat{\theta}) \setminus (A,\ B)$	(1/2, 1/8)	(1, 1/4)	(2, 1/2)	(4, 1)
$v(\hat{\theta}_{PT})$	3.5647	0.8912	0.2228	0.0557
$v(\hat{\theta}^*_W)$	3.7647	0.9412	0.2353	0.0588
$v(\hat{\theta}^*_{ML})$	4	1	0.25	0.0625
$v(\tilde{\theta})$	5.12	1.28	0.32	0.08

ここで, 表1, 2から$v(\hat{\theta}_{PT})$に対する$v(\hat{\theta}^*_W)$の相対差は, $A/B=2$のときほぼ0.04, $A/B=4$のときほぼ0.056となるので, $v(\hat{\theta}^*_W)$は$v(\hat{\theta}_{PT})$にかなり良い近似になっている. また表1から$v(\hat{\theta}_{PT})$に対する$v(\tilde{\theta})$の相対差は, $A/B=2$のときほぼ0.16となり, 表2から$v(\hat{\theta}_{PT})$に対する$v(\hat{\theta}^*_{ML})$の相対差は, $A/B=4$のときほぼ0.12になることも分かる.

なお, 本節では$A>B$と仮定したが, $B>A$の場合も同様に論じることが可能である.

4. 片側切断分布族における Pitman 推定量と補正最尤推定量の 2 次の漸近的比較

まず, [AOT07] と同じ設定の下で片側切断分布族について考えることにし, $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$をたがいに独立に, いずれも (Lebesgue 測度に関する) 密度$f(x-\theta)$をもつ分布に従う実確率変数列とする. ただし, θは実母数とする. ここで$f(\cdot)$に次の条件 (D1), (D2) を仮定する.

(D1) $f(x)>0 \quad (x>0); f(x)=0 \quad (x\le 0)$で, $f(x)$は2回連続微分可能であり, $\psi(x):=\log f(x)$ $(x>0)$とするとき$\psi''(x)$は区間$(0,\infty)$上で一様有界であり, また任意の$x_0\in(0,\infty)$に対して正の定数Kが存在して, 任意の$x\in(0,\infty)$について

$$|\psi''(x)-\psi''(x_0)|\le K|x-x_0|$$

である.

(D2) $A:=\lim_{x\to 0+0} f(x)>0$, $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$, $A':=\lim_{x\to 0+0} f'(x)$, $\lim_{x\to\infty} f'(x)=0$, $0<I:=-E_0[\psi''(X)]$でかつ$0<I_0:=E_0[\{\psi'(X)\}^2]<\infty$である.

条件 (D1), (D2) の下で

$$I_0=I-A' \tag{4.1}$$

が成り立つ. そして次の命題を得る.

定理 2 ([AOT07]). 条件 (D1), (D2) の下で, θの Pitman 推定量$\hat{\theta}_{PT}$の漸近展開は

$$\begin{aligned} n(\hat{\theta}_{PT}-\theta) = n(\bar{\theta}-\theta) &- \frac{1}{A} + \frac{Z_n(\theta)}{A^2\sqrt{n}} - \frac{1}{A^3 n}\left\{Z_n^2(\theta)-2I\right\} \\ &- \frac{I}{A^2}(\bar{\theta}-\theta) + o_p\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned} \tag{4.2}$$

であり, その漸近分散は

$$V_\theta(n(\hat{\theta}_{PT}-\theta)) = \frac{1}{A^2}+o(1)$$

である. ただし, $\bar{\theta}=X_{(1)}:=\min_{1\le i\le n} X_i$とし,

$$Z_n(\theta):=-\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n\{\psi'(X_i-\theta)+A\}$$

とする.

いま, 密度として $f(x) = Ae^{-Ax}$ $(x > 0)$; $f(x) = 0$ $(x \leq 0)$ をもつ指数分布の密度をとると, 位置母数 θ の Pitman 推定量が, 任意の n について

$$\hat{\theta}_{PT} = \frac{\int_{-\infty}^{X_{(1)}} \theta e^{nA(\theta-\bar{X})} d\theta}{\int_{-\infty}^{X_{(1)}} e^{nA(\theta-\bar{X})} d\theta} = X_{(1)} - \frac{1}{nA} = \bar{\theta} - \frac{1}{An}$$

となり, この形は $\hat{\theta}_{PT}$ の漸近展開 (4.2) の定数のオーダーの項に一致する. また, (4.2) より

$$n(\hat{\theta}_{PT} - \theta) = n\left(\bar{\theta} - \frac{1}{An} - \theta\right) + o_p(1)$$

となるから $\hat{\theta}_{PT}$ と $\bar{\theta} - (1/(An))$ は漸近的には同等になる. ここで θ の尤度関数を $\theta = \bar{\theta}$ の周りで Taylor 展開し, (3.1), (3.2) と同様にして

$$L(\theta, \boldsymbol{X}) = \left\{\prod_{i=1}^{n} f(X_i - \bar{\theta})\right\} e^{An(\theta-\bar{\theta})} + o_p(1)$$

を得るから

$$\sup_{\theta<\bar{\theta}} L(\theta, \boldsymbol{X}) = \prod_{i=1}^{n} f(X_i - \bar{\theta}) + o_p(1)$$

となり, $\bar{\theta}$ は漸近的に θ の MLE$\hat{\theta}_{ML}$ になる, すなわち $\hat{\theta}_{ML} = \bar{\theta}$ になる. また, $\hat{\theta}_{ML}$ を偏り補正して

$$\hat{\theta}^*_{ML} := \hat{\theta}_{ML} - \frac{1}{An}$$

とすれば

$$E_\theta\left[n(\hat{\theta}^*_{ML} - \theta)\right] = o(1)$$

となる ([AOT07] の p.126 参照). このとき, $\hat{\theta}^*_{ML}$ は θ の位置共変推定量になることは明らかであり, $\hat{\theta}_{PT}$ は $\hat{\theta}^*_{ML}$ より良い推定量であるが, 1 次のオーダーでは漸近的に同等であるので, $\hat{\theta}^*_{ML}$ は $\hat{\theta}_{PT}$ より 2 次のオーダーで漸近的に悪くなると予想され, その漸近的損失を求めてみよう.

まず, $U := n(\bar{\theta} - \theta) = n(X_{(1)} - \theta)$ の 2 次の漸近密度を求めると

$$f_U(u) = Ae^{-Au}\left(1 - \frac{A' + A^2}{2n}u^2 + \frac{A' + A^2}{An}u + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \quad (u > 0)$$

となるので,

$$E(U) = \frac{1}{A} - \frac{A' + A^2}{A^3 n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \tag{4.3}$$

$$E(U^2) = \frac{2}{A^2} - \frac{6(A' + A^2)}{A^4 n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{4.4}$$

になる．また，(4.2) より

$$\begin{aligned} n(\hat{\theta}_{PT} - \theta) = n(\hat{\theta}^*_{ML} - \theta) &+ \frac{1}{A^2\sqrt{n}} Z_n(\theta) - \frac{1}{A^3 n}\left\{Z_n^2(\theta) - 2I\right\} \\ &- \frac{I}{A^2 n} U + o_p\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned} \tag{4.5}$$

となるから

$$\begin{aligned} &E_\theta\left[\left\{n(\hat{\theta}_{PT} - \theta)\right\}^2\right] \\ =&E_\theta\left[\left\{n(\hat{\theta}^*_{ML} - \theta)\right\}^2\right] + \frac{1}{A^4 n} E_\theta\left[Z_n^2(\theta_0)\right] + \frac{2}{A^2\sqrt{n}} E_\theta\left[n(\hat{\theta}^*_{ML} - \theta) Z_n(\theta)\right] \\ &- \frac{2}{A^3 n} E_\theta\left[n(\hat{\theta}^*_{ML} - \theta)\left\{Z_n^2(\theta) - 2I\right\}\right] - \frac{2I}{A^2 n} E_\theta\left[n(\hat{\theta}^*_{ML} - \theta) U\right] + o\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned} \tag{4.6}$$

になる．ここで，(4.3), (4.4) より

$$\begin{aligned} &E_\theta\left[\left\{n(\hat{\theta}^*_{ML} - \theta)\right\}^2\right] = V_\theta\left(n(\hat{\theta}^*_{ML} - \theta)\right) = V_\theta\left(n(\hat{\theta}_{ML} - \theta)\right) = V_\theta\left(n(\bar{\theta} - \theta)\right) \\ =&E_\theta(U^2) - \left\{E_\theta(U)\right\}^2 = \frac{1}{A^2} - \frac{4(A' + A^2)}{A^4 n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned} \tag{4.7}$$

になる．また

$$E_\theta\left[Z_n^2(\theta)\right] = E_0\left[\left\{\psi'(X) + A\right\}^2\right] = I_0 - A^2, \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned} &E_\theta\left[n(\hat{\theta}^*_{ML} - \theta) Z_n(\theta)\right] = E_\theta\left[U E_\theta\left(Z_n(\theta)|U\right)\right] \\ =&\frac{A' + A^2}{A^2\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right), \end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned} &E_\theta\left[n(\hat{\theta}^*_{ML} - \theta)\left(Z_n^2(\theta) - 2I\right)\right] \\ =&E_\theta\left[U Z_n^2(\theta)\right] - \frac{1}{A} E_\theta\left[Z_n^2(\theta)\right] - 2I\left\{E_\theta(U) - \frac{1}{A}\right\} \\ =&E_\theta\left[U E_\theta\left[Z_n^2(\theta)|U\right]\right] - \frac{1}{A} E_\theta\left[Z_n^2(\theta)\right] - 2I E_\theta(U) + \frac{2I}{A} \\ =&O\left(\frac{1}{n}\right), \end{aligned} \tag{4.10}$$

$$E_\theta\left[n(\hat{\theta}^*_{ML}-\theta)U\right]=E_\theta(U^2)-\frac{1}{A}E_\theta(U)=\frac{1}{A^2}+O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{4.11}$$

になる. よって, (4.7)〜(4.11) を (4.6) に代入して

$$E_\theta\left[\left\{n(\hat{\theta}_{PT}-\theta)\right\}^2\right]=\frac{1}{A^2}-\frac{4(A'+A^2)}{A^4n}-\frac{1}{A^4n}(I_0-A^2)+o\left(\frac{1}{n}\right) \tag{4.12}$$

になり, (4.7) と (4.12) より

$$E_\theta\left[\left\{n(\hat{\theta}^*_{ML}-\theta)\right\}^2\right]-E_\theta\left[\left\{n(\hat{\theta}_{PT}-\theta)\right\}^2\right]=\frac{1}{A^4n}(I_0-A^2)+o\left(\frac{1}{n}\right) \tag{4.13}$$

となる. ここで, Schwarz の不等式から

$$I_0=E_0\left[\{\psi'(X)\}^2\right]\geq\{E_0\left[\psi'(X)\right]\}^2=A^2 \tag{4.14}$$

になる. 以上のことから次の命題が成り立つ.
定理 3 条件 (D1), (D2) の下で, 補正 MLE$\hat{\theta}^*_{ML}$ の Pitman 推定量 $\hat{\theta}_{PT}$ に対する 2 次の漸近損失は

$$\begin{aligned}d_n(\hat{\theta}^*_{ML},\hat{\theta}_{PT}):=&A^4n\left\{V_\theta\left(n(\hat{\theta}^*_{ML}-\theta)\right)-V_\theta\left(n(\hat{\theta}_{PT}-\theta)\right)\right\}\\=&I_0-A^2+o(1)\qquad(n\to\infty)\end{aligned} \tag{4.15}$$

である. ここで, $d_n(\hat{\theta}^*_{ML},\hat{\theta}_{PT})=o(1)$ $(n\to\infty)$ となるのは, 指数分布の場合に限る.
証明については (4.15) は (4.13) から明らか. また, (4.14) より $I_0-A^2\geq 0$ であり, $I_0=A^2$ となるのは $\psi'(x)=c$ (定数) となる場合に限るので, $f(x)$ は指数分布の密度になる.
例 1([AOT07] の Ex.3.1) 密度として

$$f(x)=\begin{cases}ce^{-(x-1)^2/2} & (x>0),\\ 0 & (x\leq 0)\end{cases}$$

となる左側切断正規分布の密度をとると条件 (D1), (D2) は満たされ, $A=A'=ce^{-1/2}$, $I=1$, また (4.1) より $I_0=I-A'=1-ce^{-1/2}$ となるので, (4.15) より

$$d_n(\hat{\theta}^*_{ML},\hat{\theta}_{PT})=1-ce^{-1/2}-c^2e^{-1}+o(1)\qquad(n\to\infty)$$

になる. ただし, $c=1/\{\sqrt{2\pi}\Phi(1)\}$ で Φ は標準正規分布の累積分布関数とする.
例 2 密度として

$$f(x)=\begin{cases}c(x+1)^2e^{-(x+1)/2} & (x>0),\\ 0 & (x\leq 0)\end{cases}$$

となる左側切断カイ2乗分布の密度を考える．ただし，$c = e^{1/2}/26$ とする．このとき，条件 (D1), (D2) は満たされ，$A = 1/26$, $A' = 3/52$ になり，$I = 2/13$ となるから (4.1) より $I_0 = I - A' = 5/52$ となる．よって，(4.15) より

$$d_n(\hat{\theta}^*_{ML}, \hat{\theta}_{PT}) = \frac{16}{169} + o(1) \qquad (n \to \infty)$$

になる．

5. おわりに

第2節で両側切断分布族の位置共変推定問題において，Pitman 推定量の漸近展開の定数のオーダーの項が切断指数分布の場合の Pitman 推定量の形と同じであることを示したが，これは正則な場合に最尤推定量の漸近展開の定数のオーダーの項が正規確率変数になることに相当する．このことは，切断指数分布が両側切断分布族の基点として把えられることを示しているとともに，極値統計量 $(\underline{\theta}, \bar{\theta})$ の関数として表現された Pitman 推定量が範囲と範囲の中央から成るそれぞれの変数 S, T の関数としても表現できる経過も明解に示している．次に Pitman 推定量の漸近分散は積分表示の項が出現するために面倒にはなるが，漸近最良荷重推定量の漸近分散の値がそれに近いのではないかと推察される．

第4節の片側切断分布族の位置共変推定問題においても，Pitman 推定量 $\hat{\theta}_{PT}$ の漸近展開の定数のオーダーの項が指数分布の場合の Pitman 推定量の形と同じであることが分かった．また偏り補正した最尤推定量 $\hat{\theta}^*_{ML}$ は $\hat{\theta}_{PT}$ と1次のオーダーでは漸近的に同等であるが，2次のオーダーでは漸近的差が生じ，$\hat{\theta}^*_{ML}$ の $\hat{\theta}_{PT}$ に対する2次の漸近損失が解析的に求められた．

今後の課題としては，切断分布族における尺度共変推定問題が挙げられる．

参考文献

[A75] Akahira, M. (1975). Asymptotic theory for estimation of location in non-regular cases, I: Order of convergence of consistent estimators. *Rep. Stat. Appl. Res., JUSE*, **22**(1), 8–26.

[A77] Akahira, M. (1977). A remark on comparison with a maximum likelihood estimator in asymptotic variances in a non-regular case. *Rep. Univ. Electro-Comm.*, **27**(2), 309–311.

[A91] Akahira, M. (1991). The 3/2th and 2nd order asymptotic efficiency of maximum probability estimators in non-regular cases. *Ann. Inst. Statist. Math.*, **43**(1), 181–195.

[A95] Akahira, M. (1995). The amount of information and the bound for the order of consistency for a location parameter family of densities. *Proc. of the 2nd Gauss Symposium, Conference B: Statistical Sciences*, de Gruyter, Berlin, 303–311.

[A96] Akahira, M. (1996). Loss of information of a statistic for a family of non-regular distributions. *Ann. Inst. Statist. Math.*, **48**(2), 349–364.

[AKO12] Akahira, M., Kim, H. G. and Ohyauchi, N. (2012). Loss of information of a statistic for a family of non-regular distributions, II: more general case. *Ann. Inst. Statist. Math.*, **64**(6), 1121–1138.

[AO02] Akahira, M. and Ohyauchi, N.(2002). Information inequalities for the Bayes risk for a family of non-regular distributions. *Ann. Inst. Statist. Math.*, **54**(4), 805–815.

[AOT07] Akahira, M., Ohyauchi, N. and Takeuchi, K. (2007). On the Pitman estimator for a family of non-regular distributions. *Metron*, **65**(1), 113–127.

[K03] Koike, K. (2003). Personal communication.

[LC98] Lehmann, L. and Casella, G. (1998). *Theory of Point Estimation.* Springer, New York.

[MUH98] 森口・宇田川・一松 (1998). 数学公式 II, III. 岩波書店.

[OA13] Ohyauchi, N. and Akahira, M. (2013). Asymptotic comparison of estimators for a family of truncated distributions. (In Japanese), RIMS *Kôkyûroku,*, **1860**, 129–139.

[P39] Pitman, E. J. G. (1939). The estimation of the location and scale parameters of a continuous population of any given form. *Biometrika*, **30**, 391–421.

[Z71] Zacks, S. (1971). *Theory of Statistical Inference.* Wiley, New York.